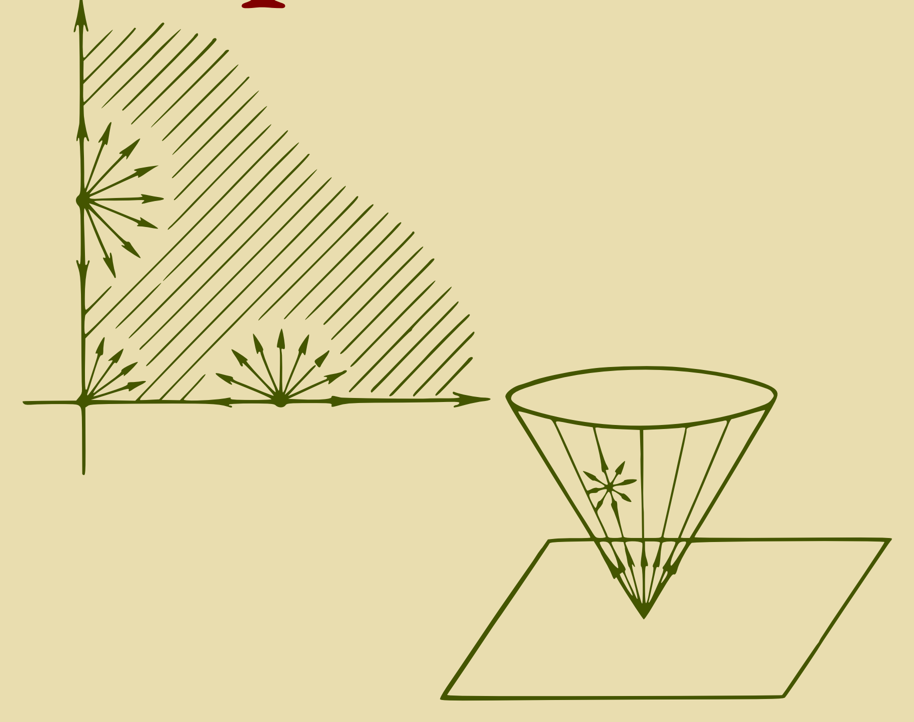
V. Alexéev, V. Tikhomirov, S. Fomine

Commande Optimale



Éditions Mir Moscou

V. ALEXÉEV, V. TIKHOMIROV, S. FOMINE

COMMANDE OPTIMALE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe par
A. SOSSINSKI

Dans tout le livre
remplacer "Boltz" par
"Bolza"

на французском языке

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Un des traits les plus typiques de notre époque est l'intérêt croissant aux problèmes de commande, de contrôle et de gestion. Comme jamais dans l'histoire, on ressent aujourd'hui la nécessité d'une gestion fructueuse et efficace des ressources naturelles et humaines, des moyens matériels et techniques.

Lorsqu'il s'agit des acquis les plus marquants du progrès scientifique et technique au XXe siècle, on cite le plus souvent la fission de l'atome, la conquête de l'espace et la création des ordinateurs. Sur ce fond, la théorie de la commande ne semble pas tellement remarquable, quoiqu'elle joue déjà un rôle de pointe dans le développement de la civilisation moderne, et il y a bien des raisons pour croire que son rôle ira croissant.

Partout où la participation active de l'homme est possible, il doit faire face au choix de la commande la meilleure possible, ou, comme on dit, de la commande *optimale*. Posés par les exigences de l'économie et de la technique, les problèmes d'optimisation ont nécessité à leur tour la création de nouveaux chapitres des mathématiques.

Ainsi, dans les années 40, l'étude des problèmes économiques a engendré une nouvelle branche de l'analyse, qui fut appelée programmation linéaire ou programmation convexe. Pendant ces mêmes années, les problèmes de commande d'appareils volants et de processus technologiques à structure complexe sont devenus actuels. La théorie mathématique appropriée fut bâtie au milieu des années 50 et fut appelée théorie de commande optimale. Le rôle le plus important y est joué par le « principe du maximum » de Pontriaguine. La théorie de commande optimale réalisa une synthèse des idées et des méthodes de recherche qui, d'une part, prennent leur source dans les travaux des classiques du calcul des variations, et, d'autre part, sont assez récentes. Le développement de cette théorie est lié, de manière très essentielle, aux noms de plusieurs chercheurs soviétiques.

Ce livre a été conçu comme un manuel de divers cours d'optimisation, professés dans les universités et dans les institutions d'en-

seignement supérieur où les mathématiques sont situées à un bon niveau. Voyons brièvement quels sont les principes de base et le plan de l'ouvrage.

Les débuts de l'histoire des problèmes d'extrémum sont éloignés de nos jours: dans une certaine mesure, de tels problèmes ont toujours attiré l'attention des mathématiciens. Nous cherchons à faire découvrir aux lecteurs (de niveaux de préparation différents) la continuité du cheminement scientifique et les profondes liaisons qui existèrent dans le temps entre ces problèmes. Cette conception est développée au Ier chapitre, qui est accessible à un très large groupe de lecteurs. Quoique l'appareil mathématique que nous y employons est peu développé, nous avons essayé d'effectuer notre exposé dans le style d'un texte mathématique précis, nous limitant aux fragments les plus expressifs mais élémentaires de l'histoire des problèmes d'extrémum. Notre but est de démontrer la liaison profonde entre les idées de base dues à Kepler et Fermat, les problèmes posés par Huygens, Newton et Bernoulli, les idées et les méthodes de Lagrange, Euler et Weierstrass ainsi que leur interaction avec l'étape actuelle du développement de la théorie, étape qui se place dans le prolongement direct de la recherche effectuée par ces précurseurs éminents. En outre, le Ier chapitre décrit des méthodes de résolution de certains problèmes concrets et donne des exemples où la solution de problèmes posés à des époques différentes par des chercheurs de différentes écoles est obtenue en se basant sur un point de vue unique.

Le reste du livre est adressé en premier lieu aux mathématiciens.

La création de la nouvelle théorie a stimulé le développement de l'analyse mathématique, de ses branches aussi bien anciennes que nouvelles. Celles-ci ne sont pas toutes représentées de manière appropriée dans l'enseignement mathématique contemporain. Il nous semble que le fragment de l'analyse classique, concentré autour du thème des « fonctions implicites », joue aujourd'hui un rôle exceptionnel dans tous les aspects de l'analyse, en dimension finie et infinie. Il en est de même pour les fondements de l'analyse convexe. Enfin, il est essentiel, pour la théorie de la commande optimale, que les faits fondamentaux de la théorie des équations différentielles restent valables également pour les équations aux deuxièmes membres discontinus.

Les trois branches de l'analyse et de la géométrie que nous venons de mentionner sont exposées au IIe chapitre.

La théorie des problèmes d'extrémum proprement dite est présentée dans le IIIe et le IVe chapitres. Essentiellement, leur contenu est celui d'un cours obligatoire d'un semestre, professé par les auteurs à la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université de Moscou. Le texte est préparé de sorte qu'une seule conférence suffise à la démonstration des principaux théorèmes. Nous avons partout

cherché à donner une exposition complète, en évitant les lacunes, les considérations intuitives, « l'évidence », etc.

Certaines notations standards (provenant de la théorie des ensembles, de l'analyse fonctionnelle, etc.) sont employées dans le texte sans explication. Aussi, pour mieux orienter le lecteur, avons-nous ajouté, à la fin du livre, une liste des principales notations, suivies des explications nécessaires.

Les paragraphes dont les numéros sont marqués par un astérisque dans le texte et dans la table des matières sont appelés à montrer au lecteur les méthodes modernes de la théorie des problèmes d'extrémum. Ici l'exposé est plus proche de celui d'une monographie: nous nous permettons des renvois, en nombre minimal, il est vrai, à des théorèmes qui, quoique étant classiques, se trouvent encore en dehors des programmes traditionnels. Ces paragraphes ont été écrits sur la base des cours spéciaux facultatifs « Analyse convexe », « Chapitres supplémentaires de la théorie des problèmes d'extrémum » et d'autres, également professés par les auteurs à la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université de Moscou pendant plusieurs années.

Le lecteur peut s'informer en plus grand détail sur le contenu du présent ouvrage en étudiant la table des matières, dans laquelle les principaux résultats et faits exposés dans ce livre sont nommés explicitement.

On voit donc que notre livre est adressé en premier lieu aux étudiants des universités et des institutions d'enseignement supérieur à niveau mathématique suffisamment élevé, mais aussi aux ingénieurs, aux économistes et aux mathématiciens qui se trouvent en nécessité de résoudre divers problèmes d'extrémum. C'est à ces lecteurs que nous avons adressé l'Introduction; pour ceux qui s'intéresseraient à la théorie des problèmes d'extrémum d'une manière plus approfondie, nous avons ajouté à notre livre une bibliographie, assez complète en ce qui concerne les monographies et les articles de revue.

L'apparition et le développement du cours de commande optimale à la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université de Moscou sont surtout le mérite de Serguéi Vassiliévitch Fomine; et c'est à son initiative que nous devons l'apparition du présent ouvrage. En le rédigeant, nous nous sommes servis des notes originales du cours professé par S. V. Fomine, écrites en collaboration avec V. M. Tikhomirov. La mort prématurée de Serguéi Vassiliévitch, en plein essort de ses forces et de son talent, l'ont lésé de la possibilité de voir la conclusion de ses efforts.

Nous exprimons ici notre reconnaissance sincère à nos collègues de la chaire des problèmes généraux de commande de la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université de Moscou, aussi bien pour leur participation active à la discussion des problèmes

méthodologiques de l'enseignement du cours de commande optimale, que pour leurs remarques concernant le caractère de l'exposition de nombreuses questions concrètes abordées dans le livre.

Nous considérons qu'il est de notre devoir de noter que la formation des conceptions mathématiques sur lesquelles se base ce livre a été sérieusement influencée par l'activité créatrice de A. A. Milioutine.

Nous remercions A. I. Markouchévitch pour de précieuses consultations, ainsi que A. P. Bouslaev et G. G. Magaril-Iliaev, qui ont lu le manuscrit en détail et fait de nombreuses remarques très utiles.

V. M. Alexéev, V. M. Tikhomirov

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

§ 1.1. D'où proviennent les problèmes d'extrémum ?

Les gens recherchent en général ce qu'il y a de meilleur, et lorsque plusieurs possibilités se présentent, leur choix se porte tout naturellement vers la variante *optimale*.

Le mot « optimal » provient du latin *optimus*, qui veut dire meilleur, parfait. Pour choisir la possibilité optimale, on est amené à résoudre les problèmes de recherche d'un *maximum* ou d'un *minimum*, i.e. de la plus grande ou de la plus petite valeur d'une certaine variable. Ces deux notions — maximum et minimum — se réunissent en un seul terme: *extrémum*. Par conséquent, les problèmes de recherche des maximums et des minimums sont appelés *problèmes d'extrémum*.

Les méthodes de recherche et d'étude de diverses sortes de problèmes d'extrémum se rapportent à des branches spéciales de l'analyse mathématique. A peu près la même signification est donnée au titre *Problèmes d'optimisation*, mais ce dernier reflète plus nettement la liaison de ces problèmes avec les applications pratiques.

Le but de cet ouvrage est de familiariser le lecteur avec la théorie et les méthodes de résolution des problèmes d'extrémum. Mais avant d'aborder l'exposition formelle et systématique de cette branche des mathématiques, nous ferons un voyage dans l'histoire, pour mieux comprendre quelles furent les raisons profondes de poser et de résoudre les problèmes d'extrémum sous leur aspect pratique, i.e. en tant que problèmes d'optimisation.

Mercatique solum, facti
de nomine Byrsam
Taurino quantum possent
circumdare tergo.
Publius Virgilius Maro, *Aeneas* [1])

1.1.1. Le problème isopérimétrique classique. Problème de Didon. Le problème de recherche des plus grandes et des plus petites valeurs fut déjà posé dans l'Antiquité. Le problème d'extrémum le plus

[1]) Tant de terre fut achetée et appelée Byrsa que put être entourée par une peau de bœuf (Virgile, l'*Enéide*).

ancien est sans doute le problème isopérimétrique classique. Il est difficile de dire quand il fut établi que le cercle et la sphère ont la plus grande contenance parmi toutes les courbes de même longueur ou parmi toutes les surfaces de même aire. Un des derniers représentants des platoniciens d'Athènes, Simplicius (VI[e] siècle ap. J.-C.), qui composa peu avant l'écroulement de la civilisation antique un vaste commentaire sur les œuvres d'Aristote (IV[e] siècle av. J.-C.), écrivait: « Il a été démontré avant Aristote, puisqu'il se sert de ce résultat comme d'un résultat connu, et ensuite d'une manière plus complète par Archimède et Zénodore, que parmi toutes les figures isopérimétriques le cercle est de plus grande contenance, tandis que parmi les isopiphanes cette propriété appartient à la sphère ». Dans cette citation, nous trouvons la formulation des problèmes d'extrémum suivants: *parmi les courbes fermées planes de longueur donnée trouver celle qui comprend la plus grande aire, et, parmi les surfaces fermées d'aire donnée dans l'espace, trouver celle qui comprend le plus grand volume.* Pour un philosophe de l'école platonicienne, un tel problème se présentait tout naturellement: il est lié à la recherche des formes idéales. Ce n'est pas par hasard que le cercle et la sphère, dans l'Antiquité, symbolisaient la perfection géométrique.

On trouve une motivation plus prosaïque du même problème isopérimétrique et de plusieurs problèmes apparentés sous une forme plutôt naïve, mais suffisamment claire, dans la légende de la reine Didon. Rappelons cette légende, suivant l'*Enéide* du poète romain Virgile, dont deux vers sont cités en guise d'épigraphe ci-dessus.

La reine Phénicienne Didon, et avec elle un petit groupe d'habitants de la ville de Tyr, fuyant les poursuites de son frère, le tiran Pygmalion, quittèrent leur ville natale et s'embarquèrent vers l'Ouest, le long des côtes de la Méditerrannée, à la recherche du bonheur. Ayant choisi sur la côte africaine un endroit commode (le golfe de Tunis), Didon et sa suite se décidèrent à s'y établir. Il semblerait que cette idée n'enthousiasma pas particulièrement les habitants du lieu, néanmoins Didon parvint à convaincre leur chef: celui-ci eut l'imprévoyance d'accorder à Didon un lopin de terre « qui peut être encerclé par une peau de bœuf ». Ce n'est que plus tard que ce chef naïf comprit l'astuce et la traîtrise de la Phénicienne. Ayant découpé la peau de bœuf en fines lamelles, celle-ci les attacha bout à bout, formant une longue corde qui lui permit de délimiter un terrain considérable, où elle fonda la ville de Carthage [1]). Pour rappeler cette histoire, la citadelle de Carthage fut appelée Byrsa [2]). Tous ces événements sont rapportés par la légende à l'année 825 (ou 814) av. J.-C.

---

[1]) Ce qui signifie « nouvelle ville » en langue phénicienne.

[2]) En langue punique (c'est ainsi que les Romains appelaient le langage des Carthaginois), ce mot signifie « peau ». Ce nom est resté jusqu'à nos jours.

En analysant cette situation, nous voyons ici plusieurs possibilités pour poser un problème d'optimisation.

A) Il faut indiquer la forme optimale du terrain qui possède une aire maximale S pour un périmètre donné L.

Il est clair qu'il s'agit ici du même problème isopérimétrique classique [1]). Sa solution est le cercle.

E x e r c i c e. En supposant que la peau de bœuf est un rectangle de 1×2 mètres et en prenant l'épaisseur des lamelles égale à 2 millimètres, trouver L et S maximal.

(Les auteurs n'ont pas su découvrir les dimensions exactes de Byrsa. Située sur une colline assez élevée (63 mètres), elle ne pouvait être particulièrement grande. Pour comparer, la longueur des murs du Kremlin de Moscou est de 2235 m.)

La solution du problème isopérimétrique est contenue dans l'assertion suivante:

Si une courbe rectifiable de longueur L limite une figure plane d'aire S, on a

$$L^2 \geqslant 4\pi S, \tag{1}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si la courbe est un cercle.

L'inégalité (1) est dite *isopérimétrique*; sa démonstration est donnée dans 1.6.4; voir également [21].

B) On obtient d'autres énoncés du problème si l'on suppose, ce qui est naturel, que la reine Didon voulait conserver une issue sur la mer. A la différence du problème isopérimétrique classique, nous appellerons les problèmes correspondants problèmes de Didon. Pour simplifier, envisageons tout d'abord le cas d'une côte rectiligne (fig. 1).

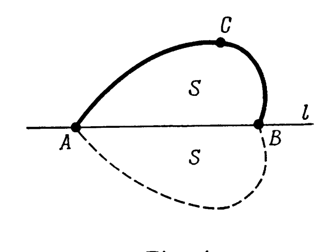


Fig. 1

P r e m i e r p r o b l è m e d e D i d o n. *Parmi toutes les courbes de longueur L contenues dans le demi-plan limité par la droite l à extrémités A, $B \in l$, trouver celle qui limite, avec le segment $[AB]$, la figure d'aire maximum S.*

S o l u t i o n. Soit ACB une courbe admissible quelconque á extrémités A, $B \in l$ qui limite une figure d'aire S (fig. 1). Effectuons une symétrie par rapport à l; nous obtenons alors une courbe fermée de longueur $2L$ qui limite une figure d'aire $2S$. D'après

---

[1]) Une autre situation de la vie réelle qui amène au même problème est décrite par Léon Tolstoï dans le conte *Faut-il beaucoup de terre à un homme.* Une analyse de ce conte du point de vue géométrique est donnée dans le livre de Y. I. Pérelman *Géométrie récréative*, Moscou-Léningrad. Gostekhizdat, 1950, chapitre 12.

l'inégalité isopérimétrique

$$(2L)^2 \geqslant 4\pi 2S, \tag{2}$$

d'où l'on obtient

$$S \leqslant L^2/(2\pi). \tag{3}$$

Par conséquent, la valeur maximale de S peut être seulement $L^2/(2\pi)$, et cette valeur est effectivement atteinte lorsque ACB est le demi-cercle sous-tendu par le diamètre $[AB]$. Le problème possède une solution unique (à translation le long de l près).

C) Dans le problème précédent, la position des extrémités A et B de la courbe cherchée n'était aucunement fixée, sauf qu'il fallait les choisir sur la droite l. Que se passera-t-il si ces extrémités sont fixes?

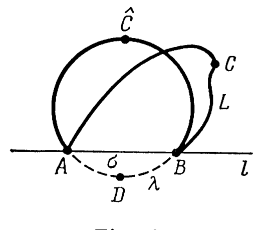


Fig. 2

D e u x i è m e p r o b l è m e d e D i d o n. *Parmi toutes les courbes de longueur L, situées dans le demi-plan limité par la droite l, aux extrémités A, $B \in l$ fixes, trouver celle qui limite avec le segment $[AB]$ la figure d'aire maximale.*

S o l u t i o n. Il est clair que le problème n'a de sens que si L est supérieur à $|AB|$: en effet, autrement il n'y a aucune courbe qui satisfasse aux conditions du problème ou bien (lorsque $L = |AB|$) une telle courbe est unique (c'est le segment $[AB]$ lui-même). Il est naturel de supposer, comme dans le problème précédent, que la solution sera un arc de cercle sous-tendu par la corde $[AB]$. Un tel arc $A\widehat{C}B$ est uniquement déterminé. Ajoutons-y l'arc de cercle complémentaire ADB de manière à obtenir un cercle (fig. 2). Désignons la longueur de l'arc ADB par λ et l'aire du segment de cercle limité par cet arc et par l'intervalle fermé $[AB]$ par σ.

Soit maintenant ACB une courbe quelconque qui satisfait aux conditions du problème et délimite avec $[AB]$ une aire égale à S. La courbe fermée $ACBD$ est de longueur $L + \lambda$ et limite une aire égale à $S + \sigma$. D'après (1), on a

$$4\pi (S + \sigma) \leqslant (L + \lambda)^2,$$

d'où l'on obtient

$$S \leqslant \frac{1}{4\pi} (L + \lambda)^2 - \sigma.$$

De même que dans (1), l'égalité, et donc le maximum de S, sont atteints si et seulement si la courbe $ACBD$ est un cercle, i.e. lorsque les arcs coïncident: $ACB = A\widehat{C}B$.

Notons une différence importante entre les deux problèmes considérés. Dans le premier problème de Didon, la famille des courbes en concurrence est plus grande, puisque la position des points A

et B n'est pas fixe. En fait, sans perte de généralité, on peut supposer que l'un des points, mettons A, est fixe. La position du point B est alors déterminée par la condition supplémentaire suivante: $A\widehat{C}B$ n'est pas seulement un arc de cercle, comme dans le deuxième problème de Didon, mais un demi-cercle. Sous une forme équivalente: en ses extrémités, l'arc coupe la droite l sous un angle de 90°. Nous verrons plus loin qu'il s'agit ici d'un principe général: en laissant une certaine liberté aux extrémités de la courbe cherchée, nous devons postuler des conditions supplémentaires, que l'on appelle *conditions de transversalité.* Quant à la forme des deux courbes dans

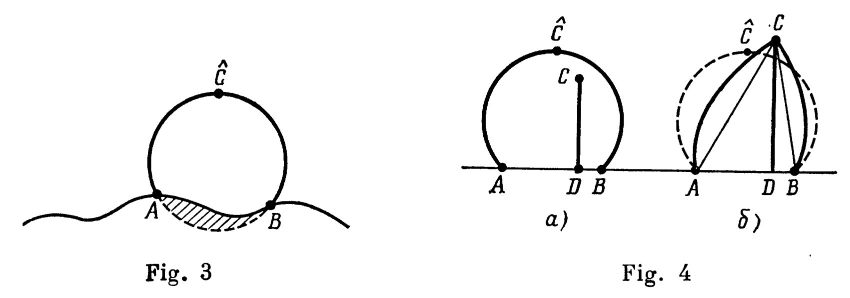


Fig. 3 Fig. 4

ces problèmes, elle est la même et se détermine par une équation (l'*équation d'Euler*), qui doit être satisfaite le long de la courbe. Dans notre cas, la courbe en chacun de ses points doit posséder la même courbure.

D) Voyons maintenant ce qui se passera si la côte de la mer n'est pas rectiligne, en nous limitant au cas des extrémités fixes. On voit facilement que si la côte entre les points A et B ne diffère pas trop d'une droite, la solution sera toujours le même arc de cercle $A\widehat{C}B$ que précédemment.

La démonstration précédente reste en vigueur, sauf que la lettre σ doit maintenant désigner l'aire hachurée sur la figure 3. On voit aussi ce qui se passera dans le cas où il y a un golfe profond entre A et B. Supposons par exemple que la côte entre A et B est rectiligne, mais un canal DC a été creusé à partir du point D, formant un angle droit avec AB. En supposant que la limite de la ville doit être sur terre ferme, nous voyons que la solution du problème sera le même arc $A\widehat{C}B$ tant que le point C est à l'intérieur (fig. 4, *a*). Mais si le canal DC coupe l'arc $A\widehat{C}B$ et l'on a toujours $|AC| + |CB| < L$, alors la solution est la courbe constituée des deux arcs de cercle AC et CB (fig. 4, *b*). Au cas limite $|AC| + |CB| = L$, la solution est la ligne brisée ACB, tandis que pour $|AC| + |CB| > L$ la solution n'existe pas.

La variante de notre problème que nous venons d'envisager peut être appelée *problème de Didon à contraintes de phase.*

E) Envisageons maintenant une dernière variante du problème de Didon. Supposons que pour une raison quelconque (par exemple, à cause de l'interdiction des prêtres d'Eshmoun un temple à l'honneur duquel avait été construit à Byrsa) on n'a pas le droit de construire les murs de la ville sous un angle supérieur à 45° avec la ligne de la côte que nous supposons à nouveau rectiligne. Un tel problème sera alors un *problème de contrôle optimal.* Sa solution peut être

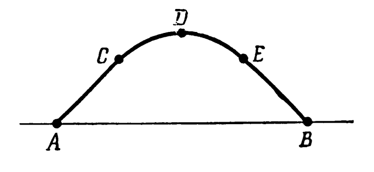


Fig. 5

trouvée à l'aide du *principe du maximum de Pontriaguine* qui sera exposé par la suite. Dans un cas typique, la solution a l'allure représentée sur la figure 5. Les segments AC et BE forment les angles de 45° avec la ligne de la côte, tandis que CDE est un arc de cercle.

1.1.2. Autres anciens problèmes géométriques d'extrémum. Ayant consacré une place suffisante au problème isopérimétrique, nous passons maintenant à l'étude de quelques autres problèmes d'extrémum à contenu géométrique envisagés par les mathématiciens de diverses époques. On trouve de tels problèmes, en particulier, dans les œuvres des grands mathématiciens de l'Antiquité: Euclide, Archimède et Apollonios.

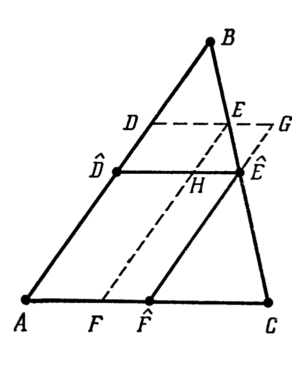


Fig. 6

Dans les *Eléments* d'Euclide (IVe siècle av. J.-C.), nous rencontrons un seul problème de maximum (livre 6, proposition 27). Sous forme plus moderne, on peut l'énoncer de la manière suivante.

P r o b l è m e d'E u c l i d e. *Dans un triangle ABC donné, inscrire un parallélogramme $ADEF$* (fig. 6) *d'aire maximale.*

S o l u t i o n. Le parallélogramme cherché est à sommets $\hat{D}$, $\hat{E}$, $\hat{F}$ situés sur les milieux des côtés correspondants du triangle donné. Ceci peut se démontrer de différentes façons. Par exemple, on montre facilement que les aires des parallélogrammes $\hat{D}DG\hat{E}$ et $FH\hat{E}\hat{F}$ sont les mêmes. D'où l'on déduit que l'aire du parallélogramme $ADEF$ est inférieure à celle du parallélogramme $A\hat{D}\hat{E}\hat{F}$,

car cette dernière est égale à l'aire de la figure *ADGÊHF* qui contient le parallélogramme *ADEF*. ■

Le problème d'Euclide est, bien sûr, très simple. Par contre, les problèmes considérés par Archimède et Apollonios sont beaucoup plus compliqués et intéressants.

Dans les écrits d'Archimède (IIIe siècle av. J.-C.) parvenus jusqu'à nous, le problème isopérimétrique n'est pas mentionné. Nous ne savons pas encore ce qui a été fait par Archimède dans ce domaine et, par conséquent, la phrase de Simplicius citée dans 1.1.1 reste empreinte d'un certain mystère. Mais la solution d'un problème *isopiphane* (i.e. un problème qui se rapporte aux figures d'aires égales) se trouve dans un des travaux d'Archimède *Au sujet de la sphère et du cylindre*. Il y pose et résout *le problème du volume maximal des segments de sphère à aire latérale fixe*.

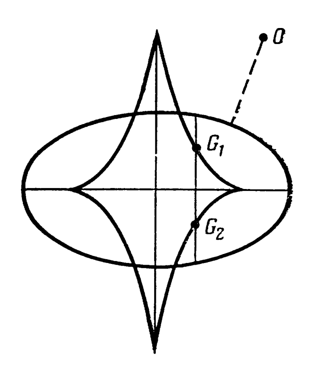


Fig. 7

La réponse à ce problème est la demi-sphère (de même que le demi-cercle était la solution du deuxième problème de Didon).

La plus grande œuvre d'Apollonios (IIIe-IIe siècles av. J.-C.) fut son traité *Coniques* ou *Sections coniques*. Le cinquième livre des *Sections coniques* se rapporte à notre thème. Voici ce qu'écrit Van der Waerden: Apollonios avait proposé « le problème de recherche du segment de droite le plus long et le plus court qui joint le point donné O à une section conique donnée. En fait, il donne plus qu'il ne promet. Il détermine t o u t e s les droites qui passent par O et coupent la conique sous un angle droit (aujourd'hui ces droites sont appelées normales) et analyse pour quelles positions de O le problème possède 2, 3 ou 4 solutions. » En déplaçant le point O, il « détermine l'ordonnée des points frontières G_1 et G_2 où le nombre des normales passant par O change de 2 à 4 et inversement » [1]) (fig. 7).

Après la destruction de la civilisation antique, l'activité scientifique en Europe se met en veilleuse jusqu'à la fin du XVe siècle. Le XVIe siècle est marqué par le développement de l'algèbre et l'apparition des premiers problèmes d'extrémum à contenu algébrique.

Voici, par exemple, un problème proposé par N. Tartaglia (XVIe s.): *diviser le nombre 8 en deux parties de sorte que le produit du produit de ces parties par leur différence soit maximal.*

---

[1]) Van der Waerden B. L. *La science en éclosion*. Moscou, Phizmatguiz, 1959.

Avant le XVIIe siècle, aucun principe général pour la résolution des problèmes d'extrémum n'avait été développé, et chacun de ces problèmes se résolvait par une méthode spéciale. En 1615, Kepler publia son livre *Nouvelle stéréométrie des tonneaux de vin* [1]. Kepler commence son livre par les mots suivants: « L'année où je me suis marié, les vendanges donnèrent une bonne récolte et le vin était bon marché; étant un bon maître de maison, il me fallait faire des réserves de vin. J'en achetais plusieurs tonneaux. Après un certain

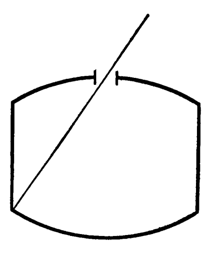


Fig. 8

temps, le commerçant qui me les vendit vint pour mesurer la capacité des tonneaux afin de me communiquer le prix du vin. Pour cela, il faisait pénétrer dans chaque tonneau une barre métallique et, sans aucune forme de calcul, nommait immédiatement le contenu en vin de ce tonneau. » (Cette « méthode » est illustrée par la figure 8.)

Kepler fut très surpris. Il lui semblait étrange qu'il fût possible d'effectuer, grâce à une seule mesure, le calcul de la capacité de tonneaux de formes différentes. « Il m'a semblé approprié, écrit Kepler, de choisir pour nouvel objet d'étude mathématique les lois géométriques d'un système de mesure si commode, et d'en clarifier les fondements. » Pour résoudre le problème ainsi posé, Kepler fut amené à décrire les bases du calcul intégral et différentiel et, en même temps, à donner les premières règles générales pour la résolution des problèmes d'extrémum. Il écrit [2]: « Sous l'influence d'un bon génie, qui était sans doute tout aussi bon géomètre, les tonneliers donnaient à leurs ouvrages une forme telle que la longueur de la barre, mesurée dans le tonneau, puisse déterminer la capacité maximale de celui-ci; et, puisque *auprès de tout point de maximum les variations sont peu perceptibles*, les erreurs dues au hasard n'exercent pas d'influence notable sur la capacité. »

---

[1]) Kepler J. *Nouvelle stéréométrie des tonneaux de vin.* Moscou-Léningrad, 1935.

[2]) Predtetchenski E. A. *Kepler, sa vie et son activité scientifique.* Pétrograd, Editions Z.I. Grzebine, 1921.

Les mots mis en italique dans la citation ci-dessus touchent au principe fondamental de la recherche de l'extrémum ; ce principe fut par la suite transformé en théorème, d'abord (pour les polynômes) par Fermat (1629) et ensuite par Newton et Leibnitz ; on l'appelle aujourd'hui *théorème de Fermat.*

Notons en passant que Kepler trouva la solution de plusieurs problèmes d'extrémum concrets, en particulier du problème *du cylindre de plus grand volume inscrit dans une sphère.*

Pour conclure ce sous-paragraphe, envisageons encore un problème géométrique, qui avait intéressé plusieurs mathématiciens du XVIIe siècle (Cavalieri, Viviani, Torricelli, Fermat, etc.). Au XIXe siècle ce problème fut étudié par le géomètre allemand Steiner, et on l'appelle souvent *problème de Steiner* [1]).

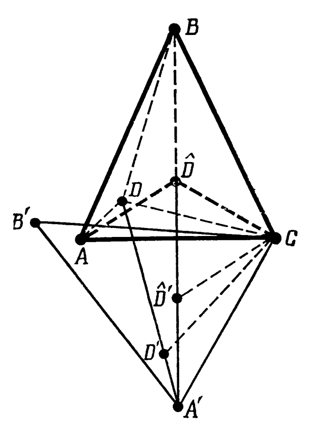


Fig. 9

Problème de Steiner. *Trouver le point, situé dans le plan d'un triangle, pour lequel la somme des distances aux trois sommets est minimale.*

Solution. Nous donnerons une solution géométrique élégante, valable pour les triangles à angles aigus. Dans le triangle ABC (fig. 9), supposons que l'angle C est supérieur ou égal à 60°. Effectuons une rotation du triangle ABC d'un angle de 60° autour du point C. Nous obtiendrons le triangle $A'B'C'$. Choisissons maintenant un point quelconque D dans le triangle ABC et désignons par D' l'image de D par notre rotation. Alors la somme des longueurs $|AD| + |BD| + |CD|$ est égale à la longueur de la ligne brisée $|BD| + |DD'| + |D'A'|$, puisque le triangle CDD' est équilatéral et $|D'A'| = |DA|$.

Supposons maintenant que $\hat{D}$ est le *point de Torricelli,* i.e. le point à partir duquel tous les côtés du triangle se voient sous un angle de 120°, et $\hat{D}'$ est l'image de $\hat{D}$ par la rotation. On voit alors facilement que les points B, $\hat{D}$, $\hat{D}'$ et A' sont situés sur une même droite, de sorte que le point de Torricelli est la solution du problème. ■

Nous avons montré au lecteur quelques problèmes d'extrémum à contenu géométrique posés et résolus à diverses époques. Leur choix est à peine motivé par des considérations pratiques : nous avons surtout cherché à montrer la beauté de la géométrie elle-même.

[1]) Remarquons en même temps que des problèmes analogues apparurent par la suite dans la construction des routes, des pipe-lines et des canalisations urbaines.

1.1.3. Principe variationnel de Fermat et principe de Huygens. Le problème de réfraction de la lumière. L'énoncé du premier principe variationnel pour les problèmes de physique est lié au nom de Fermat. Il s'agit du *principe variationnel de Fermat en optique géométrique.* La loi de réfraction de la lumière fut établie expérimentalement par Snellius. Peu après, Descartes donna une explication théorique de cette loi. D'après Descartes, il s'ensuivait que, dans un milieu plus dense (mettons dans l'eau), la vitesse de propagation de la lumière serait supérieure à celle dans un milieu moins dense (par exemple, dans l'air). Cette idée sembla douteuse à plusieurs contemporains de Descartes.

Fermat trouva une autre explication du phénomène. Son idée maîtresse fut la suivante: tout rayon de lumière « choisit » la trajectoire le long de laquelle le temps nécessaire pour passer d'un point à un autre est minimal (par rapport aux autres trajectoires qui joignent les mêmes points). Pour un milieu homogène, dans lequel la vitesse de propagation de la lumière en tous les points et dans toutes les directions est la même, le temps nécessaire pour passer le long d'une certaine trajectoire est proportionnel à sa longueur. Par conséquent, la trajectoire à temps minimal joignant les points A et B est simplement le segment de droite $[AB]$: dans un milieu homogène la lumière se propage en ligne droite.

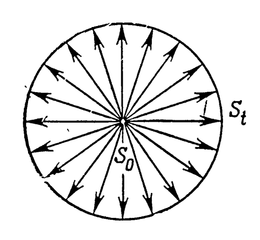


Fig. 10

La démonstration de la loi de réfraction de Snellius à partir du principe variationnel de Fermat est aujourd'hui exposée dans les manuels scolaires (voir également 1.6.1).

Le principe de Fermat est basé sur l'idée que la lumière se propage suivant certaines courbes. Huygens (1629-1695) trouva une autre explication des lois de propagation et de réfraction de la lumière, basée sur l'idée que la lumière est une onde dont le front se déplace dans le temps.

En s'abstrayant de l'analyse des fondements physiques de cette idée et, en particulier, de la question de la nature même de la lumière: onde ou faisceau de particules, nous donnerons la définition suivante, plus illustrative que rigoureuse.

On appelle *front d'onde* S_t l'ensemble des points qui sont atteints au moment t par la lumière propagée par la source S_0.

Si, par exemple, la source S_0 est ponctuelle et le milieu est homogène, S_t est une sphère (« onde sphérique ») de rayon vt et de centre S_0 (fig. 10). Lorsque t augmente, le front d'onde s'élargit uniformément dans toutes les directions à la vitesse v. Les lignes de propagation de la lumière forment un faisceau de rayons orthogonaux à S_t à chaque moment t. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source,

l'onde sphérique devient de plus en plus plane et, si l'on s'imagine la source éloignée à l'infini, le front d'onde à la limite sera un plan qui se déplace uniformément à la vitesse v, tout en restant perpendiculaire au faisceau de rayons de lumière, qui sont maintenant parallèles entre eux (fig. 11).

Pour déterminer le mouvement du front d'onde dans des situations plus complexes, Huygens se servait de la règle suivante (*principe de Huygens*). Chaque point du front d'onde S_t peut être considéré comme une source secondaire et, dans un temps Δt, nous obtiendrons une famille de fronts d'onde, engendrée par toutes ces sources

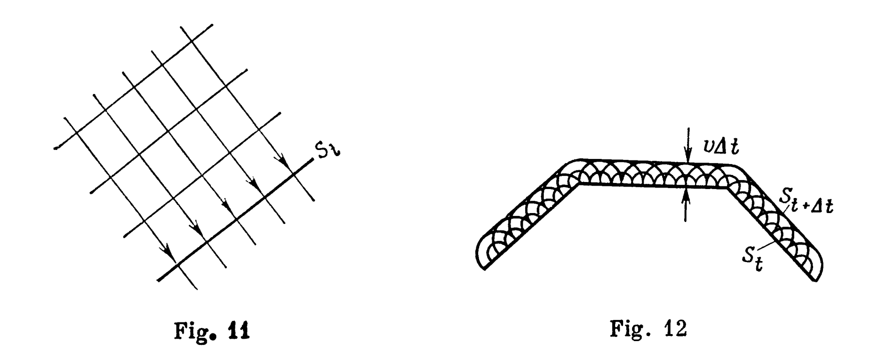


Fig. 11

Fig. 12

secondaires, le front d'onde réel $S_{t+\Delta t}$ au moment $t + \Delta t$ étant l'enveloppe de toute cette famille (fig. 12).

On voit facilement que la propagation de la lumière à partir d'une source ponctuelle dans un milieu homogène et le cas limite d'une onde plane vérifient le principe de Huygens. En guise d'illustration du principe de Huygens, appliquons-le pour déduire la loi de Snellius (dans le cas du milieu non homogène le plus simple) « d'après Huygens ».

Supposons qu'un faisceau de rayons lumineux parallèles tombe sur la frontière plane Σ qui délimite deux milieux homogènes; pour simplifier, imaginons que Σ est horizontale, la lumière tombant d'en haut (fig. 13). D'après des considérations de symétrie évidentes, il suffit de considérer ce qui se passe dans un plan perpendiculaire á Σ et parallèle au faisceau envisagé. Désignons par v_1 et v_2 les vitesses de propagation de la lumière au-dessus et au-dessous de Σ et par α_1 et α_2 les angles d'incidence et de réfraction (mesurés à partir de la normale N à Σ). Le front d'onde A_1A_2A se déplace à la vitesse v_1 et, à un certain moment t, la lumière issue du point A atteint la frontière Σ au point B. Le point B devient alors source secondaire d'ondes sphériques qui se propagent dans le milieu inférieur à la vitesse v_2. La lumière atteint le point C_1 au moment

$t_1 = t + \frac{|B_1C_1|}{v_1} = t + |BC_1| \frac{\sin\alpha_1}{v_1}$ et arrive au point intermédiaire $D \in [BC_1]$ au moment $t_2 = t + |BD| \frac{\sin\alpha_1}{v_1}$. Au moment

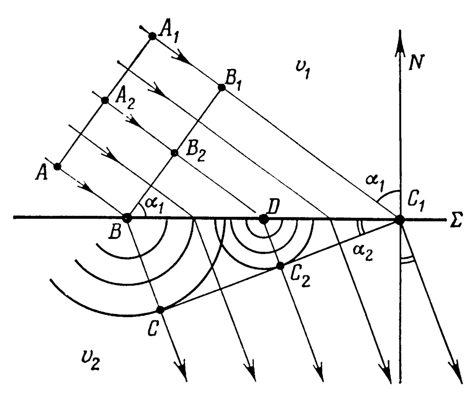


Fig. 13

t_1, l'onde sphérique issue de la source secondaire B aura pour rayon

$$r_1 = v_2(t_1 - t) = |BC_1| \frac{v_2}{v_1} \sin\alpha_1$$

et l'onde issue de D

$$r_2 = v_2(t_1 - t_2) = |DC_1| \frac{v_2}{v_1} \sin\alpha_1.$$

Les tangentes C_1C et C_1C_2 à ces sphères coïncident, puisque

$$\sin\widehat{BC_1C} = \frac{r_1}{|BC_1|} = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1 = \frac{r_2}{|DC_1|} = \sin\widehat{DC_1C_2}.$$

Le point D avait été choisi sur BC_1 de manière arbitraire et par conséquent les ondes secondaires au moment t_1 ont pour enveloppe la droite CC_1 qui forme avec Σ un angle α_2 tel que $\sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1$. Mais c'est là justement la loi de Snellius

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Les principes de Huygens et de Fermat sont intimement liés. En effet, supposons connue la position du front d'onde S_t à un certain moment t. Où sera-t-il dans un intervalle de temps Δt? Prenons un point $C \in S_{t+\Delta t}$ (fig. 14). Par définition, il existe un point $A \in S_0$ et un chemin AC effectué par la lumière au temps $t + \Delta t$ et, d'après

le principe de Fermat, tout autre chemin de A à C nécessite plus de temps. Par continuité, on peut trouver un point B sur l'arc AC tel que la lumière va de A à B dans le temps t et de B à C dans le temps Δt. Puisque l'arc AC possède la propriété d'être minimal, les deux arcs AB et BC doivent posséder cette même propriété. En effet, s'il existait, par exemple, un chemin le long duquel la lumière pouvait aller de A à B en un temps inférieur à t, alors, en prolongeant ce chemin par l'arc BC, nous aurions obtenu un chemin de A à C effectué par la lumière en un temps inférieur à $t+\Delta t$, ce qui est impossible. D'où l'on déduit d'abord que $B \in S_t$ et ensuite que le point C appartient au front d'onde correspondant à la source ponctuelle lumineuse située au point B et à l'instant Δt. Ceci s'accorde parfaitement avec le principe de Huygens: le point B est devenu une source secondaire et l'onde qui se propage à partir de ce point arrive au point C au moment Δt. L'idée du front d'onde, le principe de Huygens et le raisonnement dont nous avons donné ici un aperçu furent le fondement de la future *théorie de Hamilton-Jacobi* et plus tard, au milieu de notre siècle, de la théorie appelée *théorie de programmation dynamique*; cette dernière est un instrument particulièrement important de résolution des problèmes pratiques d'extrémum.

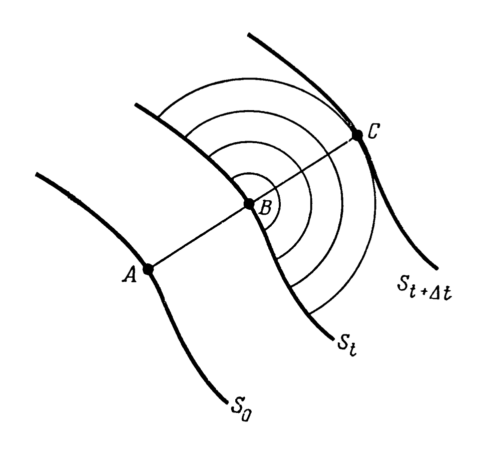


Fig. 14

* * *

A la suite du principe variationnel de Fermat, plusieurs autres principes variationnels furent découverts, d'abord en mécanique, et ensuite en physique. La majorité des chercheurs en vinrent à croire que la nature « choisit » toujours le mouvement de manière à résoudre un problème d'extrémum. Ici la citation suivante, due à Euler, est appropriée: « Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum. » A une époque plus récente, Siegel disait avec humour: « D'après Leibnitz, notre monde est le meilleur des mondes possibles, par conséquent toutes les lois se décrivent par des principes d'extrémum. »

1.1.4. Problème du brachistochrone. Les débuts du calcul des variations. En 1696, apparut un article de Bernoulli au titre intri-

guant: *Problema novum, ad cujus solutionem mathematici invitantur* (*Nouveau problème, à la résolution duquel les mathématiciens sont invités*). Le problème en question était le suivant: « On donne les

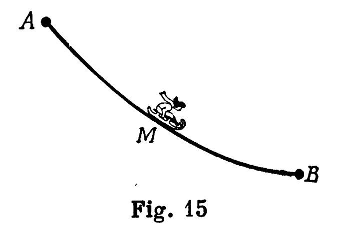


Fig. 15

points A et B dans un plan vertical (fig. 15). Déterminer le chemin AMB suivant lequel un corps M entraîné par son poids effectuera le trajet de A à B en temps minimal » [1]).

La résolution de ce problème, « si beau et jusqu'à présent inconnu », d'après Leibnitz, fut donnée par Jean Bernoulli lui-même, par Leibnitz, par Jacques Bernoulli et encore par un autre auteur anonyme dans lequel les spécialistes reconnurent Newton « ex unge leonem » (d'après la griffe du lion), selon une expression de Bernoulli. La courbe de descente en temps minimal ou brachistochrone s'avéra être la cycloïde. La solution de Leibnitz était basée sur l'approximation des courbes par des lignes brisées. Développée par la suite dans les travaux d'Euler, cette idée fut à la base des méthodes directes du calcul des variations. La remarquable solution de Jacques Bernoulli se fondait sur le principe de Huygens et l'idée du front d'onde. Néanmoins, ce fut la solution de l'auteur du problème qui jouit de la plus grande popularité. C'est cette solution que nous proposons ci-dessous.

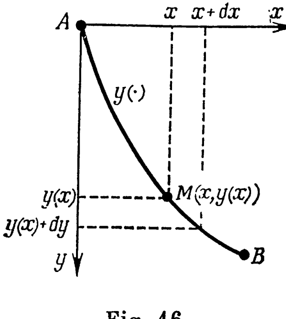


Fig. 16

Introduisons dans le plan un système de coordonnées (x, y) en prenant l'axe des x horizontal et en dirigeant l'axe des y vers le bas. D'après la loi de Galilée, la vitesse du corps M au point aux coordonnées $(x, y(x))$ (si le corps descend sans frottement le long de la courbe $y(\cdot)$, voir fig. 16) ne dépend pas de la forme de la courbe $y(\cdot)$ entre les points A et $(x, y(x))$ et dépend seulement de l'ordon-

[1]) Il n'est peut-être pas superflu de rappeler que des idées pas trop éloignées du problème du brachistochrone se trouvent dans les *Discorsi* de Galilée. Celui-ci y démontre qu'en se déplaçant le long d'une corde un corps atteindra son extrémité p l u s t a r d que s'il se déplace le long de l'arc de cercle soutenu par cette corde.

née $y(x)$; elle est égale à $\sqrt{2gy(x)}$, où g est l'accélération de la pesanteur. Il faut alors trouver le temps minimum nécessaire pour effectuer le chemin de A à B, i.e. il faut minimiser l'intégrale

$$T=\int\limits_{\smile AB}\frac{ds}{v}=\int\limits_{\smile AB}\frac{ds}{\sqrt{2gy(x)}},$$

où ds est la différentielle de la longueur d'arc.

Mais, en vertu du principe de Fermat (voir 1.1.3), on obtient exactement le même problème en étudiant la trajectoire de la lumière dans un milieu non homogène (de dimension deux) lorsque la vitesse au point (x, y) est égale à $\sqrt{2gy}$. Alors Bernoulli divise le milieu en minces couches parallèles dans lesquelles il suppose la vitesse constante et égale à v_i, $i = 1, 2, \ldots$ (fig. 17). D'après la loi de Snellius, on obtient

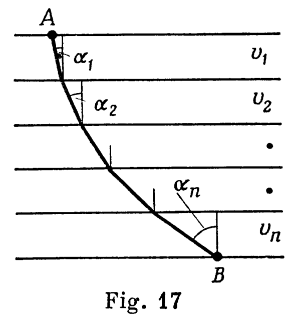


Fig. 17

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}=\ldots\Longleftrightarrow\frac{\sin\alpha_i}{v_i}=\text{const},$$

où les α_i sont les angles d'incidence du rayon. En passant à la limite lorsque l'épaisseur des couches tend vers zéro (il est bien entendu que Bernoulli ne se préoccupe aucunement de la légitimité de cette procédure), on obtient

$$\frac{\sin\alpha(x)}{v(x)}=\text{Cte},$$

où $v(x)=\sqrt{2gy(x)}$, tandis que $\alpha(x)$ est l'angle entre la tangente à la courbe $y(\cdot)$ au point $(x, y(x))$ et l'axe Oy, i. e. $\sin\alpha(x)=$ $=1/\sqrt{1+(y'(x))^2}$. Ainsi, l'équation du brachistochrone sera

$$\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}=C\Longleftrightarrow y'=\sqrt{\frac{C-y}{y}}\Longleftrightarrow\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{C-y}}=dx.$$

Intégrant cette équation $\left(\text{à l'aide de la substitution } y=C\sin^2\frac{t}{2},\right.$ $\left.dx=C\sin^2\frac{t}{2}\,dt\right)$, on obtient l'équation de la cycloïde

$$x=C_1+\frac{C}{2}(t-\sin t),\quad y=\frac{C}{2}(1-\cos t).$$

Notons la différence entre le problème d'Euclide-Kepler (sur le cylindre inscrit) et, mettons, le problème du brachistochrone. L'ensemble de tous les parallélogrammes inscrits dans le triangle et l'ensemble de tous les cylindres inscrits dans la sphère dépendent

d'un *seul* paramètre. Ainsi, dans ces problèmes, il s'agit de trouver l'extrémum d'une fonction *d'une seule variable*. Par contre, dans le problème du brachistochrone, l'ensemble de toutes les courbes qui joignent deux points est *de dimension infinie*. Ici il s'agit de trouver l'extrémum d'une fonction *d'un nombre infini de variables*. Dans l'histoire, les mathématiques ont effectué un bond inattendu de la dimension 1 directement à l'infini, de la théorie des extrémums d'une fonction d'une variable à la théorie des problèmes tels que celui du brachistochrone, i.e. au *calcul des variations* (comme cette branche des mathématiques fut appelée au XVIIIe siècle).

Peu après les travaux de Jean Bernoulli, de nombreux problèmes semblables à celui du brachistochrone furent résolus: celui des courbes les plus courtes sur une surface, celui de l'équilibre d'un fil massif, etc.

On affirme généralement que l'année de naissance du calcul des variations était 1696, l'année du brachistochrone. Néanmoins cette affirmation n'est pas tout à fait exacte, comme nous le verrons dans le sous-paragraphe suivant.

1.1.5. Problème aérodynamique de Newton. En 1687, les *Principes mathématiques de philosophie naturelle* de Newton furent publiés. Dans la septième partie, intitulée *Sur le mouvement des liquides et leur résistance aux corps lancés*, Newton considère le problème de la résistance au mouvement d'une sphère ou d'un cylindre d'un milieu raréfié [1]). Ensuite dans les *Commentaires* Newton étudie la question de la résistance au mouvement d'un cône tronqué qui se déplace dans le même milieu raréfié. En particulier, il découvre que parmi tous les cônes de même largeur et de même hauteur la plus petite résistance se manifeste pour un cône d'angle 135°. Newton remarque en passant que ce résultat « n'est peut-être pas inutile dans la construction des navires »; il écrit: « Quod si figura $DNFG$ ejusmodi sit ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, et dicatur recta GP quae parallela sit rectae figuram tangenti in N, et axem productam sicet in P, fuerit MN ad GP ut GP^{cub} ad $4BP \times GB^q$, solidum quod figurae hujus revolutione circa axem AB describitur resistetur minime omnium ejusdem longitudinis & latitudinis. »

Ce texte de Newton peut être traduit de la manière suivante: « Lorsque la courbe $DNFG$ sera telle que si l'on abaisse à partir d'un quelconque de ses points N la perpendiculaire sur l'axe AB et l'on construit [à partir du point G] la droite GP parallèle à la tangente à la courbe au point N qui coupe l'axe au point P, [obtenant la proportion] $MN : GP = GP^3 : (4BP \times GB^2)$, alors le corps

[1]) Voir proposition 34, théorème 28 dans le livre de A. N. Krylov *Travaux choisis*, volume 7. Moscou-Léningrad, Editions de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., 1936.

obtenu par rotation de cette courbe autour de l'axe AB subira la plus petite résistance dans le milieu raréfié mentionné ci-dessus parmi tous les corps de même longueur et de même largeur » (voir la figure 18, due à Newton). Newton n'expliqua pas comment il avait obtenu sa solution. Plus tard il communiqua à ses commentateurs une esquisse de démonstration, mais celle-ci fut publiée seulement en 1727-1729, lorsque la première étape du développement du calcul des variations était déjà terminée. Des notes préliminaires de Newton, publiées seulement de nos jours, montrent qu'il connaissait déjà les éléments de plusieurs constructions effectuées ensuite par Euler et Lagrange. Nous verrons par la suite que le problème de Newton doit être rapporté non pas au calcul des variations proprement dit, mais plutôt à la théorie de la commande optimale, dont les débuts se rapportent aux années 50 de notre siècle.

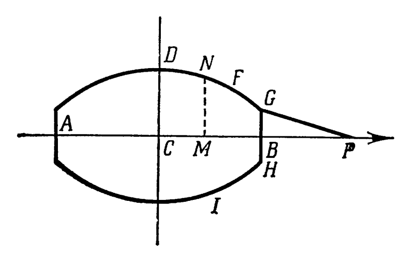


Fig. 18

1.1.6. Problèmes de rationnement et de transport. Supposons que des réserves d'un certain produit sont stoquées dans plusieurs entrepôts et que ce produit doit être acheminé dans plusieurs magasins. Le coût du transport d'une unité de produit de chaque entrepôt à chaque magasin est connu, et l'on sait la quantité de produits qui doit être amenée dans chaque magasin. Le *problème de transport* consiste à trouver un plan de transport optimal dans cette situation, i.e. à indiquer quelle quantité du produit donné il faut transporter de chaque entrepôt à chaque magasin, de sorte que le coût total de transport soit minimal. Un problème analogue, le *problème de rationnement*, est le suivant: pour un assortiment d'aliments donnés, la contenance de matières nutritives dans chacun d'eux et le coût d'une unité de chaque aliment étant donnés, constituer une ration qui satisfasse à des conditions appropriées pour un coût minimal.

Des problèmes de ce genre apparaissent très souvent dans l'économie concrète. Les deux problèmes mentionnés ci-dessus se rapportent à la *programmation linéaire*. La théorie de la programmation linéaire fut construite assez récemment: dans les années 40 et 50 de notre siècle.

1.1.7. Problème de temps minimum. Nous donnons ici l'exemple le plus simple d'un problème extrémal à contenu « technique ». Imaginons un wagonnet qui se déplace en mouvement rectiligne sans frottement sur des rails horizontaux. Le wagonnet est com-

mandé par une force motrice extérieure que l'on peut faire varier dans des limites bien définies. Il s'agit d'arrêter le wagonnet dans une position déterminée en temps minimal. Ce problème est appelé par la suite *problème élémentaire de temps minimum.*

Une particularité importante des problèmes d'extrémum techniques consiste en ce que les forces en question se divisent en deux types. L'un d'eux concerne les forces de la nature (mettons, la force gravitationnelle), l'autre (mettons, la force de traction) est commandé par l'homme. Il est naturel qu'apparaissent alors des contraintes sur les forces commandées, liées aux possibilités techniques.

La théorie de la résolution des problèmes de ce type fut construite encore plus tard, à la fin des années 50. On l'appelle *théorie de la commande optimale.*

* * *

D'où proviennent donc les problèmes d'extrémum? A l'aide des exemples ci-dessus, nous avons essayé de montrer qu'il y a beaucoup de réponses à cette question. Les problèmes d'extrémum proviennent aussi bien des sciences naturelles que de l'économie et de la technique, ou apparaissent à cause des besoins internes des mathématiques elles-mêmes. Par suite, la théorie des problèmes d'extrémum et son aspect pratique — la théorie de l'optimisation — sont devenus particulièrement populaires de nos jours.

§ 1.2. Comment formaliser un problème d'extrémum ?

1.2.1. Définitions fondamentales. Chacun des problèmes du paragraphe 1.1 avait été énoncé en termes concrets, qui se rapportaient au domaine en question. En général, les problèmes d'extrémum se posent justement de cette manière, et il n'est pas toujours nécessaire de résoudre chaque problème par des méthodes analytiques. Par exemple, nous avons donné des solutions purement géométriques des problèmes d'Euclide et de Steiner. Néanmoins, si nous désirons quand même profiter des avantages de la méthode analytique, il faut tout d'abord traduire le problème de la langue « concrète » à la langue formelle de l'analyse. Cette traduction sera appelée *formalisation.*

Un problème d'extrémum bien posé comprend les éléments suivants: une *fonctionnelle* [1] $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ définie sur un certain ensemble X et une *contrainte*, i.e. un sous-ensemble $C \subseteq X$. (Par $\overline{\mathbf{R}}$ nous désignons la droite réelle augmentée, i.e. l'ensemble de tous les nombres réels auxquels on a ajouté les valeurs $-\infty$ et $+\infty$.) L'en-

---

[1] Dans la théorie des problèmes d'extrémum, les fonctions numériques sont souvent appelées *fonctionnelles.*

semble X est souvent appelé *classe d'éléments admissibles*, tandis que les points $x \in C$ sont *admissibles pour la contrainte.* Alors le problème lui-même s'énonce de la manière suivante : *trouver l'extrémum* (i.e. la borne inférieure ou supérieure) *de la fonctionnelle* f *sous condition que* $x \in C$. Pour ce même problème, nous nous servirons de la notation standard suivante

$$f(x) \to \inf (\sup); \quad x \in C. \tag{1}$$

Ainsi, pour obtenir un problème précisément posé, il faut décrire X, f et C.

Lorsque $X = C$, le problème (1) est appelé *problème sans contraintes.* Un point $\hat{x}$ sera appelé *solution du problème* (1), *minimale* (respectivement *maximale*) ou *minimum* (*maximum*) *absolu* lorsque $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ (respectivement $f(x) \leqslant f(\hat{x})$) pour tous les $x \in C$. En général, tous les problèmes seront envisagés comme problèmes de minimisation ; on remplace le problème $f(x) \to \sup$, $x \in C$, par le problème $\tilde{f}(x) \to \inf$, $x \in C$, où $\tilde{f}(x) = -f(x)$. Dans les cas où nous voulons souligner que le choix entre les problèmes de minimisation et de maximisation nous est indifférent, nous écrirons $f(x) \to$ extr.

En outre, l'ensemble X sera généralement muni d'une *topologie*, i.e. on sait ce qu'est la proximité des éléments. Ceci s'effectue, par exemple, en choisissant dans X une famille de voisinages (comme on le fait toujours dans $\mathbf{R}^n$ ou dans un espace normé). Si X est un espace topologique, le point $\hat{x}$ est appelé *minimum local* lorsqu'il existe un voisinage U du point $\hat{x}$ tel que $\hat{x}$ est la solution du problème $f(x) \to \inf$, $x \in C \cap U$. On définit d'une manière analogue le *maximum local.*

1.2.2. Premiers exemples de formalisation des problèmes d'extrémum. Nous effectuons ici la formalisation de plusieurs problèmes du § 1.1. Commençons par le problème d'Euclide (voir 1.1.2, fig. 6). De la similitude des triangles DBE et ABC, nous obtenons $h(x)/H = x/b$. Ici x est le côté $|AF|$ du parallélogramme $ADEF$, H est la hauteur du triangle ABC, $h(x)$ est la hauteur de $\triangle BDE$ et $b = |AC|$ est la longueur du côté AC. L'aire du parallélogramme $ADEF$ est égale à $(H - h(x))\, x = H(b - x)\, x/b$. Nous obtenons ainsi la formalisation suivante du problème d'Euclide :

$$\frac{H(b-x)\,x}{b} \to \sup, \quad 0 \leqslant x \leqslant b, \quad \Leftrightarrow x(x-b) \to \inf, \quad x \in [0, b]. \tag{1}$$

Les trois éléments qui constituent toute formalisation sont ici les suivants :

$$X = \mathbf{R}, \quad f = H(b - x)\, x/b, \quad C = [0, b].$$

Formalisons maintenant le problème d'Archimède sur les segments de sphère isopiphanes (voir 1.1.2). Soit h la hauteur du segment sphérique et R le rayon de la sphère. Le volume du segment sphérique, comme on le sait d'après un cours de géométrie, est égal à $\pi h^2 (R - h/3)$, tandis que son aire est de $2\pi Rh$. D'où l'on déduit que le problème d'Archimède peut être énoncé de deux manières:

$$\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \to \sup, \quad 2\pi Rh = a, \quad R \geqslant 0, \quad 2R \geqslant h \geqslant 0, \tag{2}$$

où, en éliminant R de la fonctionnelle dans (2),

$$\frac{ha}{2} - \frac{\pi h^3}{3} \to \sup, \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{\frac{a}{\pi}} \tag{2'}$$

(la dernière inégalité découle du fait que $h \leqslant 2R \Rightarrow a \geqslant \pi h^2$). Dans le premier cas $X = \mathbf{R}^2_+$, $f = \pi h^2 (R - h/3)$, $C = \{(R, h) \mid 2\pi Rh = a, 2R \geqslant h\}$. Dans le deuxième, en posant $X = [0, \sqrt{a/\pi}]$, nous obtenons un problème sans contraintes avec la fonctionnelle $f = ha/2 - \pi h^3/3$.

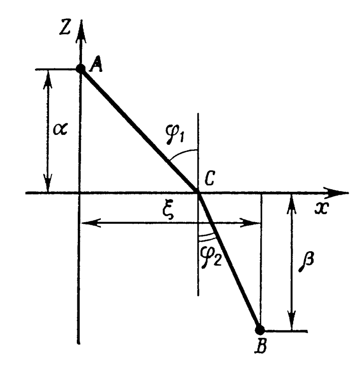


Fig. 19

Le problème de Kepler concernant le cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère (voir 1.1.2) possède la formalisation évidente ci-dessous:

$$2\pi x (1 - x^2) \to \sup; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad (X = \mathbf{R}, \ C = [0, 1]). \tag{3}$$

Ici la sphère est de rayon un, tandis que x est la demi-hauteur du cylindre.

La question de la réfraction de la lumière à la frontière de deux milieux homogènes, résolue à l'aide du principe variationnel de Fermat (voir 1.1.3, fig. 19), se réduit au problème suivant. Supposons que les deux milieux homogènes sont séparés par le plan $z = 0$, la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu d'en haut étant égale à v_1, et celle dans le milieu d'en bas à v_2. Nous cherchons la trajectoire d'un rayon qui va du point $A = (0, 0, \alpha)$, $\alpha > 0$, au point $B = (\xi, 0, -\beta)$, $\beta > 0$. D'après des considérations de symétrie évidentes, le rayon sera contenu dans le plan $y = 0$. Soit $C = (x, 0, 0)$ le point de réfraction du rayon. Alors le temps que met le rayon pour se propager de A à B est égal à

$$T(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\xi - x)^2}}{v_2}.$$

D'après le principe de Fermat, la coordonnée du point cherché $\hat{x}$ (où doit s'effectuer la réfraction) est la solution du problème suivant

$$T(x)=\frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{\beta^2+(\xi-x)^2}}{v_2}\to\inf \quad (X=C=\mathbf{R}). \tag{4}$$

Remarquons que nous avons obtenu ici un problème sans contraintes.

Le problème sans contraintes ci-dessous est analogue

$$|x-\xi_1|+|x-\xi_2|+|x-\xi_3|\to\inf \tag{5}$$

(où $X = C = \mathbf{R}^2$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points donnés du plan $\mathbf{R}^2$, $|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$): c'est la formalisation du problème de Steiner (voir 1.1.2). Notons une particularité très importante de la fonctionnelle dans le problème (5): elle est convexe, mais non partout différentiable.

Le problème d'Apollonios sur la plus courte distance du point $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ à l'ellipse déterminée par l'équation $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ possède, évidemment, la formalisation suivante

$$(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2\to\inf,\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1 \tag{6}$$

$$\left(X=\mathbf{R}^2,\quad C=\left\{x\,\middle|\,\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1\right\}\right).$$

Ainsi, nous nous sommes familiarisés avec la formalisation des problèmes les plus simples. La formalisation des problèmes plus complexes qui apparaissent dans les sciences naturelles, la technique ou l'économie est en général un problème en soi, souvent peu trivial. Dans ces cas, la formalisation dépend des hypothèses, physiques ou autres. Dans le sous-paragraphe suivant nous le montrerons sur l'exemple du problème de Newton.

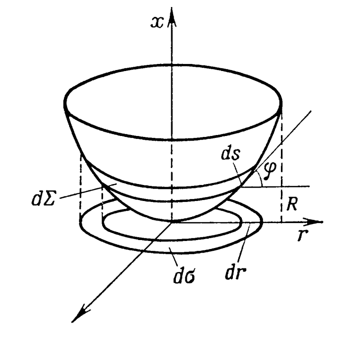


Fig. 20

1.2.3. Formalisation du problème de Newton. La formalisation de ce problème dépend, évidemment, des lois de la résistance du milieu. Newton s'imaginait un milieu (qu'il appelait raréfié) constitué de particules immobiles de masse fixe m, envisagés comme boules élastiques. Nous accepterons également cette hypothèse.

Supposons que le corps de révolution autour de l'axe des x (fig. 20) se déplace en direction opposée à celle de l'axe des x (vers

le bas) dans le milieu raréfié de Newton décrit ci-dessus, à la vitesse v. L'élément dr sur l'axe r décrit autour de l'axe des x un anneau d'aire $d\sigma = 2\pi r\, dr$ et à cet anneau correspond la ceinture $d\Sigma$ sur le corps de révolution lui-même. Dans l'intervalle de temps dt cette ceinture balayera un volume égal à $dV = 2\pi r\, dr\, v\, dt$. Supposons que ρ est la densité du milieu. Alors le nombre de particules qui entrent en contact avec la ceinture est égal à

$$N = \frac{\rho}{m}\, dV = \frac{\rho\, 2\pi r\, dr\, v}{m}\, dt,$$

où m est la masse d'une particule. Calculons la force dF qui agit sur la ceinture $d\Sigma$ pendant le temps dt. Supposons que ds forme l'angle φ avec l'axe r. Effectuant une réflexion sur $d\Sigma$, une particule obtient une augmentation de son impulsion égale à $m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = -2mv \cos \varphi \cdot \mathbf{n}$, où $v = |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$, $\mathbf{n}$ est le vecteur unité normal à $d\Sigma$ et $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dx}{dr}$ est l'angle que ds fait avec l'horizontale. D'après la troisième loi de Newton, le corps obtiendra une augmentation opposée d'impulsion égale à $m\, 2v \cos \varphi \cdot \mathbf{n}$ et, dans l'espace de temps dt, il y aura N telles augmentations ; d'après des considérations de symétrie, la somme des composantes de l'impulsion orthogonales à l'axe de révolution est nulle, tandis que la composante axiale de l'augmentation totale de l'impulsion sera

$$Nm2v \cos \varphi \cos \varphi = \frac{2\rho\pi r\, dr\, v\, dt}{m}\, m2v \cos^2 \varphi = 4\rho\pi v^2 r\, dr\, dt \cos^2 \varphi.$$

D'après la deuxième loi de Newton, cette expression est égale à $dF\, dt$, d'où l'on tire $dF = kr\, dr \cos^2 \varphi$, $k = 4\rho\pi v^2$, et la force de résistance totale sera égale à

$$F = k \int_0^R \frac{r\, dr}{1 + (dx/dr)^2}. \qquad (1)$$

Ainsi, si l'on remplace r par t et R par T, on en vient au problème d'extrémum suivant

$$\int_0^T \frac{t\, dt}{1 + \dot{x}^2} \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = \xi. \qquad (2)$$

On voit facilement, sans résoudre le problème (2) (Legendre fut le premier à le remarquer en 1788), que la borne inférieure dans le problème est nulle. En effet, si l'on choisit la ligne brisée $x(\cdot)$ avec une dérivée très grande en valeur absolue (fig. 21), l'intégrale (2) sera très petite. D'autre part, pour toute fonction $x(\cdot)$ l'intégrale dans (2) est non négative. Ainsi la borne inférieure des valeurs de l'intégrale est nulle.

Le phénomène observé ci-dessus a souvent prêté à la critique, donnant lieu parfois à des attaques particulièrement méchantes. Un des derniers exemples se trouve dans le livre de Young [1]), qui écrit: « Newton formula le problème variationnel concernant la forme du corps de révolution qui subit une résistance minimale lorsqu'il se déplace dans un gaz. La loi de résistance sur laquelle il se fonde est absurde du point de vue physique, et il en résulte que le problème qu'il pose n'a pas de solution (plus le profil est en dents de scie, plus la résistance diminue)... Si la solution donnée par Newton était approximativement vraie, nous n'aurions pas aujourd'hui besoin d'expériences coûteuses dans des souffleries aérodynamiques. » Voilà qui est dit avec brio! Beaucoup de gens trouvent réconfort dans l'idée que même les grands hommes ont commis des erreurs grossières. Mais est-ce le cas ici? Remarquons tout d'abord que Newton lui-même n'avait pas formalisé son problème, ceci fut fait par la suite (d'une manière inapte) par d'autres. Pour obtenir une formalisation adéquate, il faut prendre en considération le fait que le profil envisagé doit être *monotone* (pour un profil en dents de scie, les particules effectuent des réflexions répétées, ce qui donne un tableau complètement faussé). La condition de monotonie rend notre problème adéquat du point de vue physique. Si l'on prend ce fait en considération, la solution du problème de Newton obtenue par lui-même n'est pas seulement exacte « approximativement », mais elle est remarquablement exacte dans le détail, sur quoi nous aurons encore l'occasion de revenir. De plus, les hypothèses physiques proposées par Newton et la solution même du problème aérodynamique n'ont pas perdu de leur actualité dans l'aérodynamique supersonique de nos jours, où il s'agit de construire des appareils volants ultrarapides pour les grandes altitudes.

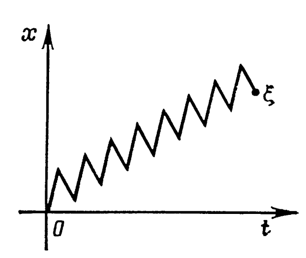


Fig. 21

L'hypothèse de monotonie nous amène à la formalisation correcte suivante du problème de Newton:

$$\int_0^T \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(T)=\xi, \quad \dot{x}\in \mathbb{R}_+. \qquad (3)$$

1.2.4. Diverses formalisations du problème isopérimétrique classique et du problème du brachistochrone. Le problème le plus simple de temps minimum. Les deux premiers problèmes mentionnés dans le titre de ce sous-paragraphe sont des plus connus, mais se sont

[1]) Young L. *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. London, 1969.

avérés parmi les plus difficiles quant à l'étude complète. Nous donnerons deux formalisations de chacun d'eux: une formalisation traditionnelle bien connue, une autre qui l'est beaucoup moins. Nous voulons ainsi souligner que le processus de formalisation n'est souvent pas unique, et cela pour des raisons de principe. En effet, le choix d'une formalisation commode est un problème en soi; le succès ici dépend dans une grande mesure de l'habileté manifestée.

Commençons par le problème isopérimétrique classique. Etant donné la longueur L de la courbe, déterminons cette dernière par les fonctions paramétriques $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ en choisissant en guise de paramètre la longueur d'arc s, calculée à partir d'un point fixe de la courbe. Alors, en tout point, nous aurons la relation $\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1$, et, en outre, $x(0) = x(L)$, $y(0) = y(L)$ puisque la courbe est fermée.

Pour préciser la position de la courbe cherchée, on peut supposer aussi que son centre de gravité se trouve à l'origine des coordonnées, i.e. que l'on a les égalités $\int_0^L x(s)\,ds = \int_0^L y(s)\,ds = 0$. L'aire S limitée par la courbe $(x(\cdot), y(\cdot))$ est égale à $\int_0^L x\dot{y}\,ds$. D'où nous obtenons la formalisation suivante

$$S = \int_0^L x\dot{y}\,ds \to \sup; \quad \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1,$$
$$\int_0^L x(s)\,ds = \int_0^L y(s)\,ds = 0, \quad x(0) = x(L), \quad y(0) = y(L). \tag{1}$$

Toutefois, ce même problème peut être formalisé différemment. Imaginons un avion dont le pilote doit survoler en un temps donné une surface d'aire maximale et retourner à son aérodrome. Si la vitesse maximale de l'avion ne dépend pas de sa direction de vol, le problème donné possède la formalisation naturelle suivante.

L'aire doit être maximale $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)v(t) - y(t)u(t))\,dt \to \sup$, où $\dot{x}(t) = u(t)$, $\dot{y}(t) = v(t)$.

La vitesse maximale de l'avion est $V \Leftrightarrow u^2 + v^2 \leqslant V^2$.

L'avion retourne à son aérodrome $\Leftrightarrow x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$.

Une formalisation plus générale est possible lorsque la vitesse maximale dépend de la direction (par exemple, lorsqu'il y a du

vent). Nous obtenons alors un problème plus général

$$\frac{1}{2}\int_0^T (xv-yu)\,dt \to \sup, \quad \dot{x}=u, \quad \dot{y}=v,$$
$$x(0)=x(T), \quad y(0)=y(T), \quad (u,v)\in A, \qquad (2)$$

où A est l'ensemble de toutes les vitesses admissibles de l'avion.

Lorsque A est un cercle, nous obtenons le problème isopérimétrique classique, si A est un cercle « déplacé » (ce qui correspond à un vent constant), on obtient le *problème de Tchaplyguine* bien connu.

Passons maintenant à la formalisation la plus traditionnelle du problème du brachistochrone. Introduisons dans le plan, comme dans 1.1.4 (fig. 16), un système de coordonnées (x, y) de sorte que l'axe des x soit horizontal et l'axe des y dirigé vers le bas. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le point A coïncide avec l'origine des coordonnées. Supposons que les coordonnées du point B (x_1, y_1) vérifient $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ et que $y(\cdot)$ est la fonction qui donne l'équation de la courbe joignant les points A et B. Rappelons que d'après la loi de Galilée la vitesse du corps M au point $(x, y(x))$ ne dépend pas de la forme de la courbe $y(\cdot)$ sur l'intervalle $(0, x)$, mais seulement de l'ordonnée $y(x)$, et cette vitesse est égale à $\sqrt{2gy(x)}$, où g est l'accélération gravitationnelle. Par conséquent, le temps T nécessaire pour effectuer le trajet le long de la courbe de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ entre $(x, y(x))$ et $(x + dx, y(x) + dy)$ sera égal à $ds/\sqrt{2gy(x)}$. D'où nous obtenons la formalisation suivante du problème du brachistochrone:

$$\mathcal{J}(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \to \inf, \quad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1. \qquad (3)$$

Nous donnerons maintenant une autre formalisation du problème du brachistochrone, proche dans son idée avec la deuxième formalisation du problème isopérimétrique classique, en suivant l'article de Jean Bernoulli de 1696, dans lequel il prend pour point de départ le principe variationnel de Fermat.

Imaginons un milieu non homogène dans lequel la vitesse de propagation de la lumière dépend seulement de la « profondeur » y suivant la loi $v^2 = 2gy$. Alors le rayon de lumière, en vertu du principe variationnel de Fermat, effectuera le trajet de A à B en temps minimum. Ainsi, nous obtenons une formalisation du problème du brachistochrone sous forme de problème de temps minimum

$$T \to \inf, \quad \dot{x}=\sqrt{y}\,u, \quad \dot{y}=\sqrt{y}\,v, \quad u^2+v^2=2g,$$
$$x(0)=y(0)=0, \quad x(T)=x_1, \quad y(T)=y_1. \qquad (4)$$

D'une manière analogue, on peut formaliser le problème le plus simple de temps minimum (voir 1.1.7). Supposons que la masse du wagonnet est m, sa coordonnée initiale x_0 et sa vitesse initiale v_0. Désignons la force extérieure (la force de traction) par u et la coordonnée variable du wagonnet par $x(t)$. Alors, d'après la loi de Newton, $m\ddot{x} = u$. Ecrivons la contrainte sur la force de traction sous la forme: $u \in [u_1, u_2]$. Il vient alors

$$T \to \inf, \quad m\ddot{x} = u, \quad u \in [u_1, u_2], \tag{5}$$
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Nous obtenons donc un problème qui ressemble beaucoup à (2) et (4).

Notons un fait très important. En réalité, nous avons insuffisamment formalisé nos problèmes. Par exemple, dans la formalisation (3), nous n'avons pas indiqué exactement le domaine de définition de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ et, par conséquent, nous ne savons pas encore quelle classe de courbes on envisage dans ce problème (i.e. l'ensemble X de 1.2.1 n'est pas défini). Il en va de même avec les autres formalisations contenues dans le présent sous-paragraphe. D'ailleurs, les mathématiciens classiques ne prêtaient guère attention à la formalisation précise du problème et trouvaient la solution du problème « non formalisé ». Mais nous voulons être pédants et précis autant que possible, et il nous faudra donc nous occuper de cette affaire ennuyeuse: indiquer à chaque fois sur quelle classe d'objets on cherche (ou on a trouvé) la solution.

1.2.5. Formalisation du problème de transport et du problème de rationnement. Commençons par le problème de transport. Introduisons les notations suivantes:

a_i — nombre d'unités du produit stocké à l'entrepôt numéro i, $1 \leqslant i \leqslant m$,

b_j — la demande (dans les mêmes unités) du magasin numéro j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

c_{ij} — coût du transport d'une unité du produit du i-ième entrepôt au j-ième magasin,

x_{ij} — quantité d'unités de produit à transporter du i-ième entrepôt au j-ième magasin.

Alors le coût total du transport est égal à $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, il s'agit de le minimiser. Les contraintes sont alors les suivantes:

a) $x_{ij} \in \mathbf{R}_+$ (contrainte évidente sur la quantité à transporter);

b) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i$ (pas moyen de transporter plus de produits qu'il n'y en a en stock);

c) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j$ (il faut transporter exactement la quantité requise).

Il en résulte la formalisation suivante:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \inf, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad x_{ij} \in \mathbf{R}_+. \qquad (1)$$

Le problème de rationnement se formalise tout aussi simplement. Supposons qu'il y a n aliments (grains, lait, etc.) et m substances nutritives (lipides, protides, glucides, etc.). Supposons qu'il faut b_j unités de la j-ième substance pour une alimentation saine. Supposons en outre que a_{ij} est la quantité de j-ième substance contenue dans une unité du i-ième aliment et que c_i est le prix d'une unité du i-ième aliment.

Désignons par x_i la consommation du i-ième aliment, nous obtenons alors le problème

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \inf, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant b_j, \quad x_i \geqslant 0. \qquad (2)$$

1.2.6. Principales classes de problèmes d'extrémum. Nous avons déjà mentionné brièvement dans le § 1.1 que plusieurs classes de problèmes se sont assez clairement délimitées dans la théorie des problèmes d'extrémum. Avant de les décrire, passons en revue les méthodes grâce auxquelles on s'était donné les contraintes dans les problèmes énoncés ci-dessus.

D'abord nous avons rencontré des formalisations où les contraintes étaient totalement absentes (par exemple, dans le problème de la réfraction de la lumière ou dans le problème de Steiner). Deuxièmement, il y avait des contraintes déterminées par un système d'égalités (par exemple, dans le problème d'Apollonios, dans le problème du brachistochrone (dans sa formalisation (3), 1.2.4), où les égalités donnaient les conditions aux limites). Troisièmement, les contraintes étaient données par des inégalités (par exemple, dans le problème de transport). Enfin, quatrièmement, certaines contraintes s'écrivaient sous forme d'inclusions (par exemple, la contrainte $\dot{x} \in \mathbf{R}_+$ dans le problème de Newton, la contrainte $(u, v) \in A$, où $A = \{(u, v); u^2 + v^2 \leqslant 1\}$, dans le problème isopérimétrique classique (dans sa formalisation (2), 1.2.4).

Notons que cette division est un peu artificielle. Par exemple, la contrainte $\dot{x} \in \mathbf{R}_+$ dans le problème de Newton peut s'écrire sous forme d'inégalité $\dot{x} \geqslant 0$, tandis que la contrainte $(u, v) \in A$ dans le problème isopérimétrique classique s'écrit également sous forme d'inégalité $u^2 + v^2 \leqslant 1$. Réciproquement, chaque inégalité $f(x) \leqslant 0$ peut être remplacée par l'égalité $f(x) + u = 0$ et l'inclusion $u \in \mathbf{R}_+$, etc.

Toutefois, d'après le point de vue adopté dans ce livre, la différence entre les contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités d'une part, et d'inclusions de l'autre, n'est pas dénuée de signification. On rencontre dans les cours d'analyse (nous en parlerons en détail dans le § 1.3) la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la résolution des problèmes d'« extrémum lié ». Il est bien connu que l'application de cette méthode commence par la construction de la « fonction de Lagrange », qui comprend aussi bien la fonctionnelle considérée que les fonctions qui déterminent les contraintes. Il peut s'avérer, pour diverses raisons, qu'il soit avantageux de ne pas introduire certaines contraintes dans la fonction de Lagrange. Ainsi donc, nous distinguons, en les mettant sous forme d'inclusions, celles des contraintes qui, dans la solution du problème envisagé, ne sont pas inclues dans la fonction de Lagrange. Dans ce cas, de même que pour la formalisation du problème (où il y a plusieurs méthodes et le choix d'une méthode avantageuse dépend de l'art du chercheur), le problème de la distinction des contraintes n'a pas toujours une solution préférentielle.

Passons maintenant à la description des classes principales de problèmes d'extrémum. Par la suite, d'un point de vue assez général, nous envisageons les quatre classes suivantes.

I. Problèmes différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités. Ici la classe des éléments admissibles X sera en général un espace normé [1]), tandis que les contraintes C sont déterminées par l'égalité $F(x) = 0$, où F est une application de X dans un autre espace normé Y, et un nombre fini d'inégalités $f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. On obtient de la sorte la classe de problèmes suivante:

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (1)$$

On admet ici que les fonctions f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ et l'application F possèdent certaines propriétés de différentiabilité. Le problème différentiable $f_0(x) \to \inf$ sera appelé *problème différentiable élémentaire* [2]).

II. Calcul des variations classique. Ici la classe traditionnelle des éléments admissibles est l'espace de Banach $X = C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ des fonctions vectorielles de dimension n continûment différentiables $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ dans lequel

[1]) Les termes « espace normé » et « espace de Banach » sont employés ici uniquement pour préciser l'énoncé du problème. Le lecteur trouvera les définitions exactes dans 2.1.1. Dans le problème (1), on peut supposer pour simplifier que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur dans l'espace arithmétique $\mathbf{R}^n$ à n dimensions.

[2]) Les problèmes de maximum, ou à l'inégalité de sens opposé ($\geqslant$), se ramènent facilement à la forme (1), voir § 3.2.

la norme est définie par les formules

$$\|x(\cdot)\|_1 = \max(\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0),$$
$$\|x(\cdot)\|_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (\max_{t\in[t_0, t_1]} |x_i(t)|).$$

Les f o n c t i o n n e l l e s dans les problèmes du calcul des variations classique sont généralement des types suivants:

intégrales, i.e. des fonctionnelles de la forme

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))\, dt; \quad (2)$$

terminales, i.e. des fonctionnelles de la forme

$$\mathcal{T}(x(\cdot)) = l(x(t_0), x(t_1)) =$$
$$= l(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)); \quad (3)$$

mixtes, i.e. des fonctionnelles de la forme

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \mathcal{J}(x(\cdot)) + \mathcal{T}(x(\cdot)). \quad (4)$$

(Par la suite les fonctionnelles de la forme (4) seront également appelées *fonctionnelles de Boltz.*)

Les c o n t r a i n t e s dans les problèmes du calcul des variations classique se décomposent généralement en deux parties:

les relations différentielles de la forme

$$M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow M_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots$$
$$\ldots, \dot{x}_n(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad (5)$$

les conditions aux limites de la forme

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) =$$
$$= 0 \Leftrightarrow \psi_j(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)), \quad (6)$$
$$j = 1, 2, \ldots, s.$$

Dans (2) et (5) L, M_i et dans (3) et (6) l, ψ_j sont des fonctions différentiables de $2n+1$ et $2n$ variables respectivement. Le problème

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0 \quad (7)$$

est appelé *problème de Lagrange*. Le problème

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

est le *problème de Boltz.* Le problème

$$\mathscr{T}(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

est appelé *problème de Mayer.*

Le problème sans contraintes

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \tag{8}$$

sera appelé *problème élémentaire de Boltz.*

Le problème

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{9}$$

est appelé *problème élémentaire vectoriel du calcul des variations classique* et, dans le cas où $n = 1$, c'est le *problème élémentaire du calcul des variations classique.* Pour simplifier, nous nous limitons ici aux problèmes à temps fixe.

Une formulation plus générale, dans laquelle la fonctionnelle et les contraintes dépendent également des variables t_0 et t_1, peut être trouvée par le lecteur au chapitre IV.

III. Problèmes de programmation convexe. Ici la classe des éléments admissibles X est un espace vectoriel, tandis que les contraintes C sont données par un système d'égalités $F(x) = 0$ (où $F : X \to Y$, Y étant un autre espace vectoriel), d'inégalités $f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ et d'inclusions $x \in A$. On obtient ainsi la classe de problèmes suivante:

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \tag{10}$$

Nous supposons ici que les fonctions f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ sont convexes, l'application F est affine (i.e. $F(x) = \Lambda x + \eta$, où η est un vecteur fixe, tandis que Λ est un opérateur linéaire de X dans Y) et A est un ensemble convexe. Si toutes les fonctions f_i dans (10) sont linéaires, tandis que A est un cône standard, le problème (10) est appelé *problème de programmation linéaire.* Lorsque les contraintes sont absentes de (10), le problème $f_0(x) \to \inf$ avec une fonction convexe f_0 sera appelé *problème convexe élémentaire sans contraintes.*

IV. Problèmes de commande optimale. Dans ce livre nous envisageons la classe suivante de problèmes de com-

mande optimale, où $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$:

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + g(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf, \quad (11)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad \psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad u \in \mathfrak{U}.$$

On suppose en général que les temps t_0 et t_1 ne sont pas fixés dans (11), toutes les fonctions

$$f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}, \quad \varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n,$$
$$\psi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s, \quad g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

sont continûment différentiables relativement aux variables t et x et continues par rapport à leurs variables; l'ensemble $\mathfrak{U}$ est en général un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}^r$.

Pour donner une description complète du problème, il ne reste qu'à expliquer quelle est la classe des éléments admissibles. Au début nous considérerons l'ensemble des fonctions vectorielles $(x(\cdot), u(\cdot))$, où $u(\cdot)$ est définie et continue par morceaux sur $[t_0, t_1]$, l'inclusion $u(t) \in \mathfrak{U}$ étant satisfaite pour tous les t, tandis que $x(\cdot)$ est continue sur $[t_0, t_1]$ et différentiable en tous les points, sauf ceux où $u(\cdot)$ possède une discontinuité; dans tous les points où la dérivée de la fonction $x(\cdot)$ existe, on a l'égalité $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$.

Les problèmes dans lesquels la fonctionnelle envisagée est t_1 sont appelés *problèmes de temps minimum.*

* * *

Nous pouvons maintenant voir dans quelles classes il faut inclure les problèmes des sous-paragraphes 1.2.1 à 1.2.5.

Le problème d'Euclide (voir (1), 1.2.2) peut être aussi bien rapporté aux problèmes différentiables qu'aux problèmes de programmation convexe. Le problème d'Archimède, dans les formalisations (2) et (2′) de 1.2.2 et le problème de Kepler (3) de 1.2.2 se rapportent aux problèmes différentiables. Le problème de la réfraction de la lumière (voir (4), 1.2.2) est à la fois un problème différentiable élémentaire et un problème convexe élémentaire. Le problème de Steiner (voir (5), 1.2.2) est un problème convexe élémentaire. Le problème d'Apollonios (voir (6), 1.2.2) est un problème différentiable à contraintes sous forme d'égalités. Le problème de Newton (voir (3), 1.2.3) est un problème de commande optimale. Le problème isopérimétrique classi-

que dans la formalisation (1) de 1.2.4 se rapporte au calcul des variations classique, et dans la formalisation (2), à la théorie de commande optimale. Le problème du brachistochrone (voir (3), 1.2.4) est un problème élémentaire du calcul des variations classique ; ce même problème dans la formalisation (4), 1.2.4, est le problème de temps minimum de commande optimale. Le problème de transport et le problème de rationnement (voir (1) et (2), 1.2.5) sont des problèmes de programmation linéaire ; le problème élémentaire de temps minimum est un problème de commande optimale.

Ainsi nous avons formalisé et classifié nos problèmes. Voyons maintenant ce que nous donne l'analyse pour les résoudre.

§ 1.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange et théorème de Kuhn-Tucker

1.3.1. Théorème de Fermat. La première méthode analytique générale pour la résolution des problèmes d'extrémum fut conçue par Fermat. Elle aurait été découverte en 1629, mais elle fut pleinement exposée pour la première fois dans une lettre à Roberval en 1638. Nous conseillons au lecteur de consulter le livre de Descartes [1]), où cette lettre est citée, et essayer de comprendre l'idée originale de Fermat. En langue plus moderne (à vrai dire, Fermat ne considérait que les polynômes) la méthode de Fermat consiste à remarquer qu'en un point d'extrémum $\hat{x}$, dans le problème sans contraintes $f(x) \to \text{extr}$, on doit avoir l'égalité $f'(\hat{x}) = 0$. Nous nous rappelons qu'une première allusion à ce résultat est contenue dans une phrase de Kepler provenant du livre *Stéréométrie des tonneaux de vin*, que nous avons cité ci-dessus.

Le raisonnement de Fermat fut mis sous une forme précise en 1684, quarante-six ans plus tard, lorsque apparut l'ouvrage de Leibnitz dans lequel celui-ci posa les fondements de l'analyse. Le titre même de cet ouvrage, qui commence ainsi : *Nova methodus pro maximis et minimis...* (*Nouvelles méthodes pour la recherche des plus petites et des plus grandes valeurs...*) nous montre l'importance du problème d'extrémum dans le développement des mathématiques modernes. Dans son article, Leibnitz n'obtient pas seulement la relation $f'(\hat{x}) = 0$ en guise de condition nécessaire d'extrémum (aujourd'hui ce résultat est appelé *théorème de Fermat*), mais se sert de la deuxième différentielle pour distinguer le maximum du minimum. Il faut sans doute rappeler que, bien entendu, la majorité des faits exposés par Leibnitz était à cette époque également connue de Newton.

---

[1]) Descartes R. *Géométrie* (avec en Appendice *Travaux choisis* de P. Fermat et *Correspondance de Descartes*). Moscou-Léningrad, 1938, p. 154.

Mais son ouvrage *La méthode des fluxions*, achevé dans ses grandes lignes en 1671, ne fut publié qu'en 1736.

Passons maintenant au théorème de Fermat proprement dit, en rappelant d'abord quelques faits d'analyse. Commençons par le cas unidimentionnel, lorsque les fonctions sont définies sur la droite réelle **R**. La fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'une variable est dite *différentiable au point* $\hat{x}$, s'il existe un nombre α tel que

$$f(\hat{x}+\lambda) = f(\hat{x}) + \alpha\lambda + r(\lambda),$$

où $r(\lambda) = o(|\lambda|)$, i.e. pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|\lambda| \leqslant \delta$ implique $|r(\lambda)| \leqslant \varepsilon |\lambda|$. Le nombre α est appelé *dérivée de* f *au point* $\hat{x}$ et désigné par $f'(\hat{x})$. Ainsi

$$f'(\hat{x}) = \lim_{\lambda \to 0} [(f(\hat{x}+\lambda) - f(\hat{x}))/\lambda].$$

Théorème de Fermat. *Supposons que* f *est une fonction d'une variable, différentiable au point* $\hat{x}$. *Si* $\hat{x}$ *est un point d'extrémum local, alors*

$$f'(\hat{x}) = 0. \tag{1}$$

Les points $\hat{x}$ auxquels on a la relation (1) sont dits *stationnaires.*

D'après les définitions générales de 1.2.1, le point $\hat{x}$ donne un minimum (maximum) local à la fonction f s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'inégalité $|x - \hat{x}| < \varepsilon$ implique l'inégalité $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ ($\leqslant f(\hat{x})$). D'après le théorème de Fermat, les points d'extrémum local (maximum ou minimum) sont stationnaires. La réciproque est évidemment fausse: par exemple $f(x) = x^3$, $\hat{x} = 0$.

Démonstration. Supposons que $\hat{x}$ est un minimum local de la fonction f, mais $f'(\hat{x}) = \alpha \neq 0$. Supposons pour préciser que $\alpha < 0$. En se donnant $\varepsilon = |\alpha|/2$, trouvons d'après la définition de la dérivée un nombre $\delta > 0$ tel que $|\lambda| < \delta$ entraîne $|r(\lambda)| < |\alpha| |\lambda|/2$. Alors, pour $0 < \lambda < \delta$, on obtient

$$f(\hat{x}+\lambda) = f(\hat{x}) + \alpha\lambda + r(\lambda) \leqslant f(\hat{x}) + \alpha\lambda + \frac{|\alpha|\lambda}{2} = f(\hat{x}) - \frac{|\alpha|\lambda}{2} < f(\hat{x}),$$

i.e. $\hat{x}$ n'est pas un point de minimum local de f. Cette contradiction démontre le théorème. ■

Pour plusieurs variables (et à fortiori pour « un nombre infini de variables ») il y a plusieurs définitions de la dérivée. Nous y reviendrons en détail dans le chapitre II (voir 2.2.1). Nous rappelons ici seulement la définition principale (due dans le cas de dimension infinie à Fréchet).

La fonction $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de n variables est dite *différentiable au point* $\hat{x}$, s'il existe des nombres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (que nous désignerons

brièvement par α) tels que

$$f(\hat{x}+h)=f(\hat{x})+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i+r(h),$$

où $|r(h)|=o(|h|)$, i. e. pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un $\delta>0$ tel que $|h|=\sqrt{h_1^2+\ldots+h_n^2}<\delta$ implique $|r(h)|\leqslant\varepsilon\,|h|$. Le système $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est appelé *dérivée de f au point* $\hat{x}$; on le désigne également par $f'(\hat{x})$. Notons que $f'(\hat{x})$ est une suite de n nombres. Dans notre cas, le nombre

$$\alpha_i=\lim_{\lambda\to 0}\,[(f(\hat{x}+\lambda e_i)-f(\hat{x}))/\lambda],$$

où $e_i=(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (le chiffre 1 étant situé à la i-ième place), est appelé *i-ième dérivée partielle de f*; notation: $f_{x_i}(\hat{x})$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x})$. Ainsi, $f'(\hat{x})=(f_{x_1}(\hat{x}), \ldots, f_{x_n}(\hat{x}))$. La relation $f'(\hat{x})=0$ signifie que $f_{x_1}(\hat{x})=\ldots=f_{x_n}(\hat{x})=0$.

On déduit du théorème de Fermat « unidimentionnel » le corollaire évident suivant:

Corollaire (Théorème de Fermat pour les fonctions de n variables). *Soit f une fonction de n variables, différentiable au point $\hat{x}$. Si $\hat{x}$ est un point de minimum local de la fonction f, alors*

$$f'(\hat{x})=0 \Leftrightarrow f_{x_i}(\hat{x})=0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{2}$$

Les points $\hat{x}\in\mathbf{R}^n$ auxquels on a l'égalité (2) sont également appelés *stationnaires.*

Démonstration du corollaire. Si $\hat{x}$ donne un extrémum à la fonction f, alors le point zéro doit être un extrémum de la fonction $\varphi_i(\lambda)=f(\hat{x}+\lambda e_i)$. D'après le théorème de Fermat $\varphi_i'(0)=0$, mais $\varphi_i'(0)\overset{\text{def}}{=}f_{x_i}(\hat{x})$.

1.3.2. Méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ce sous-paragraphe concerne les problèmes différentiables de dimension finie. Signalons encore une fois les méandres historiques qui caractérisent le développement de notre thème. Après la création des méthodes pour résoudre les problèmes d'extrémum unidimensionnels, vint le tour du calcul des variations classique. Pour les problèmes du calcul des variations à contraintes, i.e. dans une situation de dimension infinie, Lagrange énonça dans sa *Mécanique analytique* (1788) [1] sa célèbre méthode des multiplicateurs; ce n'est que neuf ans plus tard, dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, en 1797, qu'il appliqua cette méthode aux problèmes de dimension finie.

[1]) Lagrange J. *Mécanique analytique.* Moscou-Léningrad, Gostechizdat, 1950.

On appelle problème d'extrémum différentiable de dimension finie à contraintes sous forme d'égalités (ou problème d'extrémum lié) le problème suivant :

$$f_0(x) \to \text{extr}, \quad f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0. \tag{1}$$

Les fonctions $f_k\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, doivent ici posséder certaines propriétés de différentiabilité. Dans ce sous-paragraphe, nous supposons que dans un voisinage ouvert U de l'espace $\mathbf{R}^n$ toutes les fonctions f_k possèdent des dérivées continues (dans le sens que toutes les dérivées partielles $\partial f_k/\partial x_i$ existent et sont continues dans U).

Le point $\hat{x} \in U$, $f_k(\hat{x}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, donne un minimum (maximum) local au problème (1) dans le cas où il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour un point $x \in U$ vérifiant toutes les contraintes ($f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$) et $|x - \hat{x}| < \varepsilon$, on a $f_0(x) \geqslant f_0(\hat{x})$ (respectivement $f_0(x) \leqslant f_0(\hat{x})$).

La fonction

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x), \tag{2}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, est appelée *fonction de Lagrange* du problème (1) et les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les *multiplicateurs de Lagrange*.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange. 1. *Supposons que toutes les fonctions* $f_0, f_1, \ldots, f_m$ *du problème* (1) *sont continûment différentiables dans un voisinage du point* $\hat{x}$. *Si* $\hat{x}$ *est un point d'extrémum local du problème* (1), *il existe des multiplicateurs de Lagrange* $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$ *et* λ_0 *qui ne s'annulent pas simultanément et qui vérifient la condition de stationnarité de la fonction de Lagrange par rapport à* x

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_{x_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

2. *Pour que* $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, *il suffit que les vecteurs* $f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})$ *soient linéairement indépendants.*

Ainsi, pour déterminer $\hat{x}$, $\hat{\lambda}$ et $\hat{\lambda}_0$, nous avons obtenu $n + m$ équations :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x)\Big) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0 \tag{4}$$

à $n + m + 1$ inconnues. Il faut remarquer que les multiplicateurs de Lagrange se trouvent donc définis à un coefficient de proportion-

nalité près. Si l'on sait que $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ (ce qui est le cas le plus important, car avec $\hat{\lambda}_0 = 0$ les relations (3) reflètent seulement le fait que les contraintes sont dégénérées, et n'ont rien à voir avec la fonctionnelle), on peut, en multipliant tous les $\hat{\lambda}_i$ par une constante, supposer que l'on a l'égalité $\hat{\lambda}_0 = 1$. Dans ce cas, le nombre des équations devient égal au nombre des inconnues.

Sous une forme plus symétrique, on peut écrire les équations (4) ainsi :

$$\mathscr{L}_x = 0, \quad \mathscr{L}_\lambda = 0. \tag{4'}$$

Leurs solutions sont appelées *points stationnaires* du problème (1).

Depuis le temps de Lagrange (les mots de Lagrange sont cités plus loin), pendant presque un siècle, la méthode des multiplicateurs était énoncée avec $\hat{\lambda}_0 = 1$; mais sans hypothèses supplémentaires (par exemple, d'indépendance linéaire) elle s'avère fausse. Pour confirmer ce que nous venons de dire, considérons le problème

$$x_1 \to \inf, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Sa solution évidente et unique est le point $\hat{x} = (0, 0)$, car c'est le seul point admissible. Essayons maintenant de constituer une fonction de Lagrange avec $\hat{\lambda}_0 = 1$ et d'y appliquer l'algorithme (3). On a $\mathscr{L} = x_1 + \lambda (x_1^2 + x_2^2)$, d'où l'on obtient

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2\lambda x_1 + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2\lambda x_2 = 0$$

et la première de ces équations est en contradiction avec l'équation $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

En guise de condition de régularité qui garantisse $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, on se sert en général de l'indépendance linéaire des dérivées $f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})$ (voir l'assertion 2 du théorème ci-dessus). Néanmoins, la vérification de cette condition est souvent plus compliquée que la vérification directe, à partir de l'équation (3), du fait que $\hat{\lambda}_0$ ne peut s'annuler (voir la résolution des problèmes dans le § 1.6). Par conséquent, l'énoncé du théorème donné ci-dessus, sans hypothèse supplémentaire sauf la différentiabilité, est très commode.

La démonstration du théorème se base sur un des théorèmes les plus importants du calcul différentiel de dimension finie : le théorème de la fonction inverse [14, volume 1, p. 455], [9, volume 1, p. 259].

Théorème de la fonction inverse. *Soient $\psi_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \psi_s(x_1, \ldots, x_s)$ s fonctions de s variables continûment différentiables dans un certain voisinage du point $\hat{x}$. Sup-*

posons que le jacobien

$$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial \psi_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right)$$

diffère de zéro. Il existe alors des nombres $\varepsilon_0 > 0$ *et* $\delta_0 > 0$ *tels que pour chaque* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$, $|\eta| \leqslant \varepsilon_0$, *on peut trouver un* ξ, $|\xi| \leqslant \delta_0$ *tel que* $\psi(\hat{x} + \xi) = \psi(\hat{x}) + \eta$ *et l'on a* $\xi \to 0$ *quand* $\eta \to 0$.

Des variantes plus générales de ce théorème seront démontrées dans le § 2.3.

Démonstration de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Supposons que $\hat{x}$ est un point de minimum local du problème (1). Alors deux cas sont possibles: ou bien les vecteurs $f_0'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})$ sont linéairement dépendants, ou ils ne le sont pas.

A) Supposons que les vecteurs sont linéairement dépendants. Alors on peut choisir des nombres $\hat{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, non tous nuls, satisfaisant à la condition (3) par définition.

B) Supposons que les vecteurs sont linéairement indépendants. Essayons d'obtenir une contradiction avec le fait que $\hat{x}$ est un minimum local du problème (1).

Considérons l'application $\Phi(x) = (f_0(x) - f_0(\hat{x}), f_1(x), \ldots \ldots, f_m(x))$. Par hypothèse, les vecteurs $f_0'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})$ sont linéairement indépendants, i.e. le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

est égal à $m + 1$. Supposons, pour préciser, que les premières $m + 1$ colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, i.e.

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Par conséquent, les fonctions

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \\ = f_0(x_1, \ldots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n),$$

$$\psi_2(x_1, \ldots, x_{m+1}) = f_1(x_1, \ldots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n), \ldots,$$

$$\psi_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = f_m(x_1, \ldots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n)$$

vérifient les hypothèses du théorème de la fonction inverse. D'après celui-ci, pour chaque ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe des $x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon)$ tels que

$$\begin{aligned} f_0(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}) &= -\varepsilon, \\ f_1(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_m(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

et l'on a $x_i(\varepsilon) \to \hat{x}_i$ pour $\varepsilon \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$. Mais il découle directement de (5) que le point $\hat{x}$ n'est pas un point de minimum local. La contradiction cherchée est obtenue. L'assertion 2 du théorème est évidente. ■

La généralisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange au cas des problèmes de dimension infinie à égalités et à inégalités sera donnée au chapitre III.

Et maintenant encore quelques remarques historiques. La méthode des multiplicateurs fut mentionnée pour la première fois dans les travaux d'Euler sur les problèmes isopérimétriques (1744). Ensuite elle fut énoncée par Lagrange dans sa *Mécanique analytique* (1788) pour une large classe de problèmes du calcul des variations (à savoir, pour les problèmes dits de Lagrange, auxquels nous aurons l'occasion de revenir). En 1797, dans le livre *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange aborde la question des problèmes de dimension finie [1]).

Il écrit: « On peut les réduire à ce principe général. Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être un maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et là chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes; les équations qu'on a trouvées, serviront à déterminer toutes les inconnues. »

Nous pouvons dire sans trop d'exagération que la plus grande partie du présent ouvrage a pour but de clarifier l'idée de Lagrange pour l'appliquer à des problèmes de diverses sortes. Exposons ici encore une fois l'idée maîtresse de Lagrange. Supposons qu'il faut trouver un extrémum pour le problème (1). Alors il faut constituer la fonction de Lagrange (2) et envisager le problème $\mathscr{L}(x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \to$ $\to$ extr sans contraintes. La condition nécessaire dans ce problème sans contraintes, d'après le théorème de Fermat pour les fonctions à n variables, nous donne les équations nécessaires $\mathscr{L}_x = 0$. Ainsi, d'après le principe de Lagrange, les équations pour l'extrémum dans le problème à contraintes coïncident avec les équations pour le pro-

[1]) Lagrange J. L. *Théorie des fonctions analytiques*. Paris, 1813, p. 292.

blème $\mathscr{L}(x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \to$ extr sans contraintes pour un choix des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}_0$ approprié.

Nous verrons par la suite que pour un très grand nombre de problèmes l'idée générale de Lagrange s'avère correcte.

1.3.3. Théorème de Kuhn-Tucker. Dans ce sous-paragraphe, nous considérons les problèmes de programmation convexe auxquels l'idée de Lagrange s'applique sous sa forme la plus achevée. Cette classe de problèmes a suscité l'intérêt des chercheurs assez récemment. Les fondements de la théorie de la programmation linéaire (qui est un cas particulier de la programmation convexe) furent énoncés dans les travaux de Kantorovitch, en 1939. Le théorème de Kuhn-Tucker — le résultat principal du présent paragraphe — fut démontré en 1951.

Considérons le problème d'extrémum suivant (le *problème de programmation convexe*):

$$f_0(x) \to \inf, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in A, \tag{1}$$

où X est un espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), les f_i sont des fonctions convexes sur X et A un sous-ensemble convexe de X. Notons, ce qui est essentiel, que (1) est un problème de minimisation et non de maximisation.

Rappelons qu'un ensemble C situé dans l'espace vectoriel est dit *convexe* s'il contient, avec chaque couple de ses points x et y, également le segment $[x, y] = \{z \mid z = \alpha x + (1 - \alpha) y, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ tout entier. La fonction $f: X \to \mathbf{R}$ est dite *convexe* si pour des x et $y \in X$ quelconques on a l'*inégalité de Jenssen*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y), \quad \forall \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

ou, ce qui revient au même, si le « surgraphe » de f, i.e. l'ensemble

$$\operatorname{epi} f = \{(\alpha, x) \in \mathbf{R} \times X \mid \alpha \geqslant f(x)\}$$

est un ensemble convexe dans le produit $\mathbf{R} \times X$.

La fonction

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x), \tag{2}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, est appelée *fonction de Lagrange* du problème (1), tandis que les nombres $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ sont les *multiplicateurs de Lagrange*. La contrainte $x \in A$ n'a pas trouvé sa place dans l'expression (2).

Théorème de Kuhn-Tucker. 1. *Soient: X un espace vectoriel, $f_i: X \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, des fonctions convexes sur X et A un sous-ensemble convexe de X.*

Si $\hat{x}$ est une solution du problème (1), *alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}$ qui ne s'annulent pas simultanément tels que*

a) $\min\limits_{x \in A} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$ (*principe du minimum*);

b) $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ (*condition de non-négativité*);

c) $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (*condition de non-rigidité complémentaire*).

2. *Si* $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, *les conditions* a) *à* c) *sont suffisantes pour qu'un point admissible* $\hat{x}$ *soit la solution du problème* (1).

3. *Pour avoir* $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, *il suffit de l'existence d'un point* $\bar{x} \in A$ *vérifiant la condition de Slater*:

$$f_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ainsi, si la condition de Slater est remplie, on peut supposer que $\hat{\lambda}_0 = 1$.

La relation a) reflète la pensée de Lagrange sous sa forme la plus achevée: si $\hat{x}$ fournit un minimum au problème à contraintes (sous forme d'inégalités), ce même point donne un minimum à la fonction de Lagrange (dans le problème sans celles des contraintes qui sont comprises dans la fonction de Lagrange). Les relations b) et c) sont typiques pour les problèmes à inégalités (pour plus de détails, voir § 3.2).

La démonstration du théorème de Kuhn-Tucker se base sur un des théorèmes fondamentaux de l'analyse convexe: le *théorème de séparation.* Il est vrai qu'ici sa variante la plus simple de dimension finie nous sera suffisante, nous allons l'énoncer; quant à la démonstration, elle sera donnée dans le sous-paragraphe suivant.

Théorème de séparation en dimension finie. *Soit C un sous-ensemble convexe de* $\mathbf{R}^N$ *qui ne contient pas le point* 0. *On peut alors trouver des nombres* $a_1, \ldots, a_N$ *tels que pour chaque* $x = (x_1, \ldots, x_N) \in C$ *on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \geqslant 0 \tag{3}$$

(autrement dit, l'hyperplan $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = 0$ passant par 0 sépare $\mathbf{R}^N$ en deux parties, l'une desquelles contient entièrement C).

Démonstration du théorème de Kuhn-Tucker. Soit $\hat{x}$ la solution du problème. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f_0(\hat{x}) = 0$: autrement on n'a qu'à introduire la fonction $\widetilde{f_0(x)} = f_0(x) - f_0(\hat{x})$. Posons

$$C = \{\mu \in \mathbf{R}^{m+1},\ \mu = (\mu_0, \ldots, \mu_m) \mid \exists x \in A : f_0(x) < \mu_0, \\ f_i(x) \leqslant \mu_i,\quad i \geqslant 1\}. \tag{4}$$

Le reste de la démonstration est divisé en plusieurs étapes.

A) *L'ensemble C est non vide et convexe.* En effet, chaque vecteur $\mu \in \mathbf{R}^{m+1}$ aux composantes positives appartient à C, puisque dans (4) on peut poser $x = \hat{x}$. Par conséquent, l'ensemble C est non vide. Démontrons qu'il est convexe. Soient $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_m)$ et $\mu' = (\mu'_0, \ldots, \mu'_m) \in C$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, x et x' des éléments de A tels que (en vertu de (4)) $f_0(x) < \mu_0$, $f_0(x') < \mu'_0$, $f_i(x) \leqslant \mu_i$, $f_i(x') \leqslant \mu'_i$, $i \geqslant 1$. Posons $x_\alpha = \alpha x + (1 - \alpha) x'$. Alors $x_\alpha \in A$, puisque A est convexe et, d'après la convexité des fonctions f_i, on a

$$f_i(x_\alpha) = f_i(\alpha x + (1-\alpha) x') \leqslant$$
$$\leqslant \alpha f_i(x) + (1-\alpha) f_i(x') \begin{cases} < \alpha\mu_0 + (1-\alpha)\mu'_0, & i = 0, \\ \leqslant \alpha\mu_i + (1-\alpha)\mu'_i, & i \geqslant 1, \end{cases}$$

i.e. le point $\alpha\mu + (1 - \alpha)\mu'$ appartient à C.

B) *Le point* $0 \in \mathbf{R}^{m+1}$ *n'appartient pas à C.* En effet, si le point 0 appartenait à C, on en déduirait, d'après la définition (4), l'existence d'un élément $\tilde{x} \in A$ pour lequel les inégalités suivantes seraient satisfaites: $f_0(\tilde{x}) < 0$, $f_i(\tilde{x}) \leqslant 0$, $i \geqslant 1$. Mais ces inégalités impliquent que $\hat{x}$ n'est pas une solution du problème. Donc $0 \notin C$.

Puisque C est convexe et $0 \notin C$, on peut appliquer le théorème de séparation, d'après lequel il existe des nombres $\hat{\lambda}_0, \ldots, \hat{\lambda}_m$ tels que

$$\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mu_i \geqslant 0 \tag{5}$$

quel que soit $\mu \in C$.

C) *Les multiplicateurs* $\hat{\lambda}_i$, $i \geqslant 0$, *de* (5) *sont non négatifs.* En effet, nous avons déjà vu dans A) que tout vecteur à composantes positives appartient à C, en particulier, C contient le vecteur $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$ et 1 se trouve à la i_0-ième place, $i_0 \geqslant 0$. En substituant ce point dans (5), on obtient $\hat{\lambda}_{i_0} \geqslant -\varepsilon \sum_{i \neq i_0} \hat{\lambda}_i$, d'où l'on tire, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, que $\hat{\lambda}_{i_0} \geqslant 0$.

D) *Les multiplicateurs* $\hat{\lambda}_i$, $i \geqslant 1$, *vérifient les conditions de non-rigidité complémentaire.* En effet, si $f_{j_0}(\hat{x}) = 0$, $j_0 \geqslant 1$, l'égalité $\hat{\lambda}_{j_0} f_{j_0}(\hat{x}) = 0$ est triviale. Supposons que $f_{j_0}(\hat{x}) < 0$. Alors le point $(\delta, 0, \ldots, 0, f_{j_0}(\hat{x}), 0, \ldots, 0)$, où le nombre $f_{j_0}(\hat{x})$ est situé à la j_0-ième place, tandis que $\delta > 0$, appartient à C: il suffit de prendre le point $\hat{x}$ dans le rôle de x dans (4).

En substituant ce point dans (5), nous obtenons $\hat{\lambda}_{j_0} f_{j_0}(\hat{x}) \geqslant -\hat{\lambda}_0 \delta$ et donc, $\delta > 0$ étant quelconque, l'inégalité $\hat{\lambda}_{j_0} \leqslant 0$. Mais nous avons démontré dans C) que $\hat{\lambda}_{j_0} \geqslant 0$, donc $\hat{\lambda}_{j_0} = 0$ et $\hat{\lambda}_{j_0} f_{j_0}(\hat{x}) = 0$.

E) *Le point $\hat{x}$ vérifie le principe du minimum.* En effet, supposons que $x \in A$. Alors le point $(f_0(x) + \delta, f_1(x), \ldots, f_m(x))$ appartient à C pour tout $\delta > 0$ (voir définition (4)). Par conséquent, en se servant de (5), on a

$$\hat{\lambda}_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(x) \geqslant -\hat{\lambda}_0 \delta.$$

D'où l'on tire ($\delta > 0$ étant arbitraire) l'inégalité

$$\mathscr{L}(x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \geqslant 0.$$

Maintenant, si l'on prend en considération l'égalité $f_0(\hat{x}) = 0$ et la condition de non-rigidité complémentaire, on obtient, pour tout $x \in A$,

$$\mathscr{L}(x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \geqslant 0 = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0).$$

L'assertion 1 du théorème est démontrée.

F) Démontrons l'*assertion* 2. Si l'on admet que $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, on peut supposer $\hat{\lambda}_0 = 1$ (puisque les multiplicateurs de Lagrange, vérifiant les relations a) à c) du théorème, conservent leurs propriétés lorsqu'ils sont multipliés par un même facteur positif quelconque). Mais alors pour tout x ($x \in A$, $f_i(x) \leqslant 0$, $i \geqslant 1$) admissible, on obtient

$$f_0(x) \overset{\text{b)}}{\geqslant} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(x) = \mathscr{L}(x, \hat{\lambda}, 1) \overset{\text{a)}}{\geqslant} \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, 1) =$$
$$= f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) \overset{\text{c)}}{=} f_0(\hat{x}),$$

i.e. $\hat{x}$ est une solution du problème.

G) Démontrons l'*assertion* 3. Supposons satisfaite la condition de Slater, i.e. pour un certain $\bar{x} \in A$ les inégalités $f_i(\bar{x}) < 0$, $i \geqslant 1$, sont vérifiées, mais néanmoins dans l'assertion 1 nous avons $\hat{\lambda}_0 = 0$. Nous obtenons alors une contradiction immédiate (dans notre calcul, nous nous servons du fait que tous les $\hat{\lambda}_i$, $i \geqslant 1$, ne sont pas nuls) :

$$\mathscr{L}(\bar{x}, \hat{\lambda}, 0) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\bar{x}) < 0 = \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, 0),$$

tandis que d'autre part a) implique $\mathscr{L}(\bar{x}, \hat{\lambda}, 0) \geqslant \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, 0)$. ■

Nous considérerons encore une autre variante du théorème de Kuhn-Tucker. Lorsque la condition de Slater $\hat{\lambda}_0 > 0$ est vérifiée, on peut supposer, les multiplicateurs de Lagrange étant déterminés

à un facteur positif près, que $\hat{\lambda}_0 = 1$. Alors la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x, \lambda, 1) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

est définie sur l'ensemble

$$A \times \mathbf{R}_+^m = \{(x, \lambda) \mid x = (x_1, \ldots, x_m) \in A; \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \lambda_i \geqslant 0\}$$

et les relations a) à c) sont équivalentes à l'assertion suivante: $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ est un *point selle* de cette fonction, i.e.

$$\min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}, 1) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, 1) = \max_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda, 1). \tag{6}$$

En effet, la première égalité dans (6) coïncide avec a), tandis que la deuxième découle de c) et de b):

$$\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, 1) = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = f_0(\hat{x}) \geqslant$$
$$\geqslant f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\hat{x}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda, 1).$$

Dans les §§ 2.6, 3.1, 3.3, 4.3 nous aurons l'occasion de rencontrer d'autres théorèmes d'analyse convexe et de programmation convexe.

Remarque. En « analyse convexe », il s'avère commode de considérer les fonctions à valeurs dans la droite augmentée $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, i.e. il est commode d'admettre que les fonctions puissent avoir des valeurs infinies $-\infty$, $+\infty$. Les règles de l'arithmétique se généralisent à cette droite augmentée avec certaines réserves (nous en parlerons en détail dans la remarque de 2.6.1). On vérifie aisément que la démonstration du théorème de Kuhn-Tucker reste valable, sans aucun changement, lorsqu'il s'agit de telles fonctions.

1.3.4. Démonstration du théorème de séparation en dimension finie. L'énoncé du théorème a été donné ci-dessus. Rappelons que C est un ensemble convexe dans $\mathbf{R}^N$ et $0 \notin C$.

A) Soit lin C l'*enveloppe linéaire* de l'ensemble C, i.e. le plus petit sous-espace vectoriel contenant C. On a ou bien lin $C \neq \mathbf{R}^N$, ou bien lin $C = \mathbf{R}^N$. Dans le premier cas lin C est un sous-espace propre de $\mathbf{R}^N$ et il existe donc un hyperplan $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = 0$ qui le contient et passe par l'origine. Ce plan sera le plan cherché.

B) Si lin $C = \mathbf{R}^N$, alors, parmi les vecteurs qui appartiennent à C, nous pouvons choisir N vecteurs linéairement indépendants et formant donc une base de $\mathbf{R}^N$. Désignons-les par $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_N$; $\tilde{e}_i \in C$, $i = 1, \ldots, N$.

Considérons dans $\mathbf{R}^N$ deux cônes convexes: l'« octante négative »

$$\mathcal{K}_1 = \left\{x \in \mathbf{R}^N \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \tilde{e}_i, \quad \beta_i < 0, \quad i = 1, \ldots, N\right\}$$

et l'enveloppe conique de l'ensemble C

$$\mathcal{K}_2 = \left\{x \in \mathbf{R}^N \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \xi_i, \ \ \xi_i \in C, \quad \alpha_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, s, \ \ s \text{ quelconque}\right\}.$$

Ces cônes sont disjoints. En effet, si le vecteur $\tilde{x} = -\sum_{i=1}^{N} \tilde{\gamma}_i \tilde{e}_i, \ \tilde{\gamma}_i > 0,$ appartenait à $\mathcal{K}_2$, alors on pourrait trouver des $s \in \mathbf{N}$, $\tilde{\alpha}_i \geqslant 0$ et $\tilde{\xi}_i \in C$ tels que $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{\alpha}_i \tilde{\xi}_i$. Mais alors le point 0 appartiendrait à C, puisqu'il se représente sous forme de combinaison convexe

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \tilde{\alpha}_i \tilde{\xi}_i - \tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \tilde{\alpha}_i \tilde{\xi}_i + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\gamma}_i \tilde{e}_i}{\sum_{i=1}^{s} \tilde{\alpha}_i + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\gamma}_i}$$

de points appartenant à C.

C) Puisque $\mathcal{K}_1$ est ouvert, il découle de B) qu'aucun des points de $\mathcal{K}_1$ ne peut appartenir à l'adhérence $\overline{\mathcal{K}}_2$ de l'ensemble $\mathcal{K}_2$. (Notons que $\overline{\mathcal{K}}_2$ est fermé et convexe. Pourquoi?) Considérons un point arbitraire de $\mathcal{K}_1$, par exemple, $x_0 = -\sum_{i=1}^{N} \tilde{e}_i$ et trouvons le point $\xi_0 \in \overline{\mathcal{K}}_2$ le plus proche. Un tel point existe; à savoir, c'est celui des points de l'ensemble compact $\overline{\mathcal{K}}_2 \cap B(x_0, |x_0|)$ auquel la fonction $f(x) = |x - x_0|$ atteint son minimum.

D) Considérons l'hyperplan H qui passe par ξ_0 perpendiculairement à $x_0 - \xi_0$ et montrons que c'est le plan cherché, i.e. que $0 \in H$ et l'ensemble C est contenu entièrement dans un des deux demi-espaces fermés limités par cet hyperplan. Nous montrerons même plus, à savoir: si $\mathring{H}$ est l'intérieur de celui des deux demi-espaces qui contient le point x_0, alors $\mathring{H} \cap \overline{\mathcal{K}}_2 = \varnothing$. Puisque l'ensemble C est contenu dans $\overline{\mathcal{K}}_2$, il est entièrement contenu dans le demi-espace fermé complémentaire à $\mathring{H}$.

Supposons le contraire, et soit $\xi_1 \in \mathring{H} \cap \overline{\mathcal{K}}_2$. Alors l'angle $\widehat{x_0 \xi_0 \xi_1}$ est aigu. En outre, on a $[\xi_0, \xi_1] \in \overline{\mathcal{K}}_2$, puisque $\overline{\mathcal{K}}_2$ est convexe. Abaissons à partir de x_0 sur la droite (ξ_0, ξ_1) la perpendiculaire (x_0, ξ_2), $\xi_2 \in (\xi_0, \xi_1)$ et montrons que ξ_0 n'est pas le point de $\overline{\mathcal{K}}_2$ le plus proche de x_0. En effet, les points ξ_0, ξ_1 et ξ_2 sont situés sur une même droite et $\xi_2 \in \mathring{H}$ (pourquoi?). Si l'on a $\xi_2 \in [\xi_0, \xi_1]$, alors $\xi_2 \in \overline{\mathcal{K}}_2$ et $|x_0 - \xi_2| < |x_0 - \xi_0|$ (la perpendiculaire est plus courte que l'oblique). Mais si ξ_1 se trouve entre ξ_0 et ξ_2, alors $|x_0 - \xi_1| < |x_0 - \xi_0|$ (de deux droites obliques la plus courte sera celle dont le pied est plus proche du pied de la perpendiculaire).

D'autre part, H passe par le point 0, car autrement le rayon issu de 0 dans la direction du point ξ_0 et entièrement contenu dans $\mathscr{K}_2$ (pourquoi?) aurait nécessairement des points communs avec $\mathring{H}$.

§ 1.4. Problème élémentaire du calcul des variations classique et ses généralisations

1.4.1. Equation d'Euler. Peu après les travaux de Jean Bernoulli sur le brachistochrone, de nombreux nouveaux problèmes du même type virent le jour (et furent résolus). Bernoulli proposa à son élève Euler de chercher une méthode générale pour les résoudre.

En 1744, Euler publia son ouvrage *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (*Méthode pour trouver les courbes qui possèdent des propriétés de maximum ou de minimum, ou la résolution du problème isopérimétrique considéré dans son sens le plus large*), dans lequel il posa les bases théoriques d'une nouvelle branche de l'analyse mathématique. En particulier, en se servant de l'approximation des courbes par les lignes brisées, Euler trouva une équation différentielle du second ordre à laquelle doivent satisfaire les extrémales. Par la suite, Lagrange l'appela *équation d'Euler*. En 1759, le premier travail de Lagrange dans cette direction vit le jour et avec lui des nouvelles méthodes de recherche. Lagrange « *fait varier* » la courbe susceptible de donner un extrémum, *distingue dans les accroissements des fonctionnelles les parties linéaires principales*, qu'il appelle *variations*, et se sert du fait qu'aux points d'extrémum la variation doit s'annuler. La méthode de Lagrange devint par la suite universelle. C'est à l'aide de cette méthode que nous déduirons dans ce qui suit l'équation d'Euler. Notons également qu'après les travaux de Lagrange, Euler proposa d'appeler toute la branche des mathématiques à laquelle la méthode de Lagrange était applicable le *calcul des variations*.

Passons à la démonstration de l'équation d'Euler pour le problème élémentaire du calcul des variations classique. C'est ainsi que nous avons appelé, dans 1.2.6, le problème d'extrémum suivant

$$\mathscr{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\,dt \to \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (1)$$

considéré dans l'espace des fonctions à dérivées continues $C^1([t_0, t_1])$, $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$. L'espace $C^1([t_0, t_1])$ est un espace de Banach, i.e. c'est un espace normé complet relativement à la norme :

$$\| x(\cdot) \|_1 = \max \left(\max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|, \max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)| \right).$$

Nous supposerons que la fonction L (on l'appelle *intégrante* ou *lagrangien* du problème) est continue relativement à toutes ses variables ainsi que ses dérivées partielles L_x et $L_{\dot{x}}$.

Théorème (condition nécessaire d'extrémum pour le problème élémentaire du calcul des variations classique). *Supposons que la fonction* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ *donne un extrémum local pour le problème* (1); *alors elle vérifie l'équation*

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) + L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 0. \tag{2}$$

L'équation (2) est appelée *équation d'Euler*. La fonction admissible $\hat{x}(\cdot)$ pour laquelle elle est satisfaite est appelée *point stationnaire* du problème (1) ou *extrémale*. Ainsi les extrémums locaux du problème sont des extrémales; la réciproque est en général fausse.

Un extrémum local dans l'espace $C^1([t_0, t_1])$ est appelé *extrémum faible* en calcul des variations. D'après les définitions générales, la fonction $\hat{x}(\cdot)$ donne un minimum (maximum) local au problème (1) dans l'espace $C^1([t_0, t_1])$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ vérifiant $x(t_0) = x(t_1) = 0$ et $\|x(\cdot)\|_1 \leqslant \varepsilon$, on a l'inégalité:

$$\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) \quad (\leqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))).$$

Nous démontrerons le théorème deux fois. D'abord en nous servant du raisonnement de Lagrange. Il est vrai qu'il nous faudra alors supposer que la fonction $t \mapsto L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ est continûment différentiable. Nous démontrerons ensuite l'important lemme de Dubois-Raymond, qui implique notre théorème sans hypothèse supplémentaire. Une généralisation de la construction de Dubois-Raymond sera essentielle au chapitre IV.

La démonstration du théorème s'effectue en trois étapes.

A) Définition de la première variation d'après Lagrange. Soit $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$. Envisageons la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot))$. On a

$$\varphi(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \lambda)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{x}(t))\, dt.$$

Les contraintes imposées à L permettent, pour calculer la dérivée $\varphi(0)$, de différentier la fonction F sous le signe de l'intégrale (pour cela il suffit que les fonctions $(t, \lambda) \mapsto F(t, \lambda)$ et $(t, \lambda) \mapsto \frac{\partial F}{\partial \lambda}(t, \lambda)$

soient continues ([6], vol. 2, p. 661 ; [11], vol. 2, p. 107). En calculant la dérivée et en substituant $\lambda = 0$, on obtient

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)\,x(t) + p(t)\,\dot{x}(t))\,dt, \tag{3}$$

où

$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad q(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)). \tag{3a}$$

Ainsi la limite $\lim\limits_{\lambda\to 0} (\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))/\lambda)$ existe pour toute fonction $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$. Désignons cette limite par $\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot))$. La fonction $x(\cdot) \mapsto \delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot))$ est appelée *première variation de Lagrange de la fonctionnelle* $\mathcal{J}$.

B) Transformation de la première variation, obtenue en intégrant par parties. Supposons que $x(t_0) = x(t_1) = 0$ et que la fonction $p(\cdot)$ est continûment différentiable. D'après Lagrange, on a

$$\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)\,x(t) + p(t)\,\dot{x}(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,x(t)\,dt, \tag{4}$$

où $a(t) = -\dot{p}(t) + q(t)$ (le produit $p(t)\,x(t)$ s'annule aux extrémités de l'intervalle d'intégration).

Nous savons que $\hat{x}(\cdot)$ donne un extrémum local; pour fixer les idées, supposons que c'est un minimum pour le problème (1). Il en découle que la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ possède un minimum local à l'origine. D'après le théorème de Fermat (voir 1.3.1), on a $\varphi'(0) = \delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot)) = 0$. En comparant ceci avec (4), nous voyons que pour une fonction quelconque $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ vérifiant $x(t_0) = x(t_1) = 0$, on a l'égalité $\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,x(t)\,dt = 0$.

C) Lemme fondamental du calcul des variations classique. (Lemme de Lagrange.) *Supposons que la fonction continue* $t \mapsto a(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ *vérifie l'égalité* $\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,x(t)\,dt = 0$ *pour toute fonction* $x(\cdot)$ *continûment différentiable et telle que* $x(t_0) = x(t_1) = 0$. *On a alors* $a(t) \equiv 0$.

Démonstration. Supposons que $a(\tau) \neq 0$ dans un certain point $\tau \in [t_0, t_1]$. Puisque $a(\cdot)$ est continue, on peut trouver un intervalle fermé $\Delta = [\tau_1, \tau_2] \subset (t_0, t_1)$ sur lequel $a(\cdot)$ ne s'annule

pas. Supposons, pour fixer les idées, que $a(t) \geqslant \alpha > 0$, $t \in \Delta$. Construisons la fonction

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} (t-\tau_1)^2 (t-\tau_2)^2, & t \in \Delta, \\ 0, & t \notin \Delta. \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\tilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$; en outre, $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}(t_1) = 0$. D'après l'hypothèse du lemme, $\int_{t_0}^{t_1} a(t)\tilde{x}(t)\,dt = 0$. D'autre part, d'après le théorème de la moyenne ([6], vol. 2, p. 115 ; [11], vol. 1, p. 344), on a

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\tilde{x}(t)\,dt = a(\xi)\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}(t)\,dt > 0,$$

et cette contradiction démontre le lemme. ■

En comparant ce que nous avons obtenu dans A) et C), nous voyons que $-\dot{p}(t) + q(t) \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer.

D) Lemme de Dubois-Raymond. *Supposons que les fonctions $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ sont continues sur $[t_0, t_1]$ et que*

$$\int_{t_0}^{t_1} (a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t))\,dt = 0 \tag{5}$$

pour toute fonction $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ est telle que $x(t_0) = x(t_1) = 0$. Alors la fonction $a(\cdot)$ est continûment différentiable et $da(t)/dt = b(t)$.

Démonstration. En calculant dans (5) l'intégrale du deuxième terme $b(t)x(t)$ par parties, on obtient

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(a(t) - \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right)\dot{x}(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\,x(t)\Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(a(t) - \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right)\dot{x}(t)\,dt. \tag{6}$$

Démontrons que $\varphi(t) = a(t) - \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds = \text{Cte}$. Si c'était faux, on pourrait trouver des τ_1 et τ_2 tels que $\varphi(\tau_1) \neq \varphi(\tau_2)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que τ_1 et τ_2 sont des points intérieurs du segment $[t_0, t_1]$ et $\varphi(\tau_1) > \varphi(\tau_2)$. Choisissons $\delta > 0$ de manière à avoir $[\tau_i - \delta, \tau_i + \delta] \subset [t_0, t_1]$, $i = 1, 2$ et $\varphi(s + \tau_1) - \varphi(s + \tau_2) \geqslant \alpha > 0$ pour $|s| \leqslant \delta$.

Prenons une fonction $x(\cdot)$ dont la dérivée a la forme spéciale suivante

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -(t-\tau_1+\delta)(t-\tau_1-\delta), & t \in [\tau_1-\delta, \tau_1+\delta], \\ +(t-\tau_2+\delta)(t-\tau_2-\delta), & t \in [\tau_2-\delta, \tau_2+\delta], \\ 0 \text{ pour les autres } t. \end{cases} \tag{7}$$

Si l'on pose $x(t_0)=0$, on aura d'après (7), $x(t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,dt=0$, de sorte que pour une telle fonction $x(\cdot)$ on doit avoir (6), mais

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[a(t)-\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right]\dot{x}(t)\,dt=\int\limits_{\tau_1-\delta}^{\tau_1+\delta}\varphi(t)\,\dot{x}(t)\,dt+\int\limits_{\tau_2-\delta}^{\tau_2+\delta}\varphi(t)\,\dot{x}(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\delta}^{\delta}(\varphi(\tau_1+s)-\varphi(\tau_2+s))(\delta-s)(s+\delta)\,ds\geqslant\alpha\int\limits_{-\delta}^{\delta}(\delta-s)(s+\delta)\,ds>0.$$

Cette contradiction montre que $\varphi(t)=a(t)-\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,ds=\text{Cte}$; alors $a(\cdot)$ est différentiable et $da/dt=b$. ■

En appliquant le lemme de Dubois-Raymond à la première variation (3), on obtient $p(\cdot)\in C^1([t_0, t_1])$ et $\dot{p}(t)=q(t)$.

Les raisonnements que nous venons d'effectuer contiennent sous forme embryonnaire ce que l'on appelle la *méthode des variations*, méthode qui permet de déduire diverses conditions nécessaires d'extrémum. Essentiellement, cette méthode est la suivante. Soit $\hat{x}$ un point susceptible de donner un minimum au problème $f(x)\to\inf$, $x\in C$. On peut alors essayer de construire une application continue $\lambda\mapsto x(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{R}_+$ de manière à avoir $x(0)=\hat{x}$ et $x(\lambda)\in C$, $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$. Il est naturel d'appeler cette courbe variation de l'argument. Posons $\varphi(\lambda)=f(x(\lambda))$. Supposons que la fonction φ est différentiable à droite relativement à λ. Si $\hat{x}$ est effectivement un point de minimum, on doit avoir l'inégalité $\varphi'(+0)=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}(\varphi(\lambda)-\varphi(0))/\lambda\geqslant 0$, car, évidemment, $\varphi(\lambda)\geqslant\varphi(0)=f(\hat{x})$. Si l'on arriverait à construire un ensemble de variations de l'argument suffisamment massif, alors la famille des inégalités obtenues $\varphi'(+0)\geqslant 0$, qui se rapportent à toutes les variations, nous donnerait une certaine condition nécessaire de minimum. Pour déduire les équations d'Euler, on s'est servi des « variations dans une direction donnée »: $x(\lambda)=\hat{x}+\lambda x$. Pour obtenir les conditions nécessaires de Weierstrass et le principe du maximum, nous nous servirons de variations d'un autre type: les variations dites « en aiguille » (voir 1.4.4 et 1.5.4).

Pour conclure, notons les deux premières intégrales suivantes de l'équation d'Euler:

1) Si le lagrangien L ne dépend pas de x, l'équation d'Euler possède une intégrale évidente

$$p(t)=L_{\dot{x}}(t, \dot{\hat{x}}(t))=\text{Cte}.$$

Cette intégrale est appelée *intégrale de l'impulsion.*

2) Si le lagrangien L ne dépend pas de t, l'équation d'Euler possède la première intégrale suivante

$$H(t) = L_{\dot{x}}(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t))\,\dot{\hat{x}}(t) - L(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t)) = \text{Cte}.$$

On l'appelle *intégrale d'énergie* (ces deux termes proviennent de la mécanique classique; nous aurons encore l'occasion d'y revenir; voir 4.4.6 et 4.4.7). Pour la démonstration, calculons la dérivée

$$\frac{dH}{dt} = L_{\dot{x}}(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t))\,\ddot{\hat{x}}(t) + \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t))\,\dot{\hat{x}}(t) -$$

$$- L_x(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t))\,\dot{\hat{x}}(t) - L_{\dot{x}}(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t))\,\ddot{\hat{x}}(t) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t)) - L_x(\hat{x}(t);\ \dot{\hat{x}}(t))\right)\dot{\hat{x}}(t) = 0$$

d'après l'équation d'Euler. Par conséquent, $H(t) = \text{Cte}$.

R e m a r q u e. Dans ce calcul, nous avons utilisé l'hypothèse supplémentaire affirmant l'existence de la deuxième dérivée $\ddot{\hat{x}}(t)$. Cette hypothèse peut être affaiblie, mais il est impossible de s'en passer entièrement.

Remarquons aussi que l'équation d'Euler est une équation différentielle du second ordre. Son intégrale générale dépend (dans la plupart des cas) de deux constantes arbitraires. Leurs valeurs se déterminent à partir des conditions aux limites.

1.4.2. Conditions nécessaires dans le problème de Boltz. Conditions de transversalité. Le problème élémentaire envisagé dans le sous-paragraphe précédent est un problème à contraintes: les conditions aux limites $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ nous donnent des contraintes sous forme d'égalités. Le problème suivant, appelé problème de Boltz, est un problème sans contraintes. Supposons que L vérifie les mêmes conditions que dans 1.4.1 et soit $l = l(x_0, x_1)$ une fonction de deux variables continûment différentiable. Envisageons le problème d'extrémum suivant dans l'espace $C^1([t_0, t_1])$:

$$\mathscr{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x,\ \dot{x})\,dx + l(x(t_0),\ x(t_1)) \to \text{extr.} \tag{1}$$

C'est ce problème qui est appelé *problème de Boltz*.

T h é o r è m e (c o n d i t i o n n é c e s s a i r e d'e x t r é m u m p o u r l e p r o b l è m e d e B o l t z). *Supposons que la fonction $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ donne un minimum local pour le problème*

(1). *On a alors l'équation d'Euler*

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) + L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 0 \quad (2)$$

et les conditions de transversalité

$$L_{\dot{x}}(t_0, \hat{x}(t_0), \dot{\hat{x}}(t_0)) = \frac{\partial l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))}{\partial x_0},$$

$$L_{\dot{x}}(t_1, \hat{x}(t_1), \dot{\hat{x}}(t_1)) = -\frac{\partial l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))}{\partial x_1}. \quad (3)$$

Démonstration. En raisonnant exactement comme dans la première étape de la démonstration du théorème du sous-paragraphe précédent, nous obtenons l'expression suivante pour la première variation de la fonctionnelle $\mathscr{B}$:

$$\delta\mathscr{B}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (q(t) x(t) + p(t) \dot{x}(t)) \, dt + \alpha_0 x(t_0) + \alpha_1 x(t_1), \quad (4)$$

où $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ se déterminent par les relations (3a) du sous-paragraphe précédent, tandis que $\alpha_i = \frac{\partial l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))}{\partial x_i}$, $i = 0, 1$. Puisque $\hat{x}(\cdot)$ est un point de minimum local, on a $\delta\mathscr{B}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot)) = 0$ pour chaque $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$. En particulier, $\delta\mathscr{B}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot)) = 0$ quel que soit $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ vérifiant $x(t_0) = x(t_1) = 0$. D'après le lemme de Dubois-Raymond, la fonction $p(\cdot)$ est continûment différentiable, et l'on a $\frac{dp(t)}{dt} = q(t)$. En intégrant dans (4) par parties et en nous servant de l'égalité $\dot{p}(t) = q(t)$, nous obtenons l'expression suivante pour la première variation de Lagrange de la fonctionnelle de Boltz:

$$0 = \delta\mathscr{B}(\hat{x}(\cdot); x(\cdot)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (q(t) - \dot{p}(t)) x(t) \, dt + (\alpha_0 - p(t_0)) x(t_0) +$$
$$+ (\alpha_1 + p(t_1)) x(t_1) = (\alpha_0 - p(t_0)) x(t_0) + (\alpha_1 + p(t_1)) x(t_1). \quad (5)$$

Si l'on pose successivement $x(t) = t - t_0$ et ensuite $t - t_1$ dans (5), on obtient $\alpha_0 = p(t_0)$, $-\alpha_1 = p(t_1)$. ■

Ainsi nous avons à nouveau obtenu une équation du second ordre et deux conditions aux limites: les conditions de transversalité.

Ci-dessus nous avons considéré le problème de Boltz en dimension 1. D'une manière tout à fait analogue, on pose le problème vectoriel

$$\mathscr{B}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\,dt+$$
$$+\, l(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (1')$$

où

$$L\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, \qquad l\colon \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}.$$

Les conditions nécessaires d'extrémum sont ici également de la forme (2), (3), sauf que les équations correspondantes doivent être envisagées comme des équations vectorielles:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_j}(t_1, \hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t), \dot{\hat{x}}_1(t), \ldots, \dot{\hat{x}}_n(t))+$$
$$+ L_{x_j}(t, \hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t), \dot{\hat{x}}_1(t), \ldots, \dot{\hat{x}}_n(t))=0, \qquad (2')$$

$$L_{\dot{x}_j}(t_i, \hat{x}_1(t_i), \ldots, \hat{x}_n(t_i), \dot{\hat{x}}_1(t_i), \ldots, \dot{\hat{x}}_n(t_i))=$$
$$=(-1)^i \frac{\partial l(\hat{x}_1(t_0), \ldots, \hat{x}_n(t_0), \hat{x}_1(t_1), \ldots, \hat{x}_n(t_1))}{\partial x_{ij}}, \qquad (3')$$
$$i=0, 1; \quad j=1, \ldots, n.$$

1.4.3. Généralisation du problème élémentaire. Le problème élémentaire du calcul des variations classique avait été envisagé dans 1.4.1 dans l'espace $C^1([t_0, t_1])$. Ceci est une concession à l'usage traditionnel. L'espace $C^1([t_0, t_1])$ est évidemment commode, mais il est loin d'être naturel pour tous les problèmes. En particulier, sous les hypothèses relativement à l'intégrante (continuité de L, L_x, $L_{\dot{x}}$ par rapport au système de variables $(t, x, \dot{x})$), l'existence de la solution dans l'espace $C^1([t_0, t_1])$ n'est pas toujours garantie. Considérons un des exemples les plus simples.

Exemple de Hilbert. Considérons le problème

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2\,dt \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1.$$

Ici l'équation d'Euler possède l'intégrale de l'impulsion (voir 1.4.1) suivante: $t^{2/3}\dot{x}=C$, d'où l'on tire que l'unique extrémale admissible est $\hat{x}(t)=t^{1/3}$. Cette extrémale n'appartient pas à l'espace $C^1([t_0, t_1])$ (pourquoi?). Néanmoins, elle nous donne le minimum

absolu dans le problème envisagé. En effet, supposons que $x(\cdot)$ est une fonction absolument continue quelconque [1]) pour laquelle l'intégrale $\mathcal{J}(x(\cdot))$ est finie et $x(0) = x(1) = 0$. Alors

$$\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) = \int_0^1 t^{2/3} (\dot{\hat{x}}^2(t) + 2\dot{\hat{x}}(t)\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t))\, dt =$$

$$= \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) + \frac{2}{3}\int_0^1 \dot{x}(t)\, dt + \mathcal{J}(x(\cdot)) = \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) + \mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)).$$

Ainsi la solution du problème existe, mais n'appartient pas à l'espace $C^1([t_0, t_1])$.

Parmi les célèbres problèmes de Hilbert, certains se rapportent au calcul des variations. En particulier, dans le vingtième problème, il s'agit de l'existence des solutions. Hilbert écrit [2]): « Je suis convaincu que ces démonstrations d'existence peuvent être effectuées à l'aide d'une méthode fondamentale générale, indiquée par le principe de Dirichlet, et qui, sans doute, nous approchera de la question d'existence de la solution d'un problème variationnel régulier quelconque, à condition toutefois d'élargir l'interprétation de la notion de solution elle-même. » L'optimisme de Hilbert se fonde sur l'énorme expérience acquise par l'analyse classique. Ici nous nous arrêterons brièvement au problème de l'interprétation élargie de la notion de solution en prenant l'exemple du problème élémentaire du calcul des variations.

Une des constructions utiles à cet élargissement consiste à ajouter à la classe originale d'éléments admissibles de nouveaux éléments et de définir la fonctionnelle en question sur ceux-ci. Nous effectuerons dans cette direction un trajet modeste: nous élargirons le problème élémentaire à la classe des fonctions différentiables par morceaux.

Rappelons qu'une fonction différentiable par morceaux sur $[t_0, t_1]$ est une fonction $x(\cdot)$ qui possède la propriété suivante: elle est elle-même continue, tandis que sa dérivée est continue par morceaux, i.e. continue partout sur $[t_0, t_1]$, à l'exception d'un nombre fini de points $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < t_1$, et en chacun des points τ_i la dérivée $\dot{x}(\cdot)$ possède des discontinuités de première espèce.

---

[1]) Les fonctions absolument continues seront considérées dans 2.1.8. Le lecteur qui n'est pas familier avec cette notion peut supposer que $x(\cdot)$ est continue, continûment dérivable dans le demi-intervalle $(0, 1]$ et possède une intégrale finie $\mathcal{J}(x(\cdot))$ (entendue dans le sens impropre) et $x(0) = x(1) = 0$.

[2]) *Problèmes de Hilbert* (édités par P. S. Alexandrov), Moscou, Editions Naouka, 1969, p. 55.

Par exemple, la fonction

$$x(t)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant t\leqslant 0, \\ t^2\sin\frac{1}{t}, & 0<t, \end{cases}$$

possède une dérivée qui n'est pas continue par morceaux. L'ensemble de toutes les fonctions différentiables par morceaux sur $[t_0, t_1]$ sera désigné par $KC^1([t_0, t_1])$.

La fonctionnelle intégrale

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \tag{1}$$

(comparer à 1.4.1) se prolonge naturellement aux éléments $x(\cdot)\in KC^1([t_0, t_1])$, puisque pour de telles fonctions $x(\cdot)$ l'expression sous le signe de l'intégrale est une fonction continue par morceaux et l'intégrale existe.

Envisageons maintenant le problème élémentaire

$$\mathcal{J}(x(\cdot))\to \text{extr}, \quad x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1 \tag{2}$$

dans l'espace $KC^1([t_0, t_1])$. A la fin du présent sous-paragraphe, nous montrerons un exemple d'une fonction L qui vérifie les conditions standards, pour laquelle le problème (2) n'a pas de solution dans l'espace $C^1([t_0, t_1])$ mais en possède une dans $KC^1([t_0, t_1])$, de sorte que l'élargissement effectué du problème s'avère raisonnable (quoique dans l'exemple de Hilbert, le minimum ne s'atteigne pas dans KC^1 non plus).

Il faut être un peu plus précis avec la notion de solution locale. Si nous continuons à inclure, dans les voisinages de l'élément $\hat{x}(\cdot)\in KC^1([t_0, t_1])$, les fonctions $x(\cdot)$ telles que les différences $x(t)-\hat{x}(t)$, de même que leurs dérivées, soient petites (voir la définition d'un extrémum faible dans 1.4.1), alors les éléments supplémentaires seront situés loin des anciens éléments. En effet, si la dérivée $\dot{\hat{x}}(\cdot)$ possède en un certain point une discontinuité de grandeur δ, aucune des fonctions $x(\cdot)\in C^1([t_0, t_1])$ ne peut vérifier l'inégalité $|\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)|<\delta/2$ pour tous les t (pour lesquels $\dot{\hat{x}}(t)$ existe). En fait, ceci n'est pas commode: en règle générale, on voudrait que l'ancien espace soit partout dense dans l'espace élargi. Par conséquent, nous considérerons les fonctions proches de $KC^1([t_0, t_1])$ lorsque les fonctions elles-mêmes sont proches, sans prêter attention à leurs dérivées. Ceci nous amène à remplacer la notion d'extrémum faible (voir 1.4.1) par celle d'extrémum fort.

D é f i n i t i o n. *La fonction* $\hat{x}(\cdot)\in KC^1([t_0, t_1])$ *fournit un minimum (maximum) fort au problème* (2), *s'il existe un* $\varepsilon>0$ *tel que*

pour chaque $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$ *vérifiant* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ *et*

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_0 = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \tag{3}$$

on a l'inégalité $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ $(\leqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)))$.

Lemme d'arrondissement des angles. 1) *Si la fonction* $L = L(t, x, \dot{x})$ *est continue* (*comme fonction de* $(t, x, \dot{x})$), *alors*

$$\inf_{\substack{x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1]) \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1}} \mathcal{J}(x(\cdot)) = \inf_{\substack{x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]) \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1}} \mathcal{J}(x(\cdot)). \tag{4}$$

2) *L'inégalité* (4) *reste valable si l'on prend seulement les fonctions* $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$ *qui vérifient les inégalités* (3) *pour les* $\hat{x}(\cdot)$ *et* $\varepsilon > 0$ *donnés.*

3) *L'assertion reste vraie si l'on remplace* inf *par* sup.

Démonstration. Puisque $KC^1([t_0, t_1]) \supset C^1([t_0, t_1])$, le premier membre de (4) n'est pas supérieur au deuxième et il suffit de démontrer l'inégalité inverse. Admettons le contraire. Si $\inf_{KC^1} \mathcal{J}(x(\cdot)) < \inf_{C^1} \mathcal{J}(x(\cdot))$, on peut trouver une fonction $\tilde{x}(\cdot)$ différentiable par morceaux et un $\eta > 0$ tels que $\mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot)) < \inf_{C^1} \mathcal{J}(x(\cdot)) - \eta$. Soient τ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, les points où la dérivée $\dot{\tilde{x}}$ est discontinue et $\Delta_i = \dot{\tilde{x}}(\tau_i + 0) - \dot{\tilde{x}}(\tau_i - 0)$ ses discontinuités en ces points.

Sur l'ensemble fermé borné

$$\overline{\mathcal{K} = \{(t, x, \dot{x}) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ t \neq \tau_i;\ |x - \tilde{x}(t)| \leqslant} \\ \overline{\leqslant \max |\Delta_i| \delta_0/4,\ |\dot{x} - \dot{\tilde{x}}(t)| \leqslant \max |\Delta_i|/2\}}$$

la fonction continue L est bornée: $|L(t, x, \dot{x})| \leqslant M$.

La fonction

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{(1 - |t|)^2}{4}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \tag{5}$$

est continue et sa dérivée, pour $t = 0$, possède une discontinuité de grandeur -1. Par conséquent, la fonction $\delta a\left(\frac{t - \tau_i}{\delta}\right)$, dont le graphique s'obtient du graphique de $a(\cdot)$ par similitude et translation (fig. 22), est également continue et sa dérivée est continue partout sauf au point τ_i, où elle possède toujours une discontinuité de grandeur -1.

On vérifie maintenant sans difficulté que la fonction

$$x_\delta(t)=\tilde{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\delta a\left(\frac{t-\tau_i}{\delta}\right)$$

est continue avec sa dérivée sur $[t_0, t_1]$ et l'on a $x_\delta(t)\equiv\tilde{x}(t)$ en dehors des segments $[\tau_i-\delta, \tau_i+\delta]$. En particulier, pour δ suffisamment petit, ces segments sont disjoints, $x_\delta(t_i)=\tilde{x}(t_i)=x_i$,

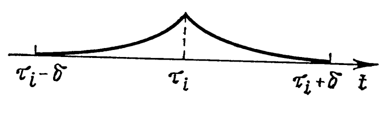


Fig. 22

$i=0, 1$, et $|x_\delta(t)-\tilde{x}(t)|\leqslant\max|\Delta_i|\delta/4$, $|\dot{x}_\delta(t)-\dot{\tilde{x}}(t)|\leqslant\leqslant\max|\Delta_i|/2$, car d'après (5) on a $|a(t)|\leqslant 1/4$, $|\dot{a}(t)|\leqslant 1/2$. Ainsi, pour $0<\delta<\delta_0$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(x_\delta(\cdot))-\mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot))&=\\&=\int_{t_0}^{t_1}L(t, x_\delta(t), \dot{x}_\delta(t))\,dt-\int_{t_0}^{t_1}L(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))\,dt=\\&=\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i-\delta}^{\tau_i+\delta}(L(t, x_\delta(t), \dot{x}_\delta(t))-L(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)))\,dt\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(x_\delta(\cdot))&\leqslant\mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot))+4m\delta M<\\&<\inf_{C^1}\mathcal{J}(x(\cdot))-\eta+4m\delta M<\inf_{C^1}\mathcal{J}(x(\cdot)),\end{aligned}$$

si δ est suffisamment petit. Puisque $x_\delta(\cdot)\in C^1([t_0, t_1])$, nous avons obtenu une contradiction. Pour des δ suffisamment petits, la fonction $x_\delta(\cdot)$ vérifie les inégalités (3) si la fonction $\tilde{x}(\cdot)$ les vérifie. D'où l'on obtient la deuxième assertion du lemme. La troisième est évidente. ■

C o r o l l a i r e. *Si la fonction* $\hat{x}(\cdot)\in C^1([t_0, t_1])$ *fournit dans le problème* (2) *un minimum* (*maximum*) *absolu ou fort dans l'espace* $C^1([t_0, t_1])$, *alors elle possède la même propriété dans l'espace* $KC^1([t_0, t_1])$.

L'élargissement de l'espace que nous venons d'effectuer n'est pas toujours suffisant. En outre, l'espace $KC^1([t_0, t_1])$ n'est pas

complet (relativement à la métrique définie par le premier membre de (3)). Il serait plus naturel d'élargir le problème à la classe $W^1_\infty([t_0, t_1])$ des fonctions qui vérifient la condition de Lipschitz [1]. Mais ceci nécessiterait des informations supplémentaires provenant de la théorie des fonctions. Il y a aussi une autre construction importante d'élargissement du problème élémentaire que nous discuterons ici sur un exemple.

Exemple de Boltz. Considérons le problème

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_0^1 ((1-\dot{x}^2)^2 + x^2)\,dt \to \inf,$$
$$x(0)=0, \quad x(1)=\xi.$$

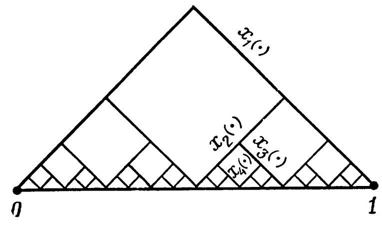


Fig. 23

Supposons que $\xi = 0$. Il est alors clair que le problème n'a pas de solution. En effet, la borne inférieure de la fonctionnelle est nulle. Pour le comprendre, il suffit de considérer la suite de fonctions minimisantes appartenant à $KC^1([0, 1])$:

$$x_n(t) = \int_0^t \operatorname{sign} \sin 2\pi 2^{n-1}\tau\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ (fig. 23).}$$

Les fonctions $x_n(\cdot)$ tendent uniformément vers zéro et $\dot{x}_n^2(t) \equiv 1$, sauf pour un nombre fini de points, i.e. $\mathcal{J}(x_n(\cdot)) = \int_0^1 x_n^2(t)\,dt \to 0$. D'autre part, si $x_0(\cdot) \equiv 0$, on a $\mathcal{J}(x_0(\cdot)) = 1$, tandis que si $x(\cdot) \not\equiv 0$, on a $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \int_0^1 x^2\,dt > 0$.

C'est que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ n'est pas semi-continue par en bas: nous avons établi que dans tout voisinage de la fonction $x_0(\cdot) \equiv 0$, où la fonctionnelle prend la valeur 1, il y a des fonctions où la valeur de la fonctionnelle est considérablement plus petite ($\mathcal{J}(x_n(\cdot)) \to 0$). Ainsi, un élargissement « semi-continu par en bas » du problème est possible: on y remplace la fonctionnelle $\mathcal{J}$ par la fonctionnelle

$$\mathcal{Y}(x(\cdot)) = \varliminf_{y(\cdot)\to x(\cdot)} \mathcal{J}(y(\cdot)),$$

---

[1] Remarquons toutefois que même cet élargissement ne nous donne pas l'existence dans l'exemple de Hilbert: la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ ne satisfait pas à la condition de Lipschitz.

tandis que l'ensemble des fonctions envisagées au début (mettons, $C^1([t_0, t_1])$ ou $KC^1([t_0, t_1])$) reste le même. Le passage à la limite $y(\cdot) \to x(\cdot)$ est considéré ici dans l'espace $C([t_0, t_1])$ (i.e. dans le sens de la convergence uniforme). Il s'avère que la fonctionnelle $\mathcal{Y}$ possède une description simple. Dans l'exemple de Boltz

$$\mathcal{Y}(x(\cdot)) = \int_0^1 (((\dot{x}^2 - 1)_+)^2 + x^2)\, dt,$$

où

$$(\dot{x}^2 - 1)_+ = \begin{cases} 0, & |\dot{x}| \leqslant 1, \\ \dot{x}^2 - 1, & |\dot{x}| > 1. \end{cases}$$

Dans le cas général, où

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt,$$

$$\mathcal{Y}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{L}(t, x, \dot{x})\, dt,$$

avec $\widetilde{L}$ la « convexisation » de L relativement à $\dot{x}$, i.e. la fonction $\dot{x} \to \widetilde{L}(t, x, \dot{x})$ est la plus grande fonction convexe qui n'est pas supérieure à la fonction $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$. Cette assertion s'appelle *théorème de Bogolioubov.*

Ce même exemple de Boltz peut être employé pour construire une variante du problème (2) dans laquelle le minimum est atteint sur une courbe possédant un angle. Toutefois, pour des raisons purement techniques, nous considérerons un autre problème:

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (f(\dot{x}) + x^2)\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{6}$$

où la fonction

$$f(u) = ((|u| - 1)_+)^2 = \begin{cases} (u-1)^2, & u \geqslant 1, \\ 0, & |u| \leqslant 1, \\ (u+1)^2, & u \leqslant -1, \end{cases}$$

possède une dérivée continue, tout en étant convexe (fig. 24).

En particulier, le graphique de $f(u)$ ne peut être situé plus bas qu'aucune de ses tangentes, i.e. on a toujours

$$f(v) \geqslant f(u) + f'(u)(v - u).$$

Par conséquent, pour deux fonctions quelconques $x(\cdot)$, $\hat{x}(\cdot) \in$ $\in KC^1([t_0, t_1])$ qui vérifient les conditions aux limites données

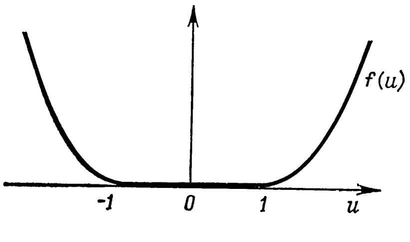


Fig. 24

$(x(t_i) = \hat{x}(t_i) = x_i,\ i = 0,\ 1)$, on a

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (f(\dot{x}(t)) - f(\dot{\hat{x}}(t)) + x^2(t) - \hat{x}^2(t))\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_1} (f'(\dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + (x(t) - \hat{x}(t))^2)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_1} (f'(\dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t)))\, dt.$$

Supposons maintenant que $\hat{x}(\cdot)$, en tous ses points de différentiabilité, vérifie l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dt} f'(\dot{\hat{x}}(t)) = 2\hat{x}(t). \tag{7}$$

En intégrant par parties sur chaque segment où $\dot{\hat{x}}(\cdot)$ est continue, on obtient

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt} f'(\dot{\hat{x}}(t)) + 2\hat{x}(t)\right)(x(t) - \hat{x}(t))\, dt +$$

$$+ \sum_i [f'(\dot{\hat{x}}(\tau_i + 0) - f'(\dot{\hat{x}}(\tau_i - 0))(x(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i)) = 0,$$

si, en plus de (7), la fonction $p(t) = f'(\dot{\hat{x}}(t))$ (l'impulsion) est continue. Ainsi, la fonction $\hat{x}(\cdot)$ vérifiant l'équation d'Euler, la con-

dition de continuité de $p(\cdot)$ et les conditions aux limites est une solution du problème (6). Par exemple, $\hat{x}(t) = e^{|t|}$, avec un angle au point $t = 0$, est une solution de ce problème pour $t_0 = -1$, $t_1 = 1$, $x_0 = x_1 = e$. En effet,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} e^t, & t \geqslant 0, \\ e^{-t}, & t < 0, \end{cases}$$

d'où $|\dot{\hat{x}}(t)| \geqslant 1$ et donc la fonction

$$p(t) = f'(\dot{\hat{x}}(t)) = \begin{cases} 2(e^t - 1), & t \geqslant 0, \\ 2(-e^{-t} + 1), & t < 0, \end{cases}$$

n'a pas de cassure au point $t = 0$: $p(+0) = p(-0) = 0$. En outre $\frac{d}{dt} p(t) = 2e^{|t|} = 2\hat{x}(t)$, de sorte que l'équation d'Euler est vérifiée.

1.4.4. Variations en aiguille. Condition de Weierstrass. La notion d'extrémum fort fut introduite dans le calcul des variations par

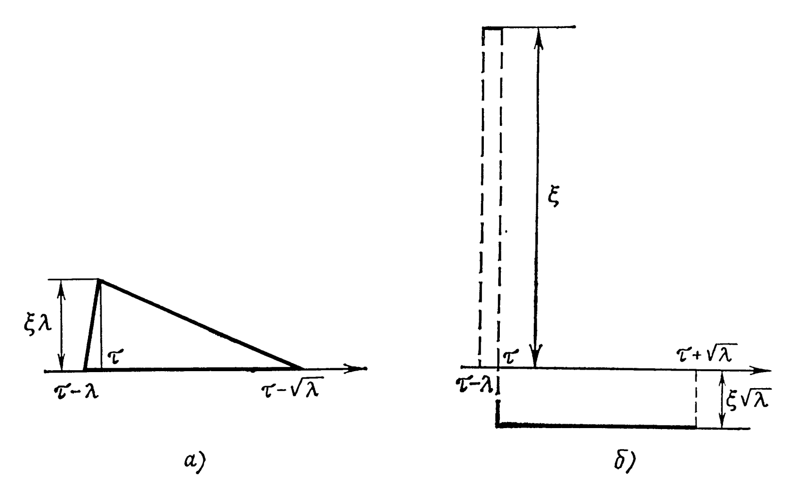


Fig. 25

Weierstrass. Pour démontrer la nécessité de la condition de minimum fort, Weierstrass se servait de variations spéciales de la forme suivante (fig. 25, *a*):

$$h_\lambda(t) = h_\lambda(t;\ \tau,\ \xi) = \begin{cases} \xi\lambda + (t - \tau)\,\xi, & t \in [\tau - \lambda,\ \tau], \\ \xi\lambda - (t - \tau)\,\xi\sqrt{\lambda}, & t \in [\tau,\ \tau + \sqrt{\lambda}], \end{cases}$$
$$x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t). \qquad (1)$$

La dérivée de la variation $h_\lambda(\cdot)$ est de la forme indiquée sur la figure 25, *b*. Cette dérivée rappelle quelque peu une aiguille et c'est pour cela que ces variations sont dites « en aiguille ». Les variations en aiguille sont très commodes pour l'étude des problèmes d'extrémum fort.

Passons à la démonstration de la condition nécessaire de Weierstrass. Considérons le problème élémentaire du calcul des variations classique

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad (2)$$

sur la classe $KC^1([t_0, t_1])$ des fonctions différentiables par morceaux. Supposons que $\hat{x}(\cdot)$ est une extrémale susceptible de donner un minimum fort; pour simplifier, supposons qu'elle est différentiable.

En suivant la méthode générale des variations, envisageons la fonction

$$\varphi(\lambda) = \mathcal{J}(x_\lambda(\cdot)) = \mathcal{J}(x(\cdot) + h_\lambda(\cdot)), \quad (3)$$

où h_λ est déterminée par les formules (1), τ est un point intérieur de $[t_0, t_1]$ et ξ un nombre arbitraire.

Pour des $\lambda \geqslant 0$ suffisamment petits, la fonction $x_\lambda(\cdot)$ est admissible pour le problème (2), i.e. $x_\lambda(t_i) = \hat{x}(t_i) + h_\lambda(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$.

La fonction $\varphi(\cdot)$ est également définie pour λ non négatif. Démontrons qu'elle est différentiable à droite au point zéro. Il découle immédiatement de la définition (1) que

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \| h_\lambda(\cdot) \|_0 = \max_{t \in [t_0, t_1]} | h_\lambda(t) | = O(\lambda), \\ &\text{b)} \quad | \dot{h}_\lambda(t) | = \xi \sqrt{\lambda} = O(\sqrt{\lambda}), \quad t \in (\tau, \tau + \sqrt{\lambda}). \end{aligned} \quad (4)$$

D'où l'on tire

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau} (L(t, x_\lambda(t), \dot{\hat{x}}(t) + \xi) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)))\, dt +$$
$$+ \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} (L(t, x_\lambda(t), \dot{x}_\lambda(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)))\, dt = \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2. \quad (5)$$

On peut estimer l'intégrale $\mathcal{Y}_1$ dans (5) de la manière suivante:

$$\mathcal{Y}_1 = \lambda (L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau))) + o(\lambda) \quad (6)$$

(il faut se servir du théorème de la moyenne du calcul différentiel classique, voir 2.2.3, et de la relation (4a)).

Pour estimer la deuxième intégrale $\mathcal{Y}_2$, représentons la différence

$$\Delta = L(t, \hat{x}(t) + h_\lambda(t), \dot{\hat{x}}(t) + \dot{h}_\lambda(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$$

sous la forme

$$\Delta = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\, h_\lambda(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\, \dot{h}_\lambda(t) + o(\sqrt{\lambda})$$

(là aussi il faut appliquer le même théorème et la relation (4b)); intégrons le deuxième terme par parties et servons-nous du fait que

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x \Big|_{\hat{x}(t)} = 0$$

(puisque $\hat{x}(\cdot)$ est une extrémale). On obtient donc

$$\mathcal{Y}_2 = -\xi\lambda L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) + \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} o(\sqrt{\lambda})\, dt =$$

$$= -\xi\lambda L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) + o(\lambda). \qquad (7)$$

En comparant (6) et (7), on trouve

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \lambda\,(L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) -$$

$$- L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) - \xi L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(t))) + o(\lambda). \qquad (8)$$

Ainsi, la fonction $\varphi(\cdot)$ possède une dérivée à droite au point $\lambda = 0$:

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} =$$

$$= L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) - \xi L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)).$$

Mais si $\hat{x}(\cdot)$ fournit un minimum fort, on a $\mathcal{J}(x_\lambda(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ et donc

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} (\varphi(\lambda) - \varphi(0))/\lambda \geqslant 0,$$

i.e. on a la relation

$$\mathcal{E}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) =$$

$$= L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) -$$

$$- \xi L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) \geqslant 0 \qquad (9)$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $\tau \in [t_0, t_1]$; cette relation s'élargit à $\tau = [t_0, t_1]$ par continuité. La fonction

$$\mathcal{E}(t, x, y, z) = L(t, x, z) - L(t, x, y) - (z - y)\, L_y(t, x, y)$$

est appelée *fonction de Weierstrass.*

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème (condition nécessaire de Weierstrass pour un minimum fort). *Pour que l'extrémale* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ *dans le problème élémentaire du calcul des variations classique* (2) *fournisse un minimum fort, il est nécessaire que pour tout* $\tau \in [t_0, t_1]$ *et tout* $\xi \in \mathbf{R}$ *on aie l'inégalité*

$$\mathscr{E}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)+\xi) = L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)+\xi) - \\ - L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) - \xi L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) \geqslant 0.$$

1.4.5. Problème isopérimétrique et problème aux dérivées d'ordres supérieurs. On appelle généralement *problème isopérimétrique* (à extrémités fixes) dans le calcul des variations le problème suivant

$$\begin{gathered} \mathscr{I}_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, \dot{x})\, dt \to \text{extr}, \\ \mathscr{I}_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, \dot{x})\, dt = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \end{gathered} \tag{1}$$

On suppose que les fonctions f_i vérifient les mêmes conditions que L dans 1.4.1: ces fonctions elles-mêmes et leurs dérivées partielles relativement à x et $\dot{x}$ sont continues. Pour simplifier, envisageons le cas $m = 1$.

Théorème (condition nécessaire d'extrémum pour le problème isopérimétrique). *Supposons que la fonction* $\hat{x}(\cdot)$ *fournit un extrémum local (dans l'espace* $C^1([t_0, t_1])$) *pour le problème*

$$\mathscr{I}_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, \dot{x})\, dt \to \text{extr},$$

$$\mathscr{I}_1(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_1(t, x, \dot{x})\, dt = \alpha_1, \quad x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \tag{1'}$$

tandis que les fonctions $t \mapsto f_{0\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ *et* $t \mapsto f_{1\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ *appartiennent à* $C^1([t_0, t_1])$. *Il existe alors des nombres* $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1$, *qui ne s'annulent pas simultanément et tels que pour l'intégrante*

$L = \hat{\lambda}_0 f_0 + \hat{\lambda}_1 f_1$ *on aie l'équation d'Euler*

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) + L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 0. \tag{2}$$

D é m o n s t r a t i o n. A) De même que nous l'avons fait au début de la démonstration du théorème dans 1.4.1, calculons les premières variations des fonctionnelles $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}_1$ suivant Lagrange:

$$\delta \mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot)\,;\ x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (p_i(t)\dot{x}(t) + q_i(t)x(t))\,dt, \quad i = 0,\ 1, \tag{3}$$

où

$$p_i(t) = f_{i\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad q_i(t) = f_{ix}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)).$$

L'une des deux possibilités suivantes peut arriver: ou bien $\delta\mathcal{J}_1 \equiv 0$, $\forall x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, $x(t_0) = x(t_1) = 0$, ou bien $\delta\mathcal{J}_1 \not\equiv 0$. Dans le premier cas, d'après le théorème de 1.4.1, on a

$$-\frac{d}{dt} f_{1\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) + f_{1x}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = (0),$$

en posant $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{\lambda}_1 = 1$, on obtient immédiatement (2).

B) Supposons que $\delta\mathcal{J}_1 \not\equiv 0$; il existe donc une fonction

$$y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]), \quad y(t_0) = y(t_1) = 0,$$

pour laquelle la variation $\delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot)\,;\ y(\cdot))$ n'est pas nulle. Envisageons les fonctions de deux variables

$$\varphi_i(\alpha, \beta) = \mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot) + \alpha x(\cdot) + \beta y(\cdot)), \quad i = 0,\ 1,$$

en laissant au lecteur le soin de vérifier qu'elles sont continûment différentiables dans un voisinage de zéro et que de plus

$$\frac{\partial \varphi_i(0,\ 0)}{\partial \alpha} = \delta\mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot)\,;\ x(\cdot)),$$

$$\frac{\partial \varphi_i(0,\ 0)}{\partial \beta} = \delta\mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot)\,;\ y(\cdot)).$$

L e m m e. *Pour toute* $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ *vérifiant* $x(t_0) = x(t_1) = 0$, *on a*

$$\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1)}{\partial(\alpha, \beta)}(0,\ 0) = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} \end{matrix}\right|_{(0,\ 0)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \delta\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot)\,;\ x(\cdot)), & \delta\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot)\,;\ y(\cdot)) \\ \delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot)\,;\ x(\cdot)), & \delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot)\,;\ y(\cdot)) \end{matrix}\right| = 0. \tag{4}$$

D é m o n s t r a t i o n. Si le déterminant dans (4) n'est pas nul, l'application $(\alpha, \beta) \mapsto (\varphi_0(\alpha, \beta), \varphi_1(\alpha, \beta))$ envoie un certain voisinage du point (0, 0) sur un certain voisinage du point $(\varphi_0(0, 0), \varphi_1(0, 0))$ (nous nous sommes déjà servis du théorème approprié sur les applications inverses dans 1.3.2). En particulier, on peut trouver des α, β et donc une fonction admissible $\hat{x}(\cdot) + \alpha x(\cdot) + \beta y(\cdot)$ tels que

$$\varphi_0(\alpha, \beta) = \mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot) + \alpha x(\cdot) + \beta y(\cdot)) = \mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot)) - \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$, tandis que $\varphi_1(\alpha, \beta) = \varphi_1(0, 0) = \mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot)) = \alpha_1$. Ceci contredit le fait que $\hat{x}(\cdot)$ fournit un minimum local au problème (1). ■

C) Il découle de l'égalité (4) que

$$\delta\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) - \frac{\delta\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot);\ y(\cdot))}{\delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot);\ y(\cdot))}\,\delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) = 0$$

(le dénominateur est ici non nul par hypothèse). En posant

$$\hat{\lambda}_0 = 1, \quad \hat{\lambda}_1 = -\delta\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot);\ y(\cdot))/\delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot);\ y(\cdot)),$$

nous voyons que

$$\hat{\lambda}_0\delta\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) + \hat{\lambda}_1\delta\mathcal{J}_1(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) \equiv 0 \tag{5}$$

pour toute $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ vérifiant $x(t_0) = x(t_1) = 0$.

On voit facilement que le premier membre de (5) est de la forme

$$\int_{t_0}^{t_1} ((\hat{\lambda}_0 p_0(t) + \hat{\lambda}_1 p_1(t))\,\dot{x}(t) + (\hat{\lambda}_0 q_0(t) + \hat{\lambda}_1 q_1(t))\,x(t))\,dt.$$

En appliquant le lemme fondamental du calcul des variations, nous obtenons l'équation

$$-\frac{d}{dt}(\hat{\lambda}_0 p_0(t) + \hat{\lambda}_1 p_1(t)) + (\hat{\lambda}_0 q_0(t) + \hat{\lambda}_1 q_1(t)) = 0$$

qui coïncide avec (2). ■

Le problème (1′) fut tout d'abord envisagé par Euler dans son célèbre mémoire de 1744. Dans ce même ouvrage, il se servit de la méthode des lignes brisées pour obtenir la relation (2). A vrai dire, ce fut là la principale réalisation de cet article. Sans aucun doute il contenait déjà les débuts de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Pour conclure, passons en revue rapidement le problème aux dérivées d'ordres supérieurs:

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)})\, dt \to \text{extr},$$

$$x^{(j)}(t_i) = x_i^j, \quad i = 0, 1, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Pour les détails, nous renvoyons le lecteur à [1] et [7]. Ce problème sera envisagé ici dans l'espace $C^n([t_0, t_1])$ des fonctions continues avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n sur le segment $[t_0, t_1]$. La fonction f et ses dérivées relativement à $x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}$ seront supposées continues. Soit $\hat{x}(\cdot)$ une fonction susceptible de donner un extrémum. Calculons la première variation de la fonctionnelle selon Lagrange

$$\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{j=0}^{n} p_j(t)\, x^{(j)}(t)\Big)\, dt, \tag{7}$$

où

$$p_j(t) = \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)).$$

Il découle de la condition d'extrémalité locale que $\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) = 0$ lorsqu'on a $x^{(j)}(t_i) = 0$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Calculant l'intégrale de (7) par parties (nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les conditions nécessaires sur la différentiabilité de $p_j(\cdot)$), nous mettrons la première variation sous la forme

$$\delta\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot);\ x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j p_j^{(j)}(t)\Big)\, x(t)\, dt$$

et, en appliquant la généralisation du lemme fondamental du calcul des variations classique au cas des fonctions appartenant à $C^n([t_0, t_1])$ et vérifiant les conditions $x^{(j)}(t_i) = 0$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ (là encore nous laissons au lecteur le soin d'énoncer cette généralisation), nous voyons qu'une condition nécessaire d'extrémum pour $\hat{x}(\cdot)$ est l'équation suivante, appelée *équation d'Euler-Poisson*,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) = 0.$$

§ 1.5. Problème de Lagrange et problème fondamental de commande optimale

1.5.1. Position des problèmes. Une étape importante dans l'histoire des sciences naturelles fut l'ouvrage de Lagrange *Mécanique analytique*, publié en 1788. En particulier, le traité de Lagrange joua un rôle exceptionnel dans le développement du calcul des variations. C'est dans ce livre que fut posé le problème d'extrémum lié suivant:

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{1}$$

$$\Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow \Phi_j(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Ici $x(\cdot): [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$, $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\Phi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Le problème (1) et plusieurs de ses modifications, qui se rapportent à des contraintes supplémentaires (d'autres conditions aux limites, des relations intégrales supplémentaires, etc.; voir également 1.2.6), furent appelés par la suite *problème de Lagrange*. Pour résoudre le problème (1), Lagrange se servait de la méthode fondamentale dont nous avons parlé dans 1.3.2: la méthode des multiplicateurs. D'ailleurs, il n'avait jamais démontré rigoureusement la validité de sa méthode et il fallut attendre plus de cent ans pour que les raisonnements de Lagrange acquièrent la forme d'un théorème rigoureusement démontré.

Notons deux types particuliers de contraintes les plus importants, compris dans l'expression générale (2). La contrainte $\Phi(t, x) = 0$, lorsque la fonction dans (2) ne dépend pas de $\dot{x}$, est appelée *contrainte de phase* dans le calcul des variations. En mécanique, les contraintes de phase sont également appelées *contraintes holonomes*.

L'autre cas est celui où les relations (2) peuvent être résolues relativement aux dérivées $\dot{x}$. Dans ce cas, on écrit les contraintes correspondantes sous forme d'équations

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad x(\cdot): [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n,$$
$$u(\cdot): [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^r, \quad \varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n.$$

On appelle alors les variables $x(\cdot)$ *variables de phase*, et les variables $u(\cdot)$ *variables de commande*. Nous prêterons une attention particulière à ce cas très important. Plus exactement, nous envisagerons le

problème

$$\mathcal{J}(x(\cdot),\ u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,\ x(t),\ u(t))\,dt + \psi_0(x(t_0),\ x(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (1')$$

$$\dot{x} - \varphi(t,\ x,\ u) = 0, \quad \psi(x(t_0),\ x(t_1)) = 0\ (\Leftrightarrow \psi_j(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad j = 1, \ldots, s). \qquad (2')$$

Ici, dans (1'), (2'), $f: V \to \mathbf{R}$, $\varphi: V \to \mathbf{R}^n$, $\psi: W \to \mathbf{R}^s$, où V et W sont des ensembles ouverts dans les espaces $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ et $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ respectivement. Les instants t_0 et t_1 seront supposés fixes.

La contrainte $\dot{x} - \varphi(t,\ x,\ u) = 0$ est appelée *contrainte différentielle*, les contraintes $\psi(x(t_0),\ x(t_1)) = 0$ sont appelées *conditions aux limites* ou *de bord*. Le problème (1'), (2') sera appelé *problème de Lagrange sous la forme de Pontriaguine.*

Toutes les fonctions f, φ et ψ sont supposées continûment différentiables.

Par la suite (dans le chapitre IV) nous considérerons un cas encore plus général où t_0 et t_1 peuvent également varier, des contraintes isopérimétriques sous forme d'égalités, d'inégalités sont ajoutées, etc.

Le problème (1'), (2') sera considéré dans l'espace de Banach $Z = C^1([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^n) \times C([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^r)$. Autrement dit, nous considérerons les paires $(x(\cdot),\ u(\cdot))$, où $x(\cdot)$ est une fonction vectorielle continûment différentiable de dimension n et $u(\cdot)$ est une fonction vectorielle continue de dimension r. La paire $(x(\cdot),\ u(\cdot))$ sera parfois désignée brièvement par z.

L'élément $z = (x(\cdot),\ u(\cdot)) \in Z$ sera appelé *processus de commande* dans le problème (1'), (2'), si $\dot{x}(t) = \varphi(t,\ x(t),\ u(t))$, $\forall t \in [t_0,\ t_1]$, et *processus de commande admissible*, si, en outre, les conditions aux limites sont vérifiées. Un élément admissible $\hat{z} = (\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot))$ sera appelé *processus optimal dans le sens faible* ou *minimum faible* du problème (1'), (2'), s'il donne un minimum local pour notre problème, i.e. s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|x - \hat{x}\|_1 < \varepsilon$ et $\|u - \hat{u}\|_0 < \varepsilon$ impliquent $\mathcal{J}(z) \geqslant \mathcal{J}(\hat{z})$.

1.5.2. Conditions nécessaires du problème de Lagrange. Essayons d'appliquer au problème (1'), (2') du sous-paragraphe précédent la méthode générale de Lagrange, exposée dans 1.3.2. Comme dans le cas de dimension finie, la fonction de Lagrange s'écrira sous la forme

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\ u(\cdot);\ p(\cdot),\ \mu,\ \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt + l, \qquad (1)$$

où

$$L(t, x, \dot{x}, u) = p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u)) + \lambda_0 f(t, x, u), \tag{2}$$

$$l(x_0, x_1) = \sum_{j=0}^{s} \mu_j \psi_j(x_0, x_1), \quad \lambda_0 = \mu_0. \tag{3}$$

Le fait que la « partie terminale » ou terminante l de la fonccion de Lagrange est de la forme (3) est évident : l'analogie avec le cas de dimension finie est ici complète. En ce qui concerne la contrainte $\dot{x} = \varphi(t, x, u)$, elle doit être vérifiée pour tous les $t \in [t_0, t_1]$, le « multiplicateur de Lagrange » $p(\cdot)$ correspondant doit, par analogie, être une fonction de t, et sa contribution à la fonction de Lagrange doit être une intégrale, au lieu d'une somme.

Ainsi, nous avons déterminé la fonction de Lagrange. En suivant le procédé de Lagrange, il faut maintenant chercher les conditions d'extrémum de l'expression obtenue « comme si les variables étaient indépendantes ». Autrement dit, il faut considérer le problème

$$\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot); \hat{p}(\cdot), \hat{\mu}, \hat{\lambda}_0) \to \text{extr}, \tag{4}$$

en supposant que les multiplicateurs de Lagrange sont fixes. Le problème (4) est le problème de Boltz considéré dans 1.4.2. Les conditions d'extrémum qui furent trouvées dans ce sous-paragraphe, appliquées au problème (4), nous donnent des équations correctes, appelées *équations d'Euler-Lagrange.* Plus exactement, nous avons le théorème suivant.

Théorème d'Euler-Lagrange. *Si* $\hat{z} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *est un processus optimal dans le sens faible pour le problème* (1'), (2') *de* 1.5.1, *alors il existe des multiplicateurs de Lagrange* $\hat{\lambda}_0 = \hat{\mu}_0 \geqslant 0$ *pour le problème de minimum* $u \leqslant 0$ *et pour le problème du maximum,* $\hat{p}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_s)$, *qui ne sont pas simultanément égaux à zéro* [1]) *et vérifient les équations d'Euler*

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) + L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) = 0, \tag{5}$$

$$L_u(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) = 0, \tag{6}$$

---

[1]) Le mathématicien puriste notera l'inexactitude flagrante de cette phrase : $\hat{\lambda}_0$ et $\hat{\mu}_i$ sont des nombres, tandis que $\hat{p}(\cdot)$ est un élément d'un espace de fonctions, de sorte qu'il est absurde de dire qu'ils sont simultanément égaux à un même zéro. Chacun d'eux peut être égal ou n'être pas égal à son propre zéro, provenant de l'espace correspondant. Mais nous avons tellement l'habitude d'identifier tous les zéros de tous les espaces, que cette phrase ne doit pas sauter aux yeux.

et la condition de transversalité

$$L_{\dot{x}}(t_k, \hat{x}(t_k), \dot{\hat{x}}(t_k), \hat{u}(t_k)) =$$
$$= (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_k}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), \quad k = 0, 1. \tag{7}$$

Puisque L ne dépend pas de $\dot{u}$, et l ne dépend pas de u, l'équation d'Euler relativement à u est de la forme dégénérée (6), tandis que les conditions de transversalité « relativement à u » disparaissent complètement.

Ce théorème (même sous une forme plus générale) sera démontré au § 4.1 comme corollaire direct d'un théorème général concernant la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes différentiables de dimension infinie.

Notons que le théorème ci-dessus a pour corollaire la condition nécessaire d'extrémum du problème isopérimétrique (à nombre quelconque de conditions isopérimétriques) et l'équation d'Euler-Poisson pour les problèmes à dérivées d'ordres supérieurs. Les contraintes isopérimétriques

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, \dot{x})\, dt = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m; \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

peuvent être prises en considération en introduisant des nouvelles variables de phase, liées aux anciennes par la contrainte différentielle $\dot{x}_{n+i}(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$ et vérifiant les conditions aux limites

$$x_{n+i}(t_1) - x_{n+i}(t_0) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Si l'on applique maintenant le théorème d'Euler-Lagrange, on obtient les conditions nécessaires appropriées pour le problème isopérimétrique. En ce qui concerne le problème aux dérivées d'ordres supérieurs, il peut être réduit à la forme (1′), (2′) en posant $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2, \ldots$ $\ldots, \dot{x}_n = u$ et en appliquant ensuite le théorème d'Euler-Lagrange.

1.5.3. Principe du maximum de Pontriaguine. Dans les années cinquante, les nombreuses sollicitations des disciplines liées aux applications (technique, économie, etc.) stimulèrent la formulation et l'étude d'une nouvelle classe de problèmes d'extrémum, qui furent appelés *problèmes de commande optimale.* La condition nécessaire d'extrémum pour les problèmes de cette classe — le principe du maximum — énoncée par Pontriaguine en 1953, fut démontrée et développée par la suite par ses élèves et collaborateurs (voir [14]). Il est important de noter que cette condition a une forme qui diffère

essentiellement de celle des équations classiques d'Euler et de Lagrange: la résolution du problème de commande optimale nécessite la résolution préalable d'un problème de maximum auxiliaire (d'où le terme principe du maximum).

Nous envisageons ici un cas particulier de la formulation générale du problème de commande optimale, à savoir celui du problème de Lagrange sous la forme de Pontriaguine (voir (1′) et (2′), 1.5.1), où apparaît encore une condition supplémentaire concernant la commande: $u \in \mathfrak{U}$. Plus exactement, nous envisagerons le problème suivant:

$$\mathcal{J}(x(\cdot);\ u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,\ x(t),\ u(t))\,dt + \psi_0(x(t_0),\ x(t_1)) \to \inf, \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t,\ x(t),\ u(t)) = 0, \quad \psi_j(x(t_0),\ x(t_1)) = 0, \quad j = 1,\ \ldots,\ s, \qquad (2)$$

$$u \in \mathfrak{U}. \qquad (3)$$

Les fonctions f, φ, ψ_j sont les mêmes que dans les relations (1′), (2′) de 1.5.1, tandis que $\mathfrak{U}$ est un ensemble fixe de $\mathbf{R}^r$. Un problème encore plus général sera considéré au chapitre IV.

Le problème de Lagrange avait été envisagé dans un espace de Banach. Dans le présent sous-paragraphe, nous voulons appliquer les méthodes les plus simples et nous prendrons par conséquent un autre choix d'éléments admissibles, qui ressemble à celui qui fut effectué dans 1.4.3, où le problème élémentaire du calcul des variations classique avait été élargi à un problème dans l'espace $KC^1([t_0,\ t_1])$ des fonctions différentiables par morceaux.

La paire $(x(\cdot),\ u(\cdot))$ sera appelée *processus de commande* pour le problème (1)-(3), si la commande $u(\cdot)$: $[t_0,\ t_1] \to \mathfrak{U}$ est une fonction continue par morceaux, la trajectoire de phase $x(\cdot)$ est continûment différentiable par morceaux et la fonction $x(\cdot)$ vérifie partout, sauf aux points de discontinuité de la commande $u(\cdot)$, l'équation différentielle $\dot{x}(t) = \varphi(t,\ x(t),\ u(t))$. Le processus de commande est appelé *admissible* si, en outre, les conditions aux limites sont vérifiées.

Un processus admissible $(\hat{x}(\cdot);\ \hat{u}(\cdot))$ est appelé *optimal* s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout processus de commande admissible $(x(\cdot);\ u(\cdot))$ vérifiant $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in [t_0,\ t_1]$, on a l'inégalité $\mathcal{J}(x(\cdot);\ u(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot);\ \hat{u}(\cdot))$.

Essayons maintenant d'appliquer au problème (1)-(3), la méthode générale de Lagrange considérée dans 1.3.2. La fonction de Lagrange

du problème (1)-(3) sera la même que dans le problème de Lagrange : les contraintes sous forme d'appartenance ($u \in \mathfrak{U}$) ne sont pas inclues dans la fonction de Lagrange. Ainsi

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\ u(\cdot);\ p(\cdot),\ \mu,\ \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt + l, \tag{4}$$

où

$$L(t,\ x,\ \dot{x},\ u) = p(t)(\dot{x} - \varphi(t,\ x,\ u)) + \lambda_0 f(t,\ x,\ u), \tag{5}$$

$$l(x_0,\ x_1) = \sum_{j=0}^{s} \mu_j \psi_j(x_0,\ x_1), \quad \mu_0 = \lambda_0. \tag{6}$$

Ensuite, comme toujours, il faut considérer le problème

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\ u(\cdot);\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\mu},\ \hat{\lambda}_0) \to \inf \tag{7}$$

(en supposant que les multiplicateurs de Lagrange sont fixes) « comme si les variables étaient indépendantes ». Le problème (7) se décompose naturellement en deux problèmes

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\ \hat{u}(\cdot);\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\mu},\ \hat{\lambda}_0) \to \inf \quad (\text{pour } x(\cdot)), \tag{8}$$

$$\mathcal{L}(\hat{x}(\cdot),\ u(\cdot);\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\mu},\ \hat{\lambda}_0) \to \inf \quad (\text{pour } u(\cdot) \in \mathcal{U}), \tag{9}$$

où par $\mathcal{U}$ nous avons désigné l'ensemble des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathfrak{U}$. Le problème (8) est à nouveau un problème de Boltz ; quant au problème (9), il a, comme on voit facilement, la forme simple suivante

$$\int_{t_0}^{t_1} \chi(t,\ u(t))\,dt \to \inf, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{10}$$

où $\chi(t,\ u) = \hat{\lambda}_0 f(t,\ \hat{x}(t),\ u) - \hat{p}(t)\varphi(t,\ \hat{x}(t),\ u)$.

La condition nécessaire (et suffisante) d'extrémum dans le problème (10) est tout à fait évidente : $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ donne un minimum au problème (10), si et seulement si partout, sauf aux points de discontinuité de $\hat{u}(\cdot)$, on a la relation

$$\min_{u \in \mathfrak{U}} \chi(t,\ u) = \chi(t,\ \hat{u}(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min_{u \in \mathfrak{U}} L(t,\ \hat{x}(t),\ \dot{\hat{x}}(t),\ u) = L(t,\ \hat{x}(t),\ \dot{\hat{x}}(t),\ \hat{u}(t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max_{u \in \mathfrak{U}} [\hat{p}(t)\varphi(t,\ \hat{x}(t),\ u) - \hat{\lambda}_0 f(t,\ \hat{x}(t),\ u)] =$$

$$= \hat{p}(t)\varphi(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t)) - \hat{\lambda}_0 f(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t)). \tag{11}$$

Les conditions nécessaires d'extrémum pour le problème (8), ajoutées à (11), nous amènent aux conditions nécessaires d'extrémum pour le problème (1)-(3) qui sont connues sous le titre de principe du maximum de Pontriaguine (à cause de la forme spéciale de la condition (11)). Plus exactement, on a le théorème suivant.

Théorème (principe du maximum de Pontriaguine). *Si* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *est un processus optimal pour le problème* (1)-(3), *alors il existe des multiplicateurs de Lagrange*

$$\hat{\lambda}_0 = \hat{\mu}_0 \geqslant 0, \quad \hat{p}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{n*}), \quad \hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_s),$$

qui ne s'annulent pas simultanément et vérifient l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)), \tag{12}$$

le principe du maximum (11) *et les conditions de transversalité*

$$L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t))|_{t=t_k} = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_k}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)),$$
$$k = 0, 1. \tag{13}$$

1.5.4. Démonstration du principe du maximum dans le problème à extrémité libre. Nous démontrerons ici le principe du maximum de Pontriaguine dans la situation la plus simple: lorsque la partie terminale de la fonctionnelle est absente, une des extrémités étant fixe et l'autre libre, i.e. dans (1) de 1.5.3 on a $\psi_0 = 0$ et dans (2),— $\psi_j(x_0, x_1) = x_{0j} - \bar{x}_{0j}$, $j = 1, \ldots, n$.

Ainsi, nous envisageons le problème

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0, \quad x(t_0) = \bar{x}_0, \tag{2}$$

$$u \in \mathfrak{U}. \tag{3}$$

Les fonctions f, f_x, φ, φ_x sont supposées continues relativement à leurs variables.

Voyons quel sera dans ce cas le principe du maximum de Pontriaguine. Puisque la fonction $l(x_0, x_1) = \sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i (x_{0i} - \bar{x}_{0i})$ ne dépend pas de x_1, la condition de transversalité (13) de 1.5.3 nous donne

$$L_{\dot{x}}(t_1, \hat{x}(t_1), \dot{\hat{x}}(t_1), \hat{u}(t_1)) = \hat{p}(t_1) = 0. \tag{4}$$

Ensuite, l'équation (12) de 1.5.3 prend la forme

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Longleftrightarrow -\dot{\hat{p}}(t) = \hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_x(t) - \hat{\lambda}_0 \hat{f}_x(t), \tag{5}$$

où nous avons introduit les notations plus simples

$$\hat{f}_x(t) = f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{\varphi}_x(t) = \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)).$$

Si l'on suppose que $\hat{\lambda}_0 = 0$, il découle de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation homogène (5) que $\hat{p}(\cdot) \equiv 0$ et donc, d'après la condition de transversalité à l'extrémité gauche (voir (13), 1.5.3), on a $\hat{\mu} = 0$. Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse du théorème suivant laquelle tous les multiplicateurs de Lagrange ne peuvent s'annuler simultanément. Donc $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ et l'on peut supposer que $\hat{\lambda}_0 = 1$. Mais alors $\hat{p}(\cdot)$ se détermine uniquement (en vertu de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour un système linéaire non homogène) par l'équation (5) et la condition aux limites (4). Mettant ensemble ce qui a été dit, on peut énoncer le principe du maximum de la manière suivante:

Théorème (principe du maximum de Pontriagnine pour le problème à extrémité libre). *Si le processus* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *est optimal pour le problème* (1)-(3), *alors la solution* $\hat{p}(\cdot)$ *du système*

$$-\dot{p}(t) = p(t)\,\hat{\varphi}_x(t) - \hat{f}_x(t) \tag{6}$$

à condition aux limites

$$p(t_1) = 0 \tag{6a}$$

vérifie le principe du maximum

$$\max_{u \in \mathfrak{U}} (\hat{p}(t)\,\varphi(t, \hat{x}(t), u) - f(t, \hat{x}(t), u)) =$$

$$= \hat{p}(t)\,\varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \tag{7}$$

aux points de continuité de la commande $\hat{u}(\cdot)$.

Pour la démonstration de ce théorème, comme dans les cas précédents, nous nous servirons de la méthode des variations. Nous commençons par la définition de la variation élémentaire en aiguille (de Weierstrass) semblable à celle qui fut appliquée dans 1.4.4. Désignons par T_0 l'ensemble des points de (t_0, t_1) en lesquels la fonction $\hat{u}(\cdot)$ est continue. Fixons le point $\tau \in T_0$, l'élément $v \in \mathfrak{U}$ et le nombre $\lambda > 0$ si petit que $[\tau - \lambda, \tau] \subset [t_0, t_1]$.

La commande

$$u_\lambda(t) = u_\lambda(t; \tau, v) = \begin{cases} \hat{u}(t) & \text{si} \quad t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ v & \text{si} \quad t \in [\tau - \lambda, \tau) \end{cases} \tag{8}$$

sera appelée *variation élémentaire en aiguille de la commande* $\hat{u}(\cdot)$. Soit $x_\lambda(t) = x_\lambda(t; \tau, v)$ la solution de l'équation $\dot{x} = \varphi(t, x, u_\lambda(t))$ à condition initiale $x_\lambda(t_0) = \hat{x}(t_0) = x_0$. Nous dirons que $x_\lambda(t)$ est une *variation élémentaire en aiguille de la trajectoire*, tandis que la paire $(x_\lambda(t), u_\lambda(t))$ est une *variation élémentaire du processus* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. La paire (τ, v) qui détermine cette variation sera appelée *aiguille élémentaire.*

La démonstration du théorème se décompose, comme toujours, en plusieurs étapes. Les deux premières étapes se rapportent entièrement à la théorie des équations différentielles ordinaires.

A) Lemme sur les propriétés de la variation élémentaire. *Supposons que l'aiguille élémentaire* (τ, v) *est fixée. Il existe alors un nombre* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour* $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ *on a:*

1) *la trajectoire* $x_\lambda(\cdot)$ *est définie sur l'intervalle fermé* $[t_0, t_1]$ *tout entier et pour* $\lambda \downarrow 0$ *on a* $x_\lambda(t) \to \hat{x}(t)$ *uniformément sur* $[t_0, \tau]$;

2) *pour* $t \geqslant \tau$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, *la dérivée*

$$\frac{d}{d\lambda} x_\lambda(t; \tau, v) = z_\lambda(t; \tau, v)$$

existe, elle est continue relativement à λ *et pour* $\lambda = 0$ *se définit comme étant la dérivée à droite*;

3) *la fonction* $t \mapsto y(t) = z_0(t; \tau, v)$ *vérifie sur l'intervalle fermé* $[\tau, t_1]$ *l'équation différentielle*

$$\dot{y} = \hat{\varphi}_x(t)\, y \tag{9}$$

et la condition initiale

$$y(\tau) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)). \tag{10}$$

La démonstration du lemme est basée sur deux faits connus de la théorie des équations différentielles ordinaires: le théorème local sur l'existence et l'unicité et le théorème de la dépendance continûment différentiable de la solution des données initiales. Ces théorèmes, sous une forme appropriée, sont contenus dans les manuels standards sur les équations différentielles ordinaires [8], [12], [13]. En outre, le lecteur peut s'adresser au texte du § 2.5.

Démontrons d'abord le lemme dans le cas où la fonction $\hat{u}(\cdot)$ est continue. Considérons les équations différentielles

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_\lambda(t)), \tag{11}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, \hat{u}(t)). \tag{12}$$

D'après (8), les deuxièmes membres de ces équations coïncident pour $t < \tau - \lambda$, et puisque $x_\lambda(t_0) = \bar{x}_0 = \hat{x}(t_0)$, le théorème de l'unicité de la solution du pro-

blème de Cauchy entraîne que $x_\lambda(t) \equiv \hat{x}(t)$ pour $t < \tau - \lambda$; par continuité

$$\xi(\lambda) = x_\lambda(\tau - \lambda) = \hat{x}(\tau - \lambda). \tag{13}$$

En particulier, $\xi(\lambda)$ possède une dérivée continue relativement à λ et

$$\xi(0) = \hat{x}(\tau), \quad \xi'(0) = -\dot{\hat{x}}(\tau) = -\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), u(\tau)). \tag{14}$$

Désignons par $\Xi(t, s, \xi)$ la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle à commande fixe v:

$$\dot{x} = \varphi(t, x, v), \quad x(s) = \xi. \tag{15}$$

D'après le théorème local d'existence et d'unicité on peut choisir des $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que $\Xi(t, s, \xi)$ est définie pour

$$|t - \tau| < \delta_1, \quad |s - \tau| < \delta_1, \quad |\xi - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1,$$

tandis que le théorème de la dépendance de la solution des conditions initiales implique que Ξ doit être une fonction continûment différentiable.

D'après (8) et (13), pour définir $x_\lambda(t)$ sur l'intervalle fermé $[\tau - \lambda, \tau]$, nous devons poser $\xi = \xi(\lambda) = \hat{x}(\tau - \lambda)$ dans (15) et, si $\lambda_1 < \delta_1$ est choisi de manière à avoir $|\xi(\lambda) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$, alors

$$x_\lambda(t) = \Xi(t, \tau - \lambda, \xi(\lambda)), \quad \tau - \lambda \leqslant t \leqslant \tau.$$

En particulier,

$$\eta(\lambda) = x_\lambda(\tau) = \Xi(\tau, \tau - \lambda, \xi(\lambda)) \tag{16}$$

étant la composée de fonctions continûment différentiables est elle-même une fonction continûment différentiable en λ et

$$\begin{aligned}\eta(0) = \hat{x}(\tau),\ \eta'(0) &= -\Xi_s(\tau, \tau, \xi(0)) + \Xi_\xi(\tau, \tau, \xi(0))\,\xi'(0) = \\ &= -\Xi_s(\tau, \tau, \xi(0)) - \Xi_\xi(\tau, \tau, \xi(0))\,\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))\end{aligned} \tag{17}$$

d'après (14). La solution $\Xi(t, s, \xi)$ du problème de Cauchy (15) vérifie l'équation intégrale équivalente

$$\Xi(t, s, \xi) = \xi + \int_s^t \varphi(\sigma, \Xi(\sigma, s, \xi), v)\,d\sigma. \tag{18}$$

Calculant la dérivée par rapport à s, on a

$$\Xi_s(t, s, \xi) = \\ = -\varphi(s, \Xi(s, s, \xi), v) + \int_s^t \varphi_x(\sigma, \Xi(\sigma, s, \xi), v)\,\Xi_s(\sigma, s, \xi)\,d\sigma,$$

et en posant $t = s = \tau$, $\xi = \hat{x}(\tau)$, on obtient (en se servant de l'identité évidente $\Xi(t, t, \xi) \equiv \xi$)

$$\Xi_s(\tau, \tau, \hat{x}(\tau)) = -\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v). \tag{19}$$

D'une manière analogue, en prenant la dérivée de (18) par rapport à ξ et en substituant les mêmes valeurs des variables, nous obtenons

$$\Xi_\xi(\tau, \tau, \hat{x}(\tau)) = E \tag{20}$$

(ici $E = (\partial\xi_i/\partial\xi_k) = (\delta_{ik})$ est la matrice unité). Substituant (19) et (20) dans (17), nous obtenons

$$\eta(0) = \hat{x}(\tau), \qquad \eta'(0) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)). \tag{21}$$

Ensuite nous voyons que la fonction Ξ est continue au point $(\tau, \tau, \hat{x}(\tau))$ et l'on a $\Xi(\tau, \tau, \hat{x}(\tau)) = \hat{x}(\tau)$, tandis que $\hat{x}(\cdot)$ est continue au point τ. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour

$$|t - \tau| < \delta, \qquad |s - \tau| < \delta, \qquad |\xi - \hat{x}(\tau)| < \delta$$

on a les inégalités

$$|\Xi(t, s, \xi) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon/2, \qquad |\hat{x}(t) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon/2. \tag{22}$$

Prenons un nombre positif $\lambda_1 \leqslant \delta$ si petit que pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$ on aie l'inégalité $|\xi(\lambda) - \hat{x}(\tau)| < \delta$. Alors pour $\tau - \lambda \leqslant t \leqslant \tau$, $s = \tau - \lambda$ et $\xi = \xi(\lambda)$ on aura les inégalités (22), d'où

$$|x_\lambda(t) - \hat{x}(t)| = |\Xi(t, \tau-\lambda, \xi(\lambda)) - \hat{x}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |\Xi(t, \tau-\lambda, \xi(\lambda)) - \hat{x}(\tau)| + |\hat{x}(\tau) - \hat{x}(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Puisque $x_\lambda(t) \equiv \hat{x}(t)$ pour $t_0 \leqslant t \leqslant \tau - \lambda$, on a

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1 \Rightarrow |x_\lambda(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

ce qui démontre la première assertion du lemme.

Désignons maintenant par $X(\cdot, \eta)$ la solution du problème de Cauchy pour l'équation (12) à condition initiale $x(\tau) = \eta$. D'après le théorème de la dépendance des solutions des conditions initiales, il existe un ε_2 tel que $X(t, \eta)$ est définie pour $|\eta - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_2$, $\tau \leqslant t \leqslant t_1$, tout en étant une fonction continûment différentiable. D'après (8) et (16), en vertu du théorème d'unicité, on a $x_\lambda(t) \equiv X(t, \eta(\lambda))$. A nouveau, étant la composée de fonctions continûment différentiables, la fonction $x_\lambda(t)$ est continûment différentiable en (t, λ) pour $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, où λ_2 a été choisi de manière à avoir l'inégalité $|\eta(\lambda) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_2$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. En posant $\lambda_0 = \min(\lambda_1, \lambda_2)$, nous voyons que la deuxième assertion du lemme est également vérifiée.

Passant de l'équation (12) à l'équation intégrale équivalente, nous obtenons compte tenu de (16)

$$x_\lambda(t) = \eta(\lambda) + \int_\tau^t \varphi(\sigma, x_\lambda(\sigma), \hat{u}(\sigma))\, d\sigma.$$

Prenant la dérivée de cette équation par rapport à λ et en posant ensuite $\lambda = 0$, nous obtiendrons, en désignant, comme dans la condition du lemme, $y(t) = \frac{d}{d\lambda} x_\lambda(t)\big|_{\lambda=0}$, la relation suivante

$$y(t) = \eta'(0) + \int_\tau^t \varphi_x(\sigma, \hat{x}(\sigma), \hat{u}(\sigma))\, y(\sigma)\, d\sigma.$$

Cette équation intégrale est équivalente à l'équation (9) à condition initiale $y(\tau) = \eta'(0)$ qui coïncide avec (10) en vertu de (21).

Si la commande $\hat{u}(\cdot)$ est une fonction continue par morceaux, il faut agir de la manière suivante. Pour simplifier, supposons qu'il y a deux points de discontinuité, mettons α_1 et α_2, et que le point τ (où $\hat{u}(\cdot)$ doit être continue) est situé entre eux: $t_0 < \alpha_1 < \tau < \alpha_2 < t_1$. Dans la bande $t_0 \leqslant t \leqslant \alpha_1$ les systèmes (11) et (12) (dans lesquels, pour $t = \alpha_1$, on doit poser la commande égale à sa valeur limite $\hat{u}(\alpha_1 - 0) = \lim\limits_{t \to \alpha_1 - 0} \hat{u}(t)$) coïncident et, d'après le théorème d'unicité, $x_\lambda(t) \equiv \hat{x}(t)$.

Passons maintenant à la bande $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \alpha_2$ (en supposant à nouveau que sur ses frontières la commande est égale aux valeurs limites $\hat{u}(\alpha_1 + 0)$ pour $t = \alpha_1$ et $\hat{u}(\alpha_2 - 0)$ pour $t = \alpha_2$). Ici il faut résoudre les équations (11) et (12) à condition initiale $x = \hat{x}(\alpha_1)$. Nos assertions précédentes sont applicables et nous voyons donc que $x_\lambda(t)$ est continûment différentiable en λ.

Enfin, dans la bande $\alpha_2 \leqslant t \leqslant t_1$ (avec la même convention pour les valeurs de la commande lorsque $t = \alpha_2$), nous trouvons la solution de nos équations différentielles à conditions initiales $x_\lambda(\alpha_2)$ et $\hat{x}(\alpha_2)$. En se servant encore une fois du théorème sur la dépendance de la solution des conditions initiales, on démontre le fait que $x_\lambda(t)$ est continûment différentiable en λ pour $\alpha_2 \leqslant t \leqslant t_1$ et l'on calcule $y(t) = \frac{d}{d\lambda} x_\lambda(t) |_{\lambda=0}$ de la même manière que précédemment. ■

B) Lemme sur l'accroissement de la fonctionnelle. Posons $\chi(\lambda) = \mathcal{J}(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot))$ et démontrons que cette fonction est différentiable à droite au point $\lambda = 0$.

Soit $\hat{p}(\cdot)$ *la solution du système* (6) *à condition à la limite* (6a). *Alors*

$$\chi'(+0) = \frac{d}{d\lambda} \mathcal{J}(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot))|_{\lambda=+0} = a(\tau, v),$$

où

$$a(\tau, v) = f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) - \\ - \hat{p}(\tau)[\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))]. \quad (23)$$

Démonstration. Puisque

$$\chi(\lambda) - \chi(0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))\,dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\,dt = \\ = \int_{\tau}^{t_1} [f(t, x_\lambda(t), \hat{u}(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))]\,dt + \\ + \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [f(t, x_\lambda(t), v) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))]\,dt,$$

on a

$$\chi'(0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\chi(\lambda) - \chi(0)}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \int_{\tau}^{t_1} f(t, x_\lambda(t), \hat{u}(t))\,dt \Big|_{\lambda=+0} + \\ + \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [f(t, x_\lambda(t), v) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))]\,dt.$$

Puisque, d'après le lemme de A), la fonction $x_\lambda(t)$ est continûment différentiable par rapport à λ, on peut appliquer au premier terme la règle usuelle pour le calcul de la dérivée sous le signe de l'intégrale et se servir du théorème de la moyenne pour le deuxième terme; on obtiendra alors

$$\chi'(+0)=\int_\tau^{t_1} f_x(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t))\frac{d}{d\lambda}x_\lambda(t)\Big|_{\lambda=0}dt+$$
$$+\lim_{\lambda\downarrow 0}[f(c,\ x_\lambda(c),\ v)-f(c,\ \hat{x}(c),\ \hat{u}(c)]=$$
$$=\int_\tau^{t_1} f_x(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t))\,y(t)\,dt+f(\tau,\ \hat{x}(\tau),\ v)-f(\tau,\ \hat{x}(\tau),\ \hat{u}(\tau)) \qquad (24)$$

(ici nous nous servons du fait que $\tau-\lambda\leqslant c\leqslant\tau$ et donc $c\to\tau$; $x_\lambda(c)\to\hat{x}(\tau)$ d'après la première assertion du lemme de A); $y(t)$ désigne la même fonction que dans ce lemme).

Par ailleurs, $\hat{p}(\cdot)$ vérifie le système (6), et $y(\cdot)$ vérifie le système (9). Par conséquent

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t)\,y(t)=\dot{\hat{p}}(t)\,y(t)+\hat{p}(t)\,\dot{y}(t)=$$
$$=-\hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_x(t)\,y(t)+\hat{f}_x(t)\,y(t)+\hat{p}(t)\hat{\varphi}_x(t)\,y(t)=\hat{f}_x(t)\,y(t).$$

Calculant l'intégrale de cette égalité de τ à t_1, prenant en considération la condition (6a) pour $\hat{p}(\cdot)$ et la condition (10) pour $y(\cdot)$, on obtient

$$\int_\tau^{t_1}\hat{f}_x(t)\,y(t)\,dt=\int_\tau^{t_1}\frac{d}{dt}[\hat{p}(t)\,y(t)]\,dt=\hat{p}(t)\,y(t)\Big|_\tau^{t_1}=$$
$$=-\hat{p}(\tau)\,[\varphi(\tau,\ \hat{x}(\tau),\ v)-\varphi(\tau,\ \hat{x}(\tau),\ \hat{u}(\tau))]. \qquad (25)$$

La comparaison de (24), (25) et (23) nous donne $\chi'(+0)=a(\tau,\ v)$. ■

C) C o n c l u s i o n d e l a d é m o n s t r a t i o n. Si l'extrémité droite est libre, il découle du lemme de A) que toute variation élémentaire est admissible (pour λ suffisamment petit). Par conséquent, si $(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot))$ est un processus optimal, on aura, pour des λ suffisamment petits,

$$\mathcal{J}(x_\lambda(\cdot),\ u_\lambda(\cdot))\geqslant\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot))\Leftrightarrow\chi(\lambda)\geqslant\chi(0)\Rightarrow\chi'(+0)\geqslant 0.$$

En appliquant le lemme de B), on voit que la condition $a(\tau,\ v)\geqslant 0$ est nécessaire pour l'optimalité de $(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot))$. Mais $\tau\in T_0$ et $v\in\mathfrak{U}$ étaient arbitraires. Nous avons démontré ainsi que pour tout point t de l'ensemble des points de continuité de la commande $\hat{u}(\cdot)$ et pour tout $u\in\mathfrak{U}$, on a l'inégalité

$$\hat{p}(t)\,\varphi(t,\ \hat{x}(t),\ u)-f(t,\ \hat{x}(t),\ u)\leqslant$$
$$\leqslant\hat{p}(t)\,\varphi(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t))-f(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t)),$$

équivalente à l'inégalité $a(t,\ u)\geqslant 0$ et à (7). Le théorème est entièrement démontré.

§ 1.6. Résolution des problèmes

Les problèmes dont nous avons parlé au début du chapitre, problèmes qui furent posés pour différentes raisons et à des époques différentes, seront envisagés ici d'un point de vue uniforme, suivant un même schéma standard dicté par le principe de Lagrange.

Ce schéma comprend six étapes:

1. Expression du problème formalisé et discussion de l'existence et de l'unicité de la solution.
2. Construction de la fonction de Lagrange.
3. Application du principe de Lagrange.
4. Etude de la possibilité d'avoir $\hat{\lambda}_0 = 0$.
5. Recherche des points stationnaires, i.e. résolution des équations qui découlent du principe de Lagrange.
6. Etude des points stationnaires, choix de la solution et expression de la réponse.

Dans tous les problèmes que nous allons considérer le principe de Lagrange est un théorème rigoureusement établi: soit démontré antérieurement, soit démontré dans les chapitres ultérieurs. L'applicabilité d'un même schéma aux problèmes de caractère si différent souligne l'universalité de ce principe. Il va de soi qu'en considérant d'autres problèmes, les chercheurs peuvent rencontrer des situations dans lesquelles aucun des schémas concrets déjà connus (calcul des variations classique, commande optimale, programmation linéaire, etc.) ne convienne. Toutefois, le principe de Lagrange sous une forme ou une autre peut s'avérer utile même dans ces cas, par exemple pour donner une indication générale. La compréhension des idées et des situations générales auxquelles il est applicable — nous en reparlerons aux chapitres III et IV — peut nous aider à trouver des conditions nécessaires d'extrémum dans la nouvelle situation envisagée. Remarquons par ailleurs qu'il est tout aussi important de comprendre que le principe de Lagrange n'est pas toujours vrai, et il ne faut pas s'en servir à tort et à travers.

1.6.1. Problèmes géométriques d'extrémum. Ici nous trouvons la solution de tous les problèmes posés dans 1.1.2 et formalisés dans 1.2.2. La première étape du schéma proposé consiste à étudier la question de l'existence des solutions. Les problèmes géométriques de ce sous-paragraphe sont de dimension finie, et l'existence des solutions est affirmée par le théorème suivant.

Théorème de Weierstrass. *Supposons que la fonction* $f: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ *est continue et que l'ensemble* $\mathcal{L}_\alpha f = \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ *est non vide et borné pour un certain* α. *Alors la solution du problème* $f(x) \to \inf$ *existe.*

La démonstration de ce théorème découle d'une manière évidente du théorème classique de Weierstrass sur l'existence d'un

minimum d'une fonction continue sur un sous-ensemble fermé et borné de l'espace $\mathbf{R}^N$ ([6], vol. 1, pp. 176, 370; [11], vol. 1, p. 234), car l'ensemble $\mathscr{L}_\alpha f$ est évidemment fermé.

Passons à la résolution des problèmes.

Problème d'Euclide sur le parallélogramme inscrit. Ce problème a été formalisé ainsi (voir (1), 1.2.2):

1. $f_0(x) = x(x - b) \to \inf, \quad 0 \leqslant x \leqslant b.$

Nous avons omis le facteur H/b qui ne joue aucun rôle et avons réduit le problème à un problème de minimisation. La fonction f_0 est continue, l'intervalle $[0, b]$ est borné et fermé. D'après le théorème de Weierstrass, une solution du problème existe. Soit $\hat{x}$ cette solution. Il est clair que $\hat{x} \neq 0$ et $\hat{x} \neq b$, car $f_0(0) = f_0(b) = 0$, tandis que la fonction prend aussi des valeurs négatives. Par conséquent, $\hat{x} \in (0, b)$. La fonction f_0 est différentiable. Il faut donc chercher des points stationnaires du problème $f_0(x) \to \inf$.

2 à 5. $f_0'(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} = b/2.$

6. Puisque le point stationnaire est unique, $\hat{x} = b/2 \in [0, b]$ est la solution du problème, i.e. le parallélogramme cherché $A\hat{D}\hat{E}\hat{F}$ est caractérisé par la relation $|A\hat{F}| = |AC|/2$, donc *$\hat{F}$ est le milieu du segment* $[A, C]$. Ce fait avait déjà été démontré dans 1.1.2 par un raisonnement géométrique.

Remarque. Notre problème est donc un problème différentiable élémentaire. Par conséquent, la fonction de Lagrange n'a pas été décrite explicitement et les étapes 2 à 5 se sont « confondues ». Nous nous sommes servis du théorème de Fermat (1.3.1).

Problème d'Archimède sur les segments de sphère isopiphanes (voir 1.2.1). La solution est tout à fait analogue à celle du problème d'Euclide; nous la donnons sans commentaire.

1. $f_0(h) = ha/2 - \pi h^3/3 \to \sup; \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{a/\pi}.$

2 à 5. $f_0'(\hat{h}) = 0 \Rightarrow \hat{h} = \sqrt{a/2\pi}.$

6. La valeur de f_0 à l'origine est nulle, au point $\sqrt{a/\pi}$ elle est inférieure à la valeur au point stationnaire $\sqrt{a/2\pi}$. Par conséquent, $\hat{h} = \sqrt{a/2\pi}$ est la solution du problème. Rappelons que $a = 2\pi R\hat{h}$; nous obtenons $\hat{h} = R$, i.e. *le segment sphérique cherché est la demi-sphère* (sa hauteur est égale au rayon).

Problème d'Apollonios sur la plus courte distance d'un point à une ellipse. Il avait été formalisé ainsi (voir (6), 1.2.2):

1. $f_0(x_1, x_2) = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \to \inf;$

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 = 1.$$

L'ellipse est un ensemble fermé et borné, la fonction f_0 est continue, donc la solution $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ existe d'après le théorème de Weierstrass. Les fonctions f_0 et f_1 sont différentiables.

2. $\mathcal{L} = \lambda_0 ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2) + \lambda_1 ((x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 - 1)$.

3. $\mathcal{L}_{x_1} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_0 (\hat{x}_1 - \xi_1) + \hat{\lambda}_1 \hat{x}_1/a_1^2 = 0,$

$\mathcal{L}_{x_2} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_0 (\hat{x}_2 - \xi_2) + \hat{\lambda}_1 \hat{x}_2/a_2^2 = 0.$

4. Supposons que $\hat{\lambda}_0 = 0$. Alors $\hat{\lambda}_1 \neq 0$ (les multiplicateurs de Lagrange ne peuvent s'annuler simultanément!). Par conséquent, il découle de la troisième étape que

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0 \Rightarrow f_1 (0, 0) = f_1 (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0 \neq 1.$$

Ainsi, $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ et l'on peut poser $\hat{\lambda}_0 = 1$. Désignons maintenant $\hat{\lambda}_1 = \lambda$.

5. (Pour simplifier, nous nous limitons au cas où $\xi_1 \xi_2 \neq 0$.)

$$(\hat{x}_i - \xi_i) + \lambda \hat{x}_i/a_i^2 = 0, \quad i = 1, 2 \Rightarrow \hat{x}_i = \frac{\xi_i a_i^2}{(a_i^2 + \lambda)}, \quad i = 1, 2.$$

En substituant dans l'équation de l'ellipse, on obtient

$$\varphi(\lambda) = \frac{\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2+\lambda)^2} + \frac{\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2+\lambda)^2} = 1. \tag{1}$$

6. Le nombre de points stationnaires du problème (i.e. des points qui correspondent aux valeurs de λ vérifiant l'équation (1)) ne peut excéder quatre (voir fig. 26, l'inégalité $\varphi(0) = \xi_1^2/a_1^2 + \xi_2^2/a_2^2 > 1$ montre que $\varphi(\lambda)$ y est représentée pour un point (ξ_1, ξ_2) situé à l'extérieur de l'ellipse). Pour une solution complète du problème, il faut résoudre l'équation (1), obtenir λ_i, trouver les points correspondants $x(\lambda_i)$, substituer ces points dans f_0 et trouver le plus petit des nombres obtenus.

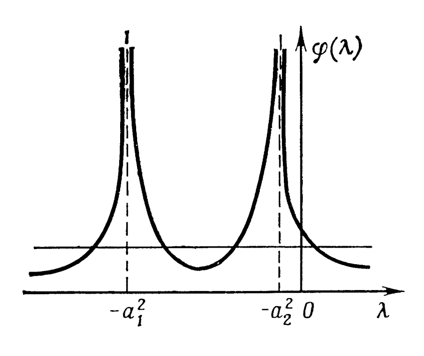


Fig. 26

R e m a r q u e s. 1. Le problème 1 est un problème différentiable à contrainte sous forme d'égalité. Dans les étapes 2 à 5, nous avons appliqué la méthode des multiplicateurs de Lagrange (voir 1.3.2).

2. La relation $(\hat{x}_i - \xi_i) + \lambda \hat{x}_i/a_i^2 = 0$ a une signification géométrique évidente: le vecteur $\xi - \hat{x}$ qui joint le point ξ au point minimal $\hat{x}$ est proportionnel au vecteur gradient de la fonction f_1

au point $\hat{x}$, i.e. le vecteur $\xi - \hat{x}$ est normal à l'ellipse. Ce fait fut découvert tout d'abord par Apollonios.

3. Nous allons maintenant déduire des relations obtenues l'équation de la courbe qui « sépare » les points ξ par lesquels passent deux normales des points par lesquels il en passe quatre. Il est évident que cette séparation a lieu pour λ vérifiant la relation (1) ; on a

$$\varphi'(\lambda) = -\frac{\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2+\lambda)^3} - \frac{\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2+\lambda)^3} = 0, \quad \lambda \in (-a_1^2, \ -a_2^2). \qquad (2)$$

Il découle de (2) que

$$a_1^2 + \lambda = A\,(\xi_1 a_1)^{2/3}, \qquad a_2^2 + \lambda = -A\,(\xi_2 a_2)^{2/3},$$

où

$$A = (a_1^2 - a_2^2)/((\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}).$$

En substituant cette valeur dans (1), on obtient l'équation de la courbe de séparation

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_2^2 - a_1^2)^{2/3}.$$

C'est l'équation de l'*astroïde* (voir fig. 7 au § 1.1). En dehors de l'astroïde, chaque point possède deux normales, à l'intérieur, quatre, sur l'astroïde elle-même, trois (sauf aux sommets, où il y a deux normales). Le résultat décrit ici avait également été obtenu par Apollonios dans son traité sur les coniques.

Problème de Kepler sur le cylindre inscrit (voir (3), 1.2.2). La résolution de ce problème est semblable à celle du problème d'Euclide, et nous la laissons sans commentaire.

1. $f_0(x) = x(x^2 - 1) \to \inf, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

2 à 5. $f_0'(\hat{x}) = 0 \Rightarrow 3\hat{x}^2 = 1 \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{3}/3.$

6. D'après l'unicité du point stationnaire dans (0, 1), on voit que $\hat{x} = \sqrt{3}/3$ est la solution du problème : *le cylindre cherché est caractérisé par le fait que le rapport de sa hauteur* $2\hat{x}$ *au rayon* $\sqrt{1-\hat{x}^2}$ *est égal à* $\sqrt{2}$.

Problème de réfraction de la lumière. Ce problème avait été posé et résolu par la méthode de Huygens dans 1.1.3. Nous donnerons ici sa résolution standard, dûe à Leibniz (voir (4), 1.2.2).

1. $f_0(x) = \sqrt{\alpha^2 + x^2}/v_1 + \sqrt{\beta^2 + (\xi - x)^2}/v_2 \to \inf.$

Tous les ensembles de Lebesgue $\mathscr{L}_a f_0$ d'une fonction continue f_0 sont compacts, par conséquent, l'existence de la solution découle

du théorème de Weierstrass.

$$2 \text{ à } 5.\ f'(\hat{x})=0 \Rightarrow \frac{\hat{x}}{v_1\sqrt{\alpha^2+\hat{x}^2}}=\frac{\xi-\hat{x}}{v_2\sqrt{\beta^2+(\xi-\hat{x})^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\varphi_1}{v_1}=\frac{\sin\varphi_2}{v_2}$$

(voir fig. 19 dans 1.2.2).

6. Le point $\hat{x}$ satisfaisant à la dernière équation est unique (vérifier !), c'est donc une solution du problème. Ainsi le point de réfraction du rayon lumineux à la surface de séparation de deux milieux est caractérisé par le fait que *le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est égal au rapport des vitesses de la propagation de la lumière dans les milieux correspondants.* C'est là justement la *loi de Snellius.*

Problème de Steiner. Il avait été formalisé comme suit (voir (5), 1.2.2):

$$1.\ f_0(x)=|x-\xi_1|+|x-\xi_2|+|x-\xi_3| \to \inf, \quad x \in \mathbf{R}^2,$$

$$\xi_i \in \mathbf{R}^2, \quad i=1,\ 2,\ 3, \quad |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

La solution du problème existe en vertu du théorème de Weierstrass (vérifier!). Il y a deux possibilités: ou bien la solution coïncide avec un des points ξ_i, $i = 1, 2, 3$, ou bien diffère de chacun d'eux. Cherchons la solution du problème dans le dernier cas. Alors la fonction sera différentiable au voisinage du point $\hat{x}$ (vérifier !).

$$2 \text{ à } 5.\ f_0'(\hat{x})=0 \Rightarrow \frac{\xi_1-\hat{x}}{|\hat{x}-\xi_1|}+\frac{\xi_2-\hat{x}}{|\hat{x}-\xi_2|}+\frac{\xi_3-\hat{x}}{|\hat{x}-\xi_3|}=0. \tag{3}$$

6. L'équation (3) signifie que les trois vecteurs unités qui regardent du point $\hat{x}$ dans la direction de ξ_1, ξ_2, ξ_3 respectivement ont une somme nulle. Par conséquent, ces vecteurs sont parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral et les angles $\xi_1\hat{x}\xi_2$, $\xi_2\hat{x}\xi_3$, $\xi_3\hat{x}\xi_1$ sous lesquels on voit les côtés du triangle à partir du point $\hat{x}$ sont de 120°. Ainsi le point $\hat{x}$ est le point de Torricelli. Il peut être également trouvé comme le point d'intersection de deux arcs de cercle soustendus par les cordes $[\xi_1, \xi_2]$ et $[\xi_1, \xi_3]$ et correspondant à des angles de 120°. Cette construction est possible si aucun des angles du triangle n'est supérieur à 120°. Dans le cas contraire, les arcs ne se coupent plus, et il est donc impossible que le point $\hat{x}$ ne coïncide pas avec un des points ξ_i, $i = 1, 2, 3$. Mais alors il doit évidemment coïncider avec le sommet de l'angle obtus, car le plus grand côté du triangle est opposé à l'angle obtus.

R é p o n s e: *Le point cherché est le point de Torricelli, si tous les angles du triangle sont inférieurs à* 120°; *c'est le sommet de l'angle obtus dans les autres cas.*

Ainsi, tous les problèmes géométriques que nous avions considérés dans 1.1.2, ainsi que le problème de la réfraction de la lumière (1.1.3) sont résolus. En passant, trouvons la solution du *problème de Tartaglia*:

1. $f_0(x) = x(8-x)(8-2x) \to \sup, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4.$

2 à 5. $f_0'(\hat{x}) = 0 \Rightarrow 3\hat{x}^2 - 24\hat{x} + 32 = 0 \Rightarrow \hat{x} = 4 - 4/\sqrt{3}.$

6. R é p o n s e: *Un nombre est égal à* $4 - 4/\sqrt{3}$, *l'autre à* $4 + 4/\sqrt{3}$.

1.6.2. Problème aérodynamique de Newton. Ce probcème a été posé dans 1.1.5 et formalisé dans 1.2.3.

1. $$\int_0^T \frac{t\,dt}{1+u^2} \to \inf, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = \xi, \quad u \in \mathbf{R}_+.$$

Pour les problèmes de ce genre, il est difficile de démontrer directement le théorème d'existence. L'ennui principal provient de la non-convexité de l'intégrante $t/(1+u^2)$ relativement à u pour $u \geqslant 0$. Nous donnerons néanmoins une résolution complète de ce problème. Notre plan est le suivant. En supposant que la solution du problème existe, nous appliquerons à la solution hypothétique le principe de Lagrange. Ayant trouvé qu'il existe une seule courbe stationnaire admissible pour ce problème (i.e. une courbe admissible pour laquelle toutes les conditions dictées par le principe de Lagrange sont remplies), nous vérifierons par un calcul direct que c'est bien elle qui donne le minimum absolu. En conclusion, nous rappelons le texte de Newton: nous verrons que la solution trouvée est exactement celle qu'il décrivit en 1687.

2. $$\mathscr{L} = \int_0^T L\,dt + \mu_0 x(0) + \mu_1(x(T) - \xi),$$

$$L = \frac{\lambda_0 t}{1+u^2} + p(\dot{x} - u).$$

3. E q u a t i o n d' E u l e r:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow \hat{p}(t) = \mathrm{Cte} = p_0. \tag{1}$$

C o n d i t i o n d e t r a n s v e r s a l i t é:

$$p_0 = \hat{\mu}_0 = -\hat{\mu}_1 \tag{2}$$

Condition de minimalité par rapport à u:

$$\frac{\hat{\lambda}_0 t}{1+u^2} - p_0 u \geqslant \frac{\hat{\lambda}_0 t}{1+\hat{u}^2(t)} - p_0 \hat{u}(t), \quad \forall u \geqslant 0. \tag{3}$$

4. Si l'on suppose que $\hat{\lambda}_0 = 0$, on a nécessairement $p_0 \neq 0$ (autrement (2) impliquerait les égalités $\hat{\lambda}_0 = p_0 = \hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1 = 0$, mais tous les multiplicateurs de Lagrange ne peuvent s'annuler simultanément). Si l'on a $\hat{\lambda}_0 = 0$ et $p_0 \neq 0$, alors (3) implique que $\hat{u}(t) \equiv 0$ et donc $\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{u}(t)\, d\tau \equiv 0$.

Mais alors le corps cherché n'a pas de « longueur », c'est une membrane plane. Si $\xi > 0$, alors $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ et l'on peut supposer que $\hat{\lambda}_0 = 1$. Remarquons également que le cas $p_0 \geqslant 0$ est aussi impossible, car dans ce cas la fonction $(t/(1+u^2)) - p_0 u$ serait décroissante monotone et (3) ne serait plus vérifié pour $u > \hat{u}(t)$.

5. Il découle de (3) (avec $\hat{\lambda}_0 = 1$) que, jusqu'à un certain moment, la commande optimale est nulle (vérifiez que pour $p_0 < 0$ et t petit la fonction $u \mapsto (t/(1+u^2)) - p_0 u$ atteint son minimum pour $u = 0$). Ensuite la commande optimale $\hat{u}(\cdot)$ s'obtient de l'équation

$$-p_0 = \frac{2ut}{(1+u^2)^2}, \tag{4}$$

qui découle de l'équation $L_u = 0$. Le moment de cassure τ est déterminé par le fait que la fonction $u \mapsto (\tau/(1+u^2)) - p_0 u$ possède deux minimums égaux : au point zéro et au point déterminé à partir de (4) pour $t = \tau$. Autrement dit, le moment de cassure doit vérifier les relations (où, et par la suite, $\hat{u}(\tau)$ désigne $\hat{u}(\tau + 0) \neq 0$) :

$$-p_0 = \frac{2\hat{u}(\tau)\tau}{(1+\hat{u}^2(\tau))^2}, \quad \frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)} - p_0 \hat{u}(\tau) = \tau. \tag{5}$$

Il découle de la deuxième équation que

$$-\hat{u}^2(\tau)\,\tau/(1+\hat{u}^2(\tau)) = p_0 \hat{u}(\tau),$$

d'où l'on tire $p_0 = -\tau\hat{u}(\tau)/(1+\hat{u}^2(\tau))$. En substituant cette relation dans la première équation de (5), nous trouvons que $\hat{u}^2(\tau) = 1 \Rightarrow \hat{u}(\tau) = 1$ (puisque $\hat{u} \geqslant 0$) et alors, en nous servant à nouveau de la première des équations (5), nous obtenons l'égalité $\tau = -2p_0$.

Après la cassure, la solution optimale doit vérifier la relation (4), qui implique

$$t = -\frac{p_0(1+u^2)^2}{2u} = -\frac{p_0}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right). \tag{6}$$

Mais

$$\frac{dx}{dt}=u \Rightarrow \frac{dx}{du}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{du}=u\frac{dt}{du}=-\frac{p_0}{2}\left(-\frac{1}{u}+2u+3u^3\right).$$

En prenant l'intégrale de cette relation compte tenu des égalités $\hat{x}(\tau)=0$, $\hat{u}(\tau)=1$, on obtient l'équation paramétrique de la courbe optimale cherchée

$$\hat{x}(t,\ p_0)=-\frac{p_0}{2}\left(\ln\frac{1}{u}+u^2+\frac{3}{4}u^4\right)+\frac{7}{8}p_0,$$
$$t=-\frac{p_0}{2}\left(\frac{1}{u}+2u+u^3\right),\quad p_0<0. \tag{7}$$

6. La courbe (7) est appelée *courbe de Newton.* On a d'après (7) $u\in[1,\ \infty)$. On voit aisément que l'intersection de la droite $x=\alpha t$ avec la courbe de Newton, qui correspond au paramètre $p_0=-1$, est unique. En effet, $x(\cdot,\ -1)$ est continue et convexe puisque

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}=\frac{1}{dt/du}\geqslant 0.$$

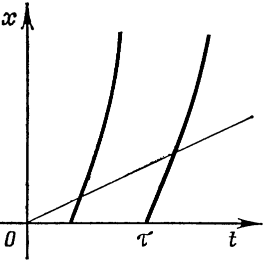


Fig. 27

Mais, d'autre part, on voit d'après les formules (7) que la courbe de Newton $\hat{x}(\cdot,\ p_0)$ s'obtient de la courbe $\hat{x}(\cdot,\ -1)$ par homothétie de centre (0, 0) et de rapport $|p_0|$ (fig. 27). Par conséquent, pour faire passer une courbe de la famille (7) par un point donné $(\xi,\ T)$, il faut trouver le point d'intersection de la droite $x=\xi t/T$ avec la courbe $\hat{x}(\cdot,\ -1)$ et ensuite effectuer l'homothétie correspondante de la courbe $\hat{x}(\cdot,\ -1)$. Nous obtiendrons une courbe admissible $\hat{x}(\cdot)$. Vérifions qu'elle donne un minimum absolu pour notre problème. Pour cela revenons à la relation (3) avec $\hat{\lambda}_0=1$. Soit $x(\cdot)$ une courbe admissible quelconque (i.e. $x(\cdot)\in KC^1([0,\ T])$, $x(0)=0$, $x(T)=\xi$). Alors d'après (3)

$$\frac{t}{1+\dot{x}^2(t)}-p_0\dot{x}(t)\geqslant\frac{t}{1+\hat{u}(t)^2}-p_0\hat{u}(t).$$

Prenant l'intégrale dans cette relation et en se servant du fait que $\hat{u}(t)=\dot{\hat{x}}(t)$ et $\int_0^T\dot{x}(t)\,dt=\int_0^T\dot{\hat{x}}(t)\,dt=\xi$, on obtient

$$\int_0^T\frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2}\geqslant\int_0^T\frac{t\,dt}{1+\dot{\hat{x}}^2}.$$

Le problème est entièrement résolu.

R e m a r q u e s. 1. Dans 2 à 5 nous avons appliqué le principe de Lagrange à un problème de commande optimale qui se réduit au principe du maximum de Pontriaguine (1.5.3).

2. Comparons maintenant la solution obtenue avec celle qui fut décrite par Newton lui-même. Rappelons les paroles de Newton, citées dans 1.1.5, et voyons encore une fois son esquisse (voir fig. 18). En plus des lettres employées par Newton, nous nous servirons en même temps de certaines de nos propres notations. Nous avons $|MN| = t$, $|BM| = x$, $|BG| = \tau$, l'angle BGP est égal à φ; il découle alors de la construction de Newton que

$$\operatorname{tg} \varphi = \dot{x}(t), \quad |BP| / |BG| = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow |BP| = \tau\dot{x},$$
$$|GP|^2 = |BG|^2 + |BP|^2 = (\dot{x}^2 + 1)\tau^2.$$

Maintenant, d'après le rapport de Newton,

$$|MN| : |GP| = |GP|^3 : 4(|BP| \times |GB|^2),$$

ou, en substituant nos propres notations, nous obtenons

$$\frac{t}{(\dot{x}^2+1)^{1/2}\tau} = \frac{\tau^3(\dot{x}^2+1)^{3/2}}{4\tau\dot{x}\tau^2} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}t}{(\dot{x}^2+1)^2} = \frac{\tau}{4}. \tag{8}$$

Mais ceci est précisément la relation (4), dans laquelle on a substitué la valeur $p_0 = -\tau/2$. En raisonnant comme précédemment, à partir de (8), on trouve par intégration l'expression (7) pour la courbe de Newton. Remarquons également que le caractère « obtus » de la courbe et la condition relative à la cassure au point $G \Leftrightarrow \tau$ (l'angle y est égal à 135°) furent en fait pris en considération par Newton dans son *Commentaire* concernant le cône tronqué.

Ainsi le problème de Newton fut entièrement résolu par celui-ci, mais la signification de sa solution resta inabordable non seulement pour ses contemporains, mais pour de nombreux de ses successeurs — jusqu'à nos jours.

1.6.3. Problème élémentaire de temps minimum. Le problème posé dans 1.1.7 a été formalisé de la manière suivante:

$$\begin{gathered} T \to \inf, \quad m\ddot{x} = u, \quad u \in [u_1, u_2], \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

(voir (5) dans 1.2.4). Le cas $u_1 = u_2$ ne présente aucun intérêt, puisqu'alors pour chaque paire (x_0, v_0) il n'existe pas une fonction $x(\cdot)$ qui vérifie toutes les contraintes (1), et si une telle fonction non identiquement nulle existe, alors la valeur de T est uniquement déterminée; il n'y a donc aucun problème de minimisation à considérer.

Pour $u_1 < u_2$ nous pouvons faire décroître le nombre des paramètres du problème en effectuant la substitution $x(t) = A\xi(t) + B(t-T)^2$. En termes de la fonction $\xi(\cdot)$, la forme générale du problème (1) ne change pas, mais les paramètres x_0, v_0, u_1, u_2 prennent de nouvelles valeurs. En particulier, si l'on pose

$$A = (u_1 - u_2)/2m, \quad B = (u_1 + u_2)/4m,$$

alors $\ddot{\xi} \in [-1, 1]$. Prenant ceci en considération, nous supposons maintenant que dans (1) on a $m = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = +1$. En outre, introduisons les notations $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$.

Passons maintenant à la réalisation de notre schéma habituel

$$1.\ T = \int_0^T 1\cdot dt \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in [-1, 1],$$
$$x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = v_0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0. \tag{2}$$

En ce qui concerne l'existence de la solution, nous raisonnerons comme dans le sous-paragraphe précédent: ayant trouvé à partir du principe de Lagrange une fonction $x(\cdot)$ « suspecte » d'optimalité, nous montrerons, par une vérification directe, qu'elle donne effectivement la solution du problème.

$$2.\ \mathscr{L} = \int_0^T L\,dt + \mu_1(x_1(0) - x_0) + \mu_2(x_2(0) - v_0) + \nu_1 x_1(T) + \nu_2 x_2(T), \tag{3}$$

où $L = \lambda_0 + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)$.

3. Equations d'Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \Rightarrow \frac{d\hat{p}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{p}_2}{dt} = -\hat{p}_1. \tag{4}$$

Conditions de transversalité

$$\hat{p}_1(0) = \hat{\mu}_1, \quad \hat{p}_2(0) = \hat{\mu}_2, \quad \hat{p}_1(T) = -\hat{\nu}_1, \quad \hat{p}_2(T) = -\hat{\nu}_2. \tag{5}$$

Principe du maximum: en éliminant les termes qui ne dépendent pas de u, on peut récrire cette condition sous la forme

$$\hat{p}_2(t)\,\hat{u}(t) = \max_{-1\leqslant u\leqslant 1}\{\hat{p}_2(t)\,u\} = |\hat{p}_2(t)|$$

ou

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \hat{p}_2(t), & \text{si } \hat{p}_2(t) \neq 0, \\ \text{élément arbitraire de } [-1, 1], & \text{si } \hat{p}_2(t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

En outre, dans le problème considéré, le moment terminal T est variable aussi (c'est justement cette variable que nous minimisons), de sorte que ce problème, du point de vue formel, ne peut se placer dans le cadre de 1.5.3. On peut montrer, ce que nous ferons au chapitre IV, que dans cette situation il faut ajouter aux équations (4) à (6) une nouvelle condition $\mathscr{L}_T = 0$ (la stationnarité de la fonction de Lagrange relativement à T), qui est tout à fait conforme à l'idéologie générale du principe de Lagrange. En prenant la dérivée de (3) par rapport à T et en se servant des égalités $\dot{x}_2(T) = u(T)$, $\dot{x}_1(T) = x_2(T) = 0$, on obtient

$$\mathscr{L}_T = \hat{\lambda}_0 + \hat{\nu}_2 \hat{u}(T) = 0. \tag{7}$$

4. Dans ce problème, il n'est d'aucune importance de savoir si $\hat{\lambda}_0$ s'annule ou non, puisque $\hat{\lambda}_0$ ne participe pas aux équations (4) à (6).

5. Il découle des équations (4) que $\hat{p}_1(t) \equiv \text{Cte}$, tandis que $\hat{p}_2(\cdot)$ est une fonction linéaire quelconque. On a alors $\hat{p}_2(t) \not\equiv 0$, parce que

$$\hat{p}_2(t) \equiv 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \hat{p}_1(t) \equiv 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2 = 0 \overset{(7)}{\Rightarrow} \hat{\lambda}_0 = 0$$

et tous les multiplicateurs de Lagrange s'annulent.

Une fonction linéaire non identiquement nulle s'annule sur le segment $[0, T]$ au plus une seule fois. Par conséquent, on obtient d'après (6) les possibilités suivantes pour la commande optimale:

a) $\hat{u}(t) \equiv 1$;

b) $\hat{u}(t) \equiv -1$

($\hat{p}_2(\cdot)$ ne s'annule pas sur $[0, T]$),

c) $\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ -1, & \tau < t \leqslant T, \end{cases}$

d) $\hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 1, & \tau < t \leqslant T. \end{cases}$

$\hat{p}_2(\cdot)$ s'annule au point $t = \tau$, la valeur de la commande au point $t = \tau$ est sans importance, car son changement en un seul point n'influence pas la fonction $\hat{x}(\cdot)$ (pourquoi ?). Mais pour cette même raison, on peut laisser de côté les cas $\tau = T$ et $\tau = 0$.

Les considérations suivantes seront effectuées sur le plan de phase (x_1, x_2), ce qui est plus commode (fig. 28). En résolvant le problème de Cauchy

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \hat{u}(t), \quad x_1(T) = x_2(T) = 0 \tag{8}$$

pour une des commandes a) à d), nous obtenons une solution unique, et avec celle-ci un point initial unique $(x_0, v_0) = (x_1(0), x_2(0))$ qui correspond à cette solution. On vérifie aisément que, pour tous les τ et T, ces points initiaux recouvrent le plan tout entier. Tout d'abord

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2^2/2 + C_1, \tag{9}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -x_2^2/2 + C_2, \tag{10}$$

de sorte que les trajectoires de phase sur les parties où la commande est constante sont situées sur les paraboles d'une des familles (9) ou (10).

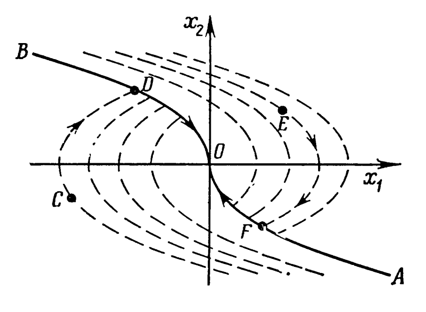


Fig. 28

A la commande a) correspondent les points initiaux situés sur l'arc OFA (fig. 28): $x_0 = v_0^2/2$, $v_0 < 0$; à la commande b), les points de l'arc ODB: $x_0 = -v_0^2/2$, $v_0 > 0$.

Les points initiaux C, situés à gauche de la ligne de séparation $BDOFA$ $(x_0 = -v_0 \mid v_0 \mid/2)$, correspondent aux commandes c): sur l'arc CD de la famille (9) $\hat{u}(t) \equiv 1$, au moment $t = \tau$ nous arrivons au point D, ensuite il y a un changement de commande et l'on se déplace le long de l'arc DO avec $\hat{u}(t) \equiv -1$. D'une manière analogue, aux points E à droite de la courbe séparatrice correspondent les commandes d).

6. Il nous reste seulement à montrer que la solution unique ainsi trouvée $\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t)$, correspondant au point initial (x_0, v_0), donne effectivement une solution du problème (2).

Supposons qu'une certaine fonction $x(\cdot)$ est définie sur le segment $[0, \widetilde{T}]$, possède une dérivée seconde continue par morceaux et

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(\widetilde{T}) = \dot{x}(\widetilde{T}) = 0,$$

où $\widetilde{T} \leqslant T$. Pour $\widetilde{T} < T$, nous prolongeons la définition de $x(\cdot)$ en posant $x(t) \equiv 0$, $t \in [\widetilde{T}, T]$. Alors les deux fonctions $x(\cdot)$, $\hat{x}(\cdot)$ seront définies sur un même intervalle fermé $[0, T]$ et auront des valeurs limites identiques

$$\begin{gathered} x(0) = \hat{x}(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{\hat{x}}(0) = v_0, \\ x(T) = \hat{x}(T) = \dot{x}(T) = \dot{\hat{x}}(T) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Montrons que si $|\ddot{x}| \leqslant 1$, alors $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ et, en particulier, l'inégalité $\tilde{T} < T$ est impossible. Ainsi nous aurons démontré l'optimalité de la fonction $\hat{x}(\cdot)$. A cause de la symétrie du problème, nous nous limiterons à la commande c) (ou son cas limite a)). Lorsque $\ddot{x}| \leqslant 1$, on peut prendre deux fois l'intégrale de l'inégalité $|\ddot{x}(t) \leqslant 1$ et obtenir, en se servant de (11),

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_0^\tau \int_0^t (1 - \ddot{x}(s))\, ds\, dt \geqslant 0, \tag{12}$$

l'égalité ici étant possible seulement si l'on a la relation $\ddot{x}(s) \equiv 1$ dans tous les points de continuité de la fonction $\ddot{x}$, et alors $x(t) \equiv \hat{x}(t)$, $t \in [0, \tau]$.

D'une manière analogue, intégrant deux fois l'inégalité $\ddot{x}(t) \geqslant -1$, on obtient

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_\tau^T \int_t^T (-1 - \ddot{x}(s))\, ds\, dt \leqslant 0, \tag{13}$$

là aussi l'égalité n'est possible que si $\ddot{x}(s) \equiv -1$ et $x(t) \equiv \hat{x}(t)$, $t \in [\tau, T]$.

En comparant (12) et (13), nous voyons néanmoins que $\hat{x}(\tau) = x(\tau)$, alors, comme nous l'avons déjà mentionné, $\hat{x}(t) \equiv x(t)$, $t \in [0, T]$.

R e m a r q u e. L'égalité $\hat{\lambda}_0 = |p_2(T)|$ découle des relations (5) à (7) et ainsi l'égalité $\hat{\lambda}_0 = 0$ dans ce problème s'avère possible lorsque $p_2(\cdot)$ s'annule pour $t = T$. Alors la fonction $p_2(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle (autrement tous les multiplicateurs de Lagrange] seraient nuls); par conséquent, à cause de l'égalité $p_2(T) = 0$, on voit que $p_2(\cdot)$ ne peut changer de signe et il n'y a pas de changement de commande du tout. Ainsi, le cas $\hat{\lambda}_0 = 0$ correspond au mouvement le long des lignes de changement de commande *AFO* et *BDO*.

1.6.4. Problème isopérimétrique classique et problème de Tchaplyguine. Le plus ancien des problèmes d'extrémum — le premier des deux dans ce titre — fut posé dans 1.1.1 et formalisé de diverses manières dans 1.2.4. En particulier, la formalisation (2), donnée dans 1.2.4, le réduit à un problème plus général, qui comprend en même temps le problème de Tchaplyguine. En partant de cette formalisation, nous trouverons maintenant la solution des

deux problèmes en suivant notre schéma usuel. Ainsi

$$1.\quad S=\frac{1}{2}\int_0^T (xv-yu)\,dt \to \sup\,; \tag{1}$$

$$\dot{x}=u,\quad \dot{y}=v,\quad (u,v)\in A,\quad x(0)=x(T),\quad y(0)=y(T).$$

L'ensemble des vitesses admissibles A sera supposé convexe fermé borné dans $\mathbf{R}^2$.

E x e r c i c e. Montrer que pour résoudre le problème posé il est nécessaire d'avoir $0\in A$. I n d i c a t i o n : on peut se servir du résultat de l'exercice 2 dans 2.2.3.

$$2.\quad \mathscr{L}=\int_0^T L\,dt+\mu\,(x(0)-x(T))+\nu\,(y(0)-y(T)), \tag{2}$$

où

$$L=-\frac{\lambda_0}{2}(xv-yu)+p\,(\dot{x}-u)+q\,(\dot{y}-v).$$

3. E q u a t i o n s d'E u l e r - L a g r a n g e

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0 &\Rightarrow -\dot{\hat{p}}-\frac{\hat{\lambda}_0}{2}\hat{v}=0,\\ -\frac{d}{dt}L_{\dot{y}}+L_y=0 &\Rightarrow -\dot{\hat{q}}+\frac{\hat{\lambda}_0}{2}\hat{u}=0. \end{aligned} \tag{3}$$

C o n d i t i o n s d e t r a n s v e r s a l i t é

$$\hat{p}(0)=\hat{p}(T)=\hat{\mu},\quad \hat{q}(0)=\hat{q}(T)=\hat{\nu}.$$

P r i n c i p e d u m a x i m u m

$$\begin{aligned} &\left(\hat{p}(t)-\frac{\hat{\lambda}_0}{2}\hat{y}(t)\right)\hat{u}(t)+\left(\hat{q}(t)+\frac{\hat{\lambda}_0}{2}\hat{x}(t)\right)\hat{v}(t)=\\ &\quad=\max_{(u,v)\in A}\left(\left(\hat{p}(t)-\frac{\hat{\lambda}_0}{2}\hat{y}(t)\right)u+\left(\hat{q}(t)+\frac{\hat{\lambda}_0}{2}\hat{x}(t)\right)v\right). \end{aligned} \tag{4}$$

4. Si l'on suppose que $\hat{\lambda}_0=0$, alors il découle des équations d'Euler-Lagrange que $\hat{p}(t)\equiv \text{Cte}$, $\hat{q}(t)\equiv\text{Cte}$ et $\hat{p}^2+\hat{q}^2>0$, car autrement les conditions de transversalité annuleraient tous les multiplicateurs de Lagrange. Ainsi le principe du maximum se met sous la forme

$$\hat{p}\hat{u}(t)+\hat{q}\hat{v}(t)=\max_{(u,v)\in A}(\hat{p}u+\hat{q}v),$$

d'où l'on voit que $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$ appartient toujours à une même droite, à savoir à une des deux droites qui supportent l'ensemble A, perpendiculaires au vecteur $(\hat{p}, \hat{q})$ (fig. 29). Par conséquent,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) = \hat{u}(0) - \alpha(t)\,\hat{q},$$

$$\dot{\hat{y}}(t) = \hat{v}(t) = \hat{v}(0) + \alpha(t)\,\hat{p},$$

d'où, en prenant les intégrales, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}(0) + \hat{u}(0)\,t - \int_0^t \alpha(t)\,dt\cdot\hat{q}, \\ \hat{y}(t) &= \hat{y}(0) + \hat{v}(0)\,t + \int_0^t \alpha(t)\,dt\cdot\hat{p}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

En posant $t = T$ dans (5) et en se servant des conditions aux limites $x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$, on s'assure que le vecteur $(\hat{q}, -\hat{p})$ est proportionnel à $(\hat{u}(0), \hat{v}(0))$, d'où l'on voit ensuite, à partir de (5), que $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ est toujours situé sur la droite qui passe par $(\hat{x}(0), \hat{y}(0))$ parallèlement au vecteur $(\hat{q}, -\hat{p})$. Par conséquent, la courbe fermée $\{(\hat{x}(t), \hat{y}(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ dégénère (elle est contenue dans cette droite) et la surface qu'elle limite est nulle. (Montrez-le analytiquement en vous servant de l'expression pour S calculée ci-dessus !) Par conséquent, cette courbe ne peut être optimale.

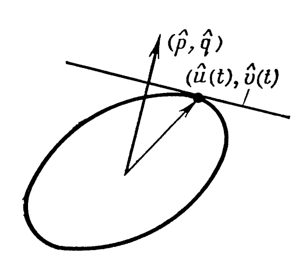


Fig. 29

5. Il découle de l'étape 4 que l'on peut poser $\hat{\lambda}_0 = 1$. Alors, d'après (3),

$$\dot{\hat{p}} + \frac{\hat{v}}{2} = 0 \Rightarrow \hat{p}(t) + \frac{\hat{y}(t)}{2} = b = \text{Cte},$$

$$\dot{\hat{q}} - \frac{\hat{u}}{2} = 0 \Rightarrow \hat{q}(t) - \frac{\hat{x}(t)}{2} = -a = \text{Cte}.$$

En substituant ces expressions dans (4), on obtient

$$(\hat{x}(t) - a)\,\hat{v}(t) - (\hat{y}(t) - b)\,\hat{u}(t) =$$
$$= \max_{(u,\,v)\in A} \{(\hat{x}(t) - a)\,v - (\hat{y}(t) - b)\,u\}. \qquad (6)$$

Laissons maintenant de côté le cas général et limitons-nous à deux variantes plus particulières.

a) Problème isopérimétrique classique. Ici

$$A = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leqslant 1\}$$

et il découle de (6) que

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) = -\frac{\hat{y}(t) - b}{\mathcal{H}}, \quad \dot{\hat{y}}(t) = \hat{v}(t) = \frac{\hat{x}(t) - a}{\mathcal{H}}, \tag{7}$$

où

$$\mathcal{H} = ((\hat{x}(t) - a)^2 + (\hat{y}(t) - b)^2)^{1/2}$$

(le produit scalaire des vecteurs $(\hat{x} - a, \hat{y} - b)$ et $(v, -u)$ sera maximal lorsqu'ils ont le même sens et le deuxième est de longueur maximale, i.e. de longueur 1). On tire de (7) que

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}^2) = 0,$$

i.e. sur la trajectoire optimale on a

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) = ((\hat{x}(t) - a)^2 + (\hat{y}(t) - b)^2)^{1/2} =$$
$$= \max_{(u, v) \in A} ((\hat{x}(t) - a)v - (\hat{y}(t) - b)u) = R = \text{Cte.} \tag{8}$$

D'où l'on conclut que *la trajectoire optimale est le cercle de centre* (a, b) *et de rayon* R. Puisque la vitesse angulaire du mouvement le long de ce cercle est égale à

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R^2}((x - a)\dot{y} - (y - b)\dot{x}) \equiv \frac{1}{R},$$

et le point doit revenir au même endroit (en ayant peut-être effectué plusieurs rotations) à la fin du temps T, on a $2\pi n = \frac{T}{R}$ et $R = \frac{T}{2\pi n}$. L'aire limitée par la courbe trouvée sera alors égale à

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (xv - yu)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T ((x - a)\dot{y} -$$
$$- (y - b)\dot{x})\,dt = \frac{R^2}{2}\frac{T}{R} = \frac{T^2}{4\pi n}.$$

Par conséquent, $n = 1$ (un seul tour du cercle a été effectué) et $S = T^2/4\pi$. Remarquons que dans ce cas T est la longueur de la courbe.

b) P r o b l è m e d e T c h a p l y g u i n e. Ici

$$A = \{(u, v) \mid (u - u_0)^2 + v^2 \leqslant V^2\},$$

$(u_0, 0)$ est le vecteur de la vitesse du vent, $V \geqslant |u_0|$ est la vitesse maximale de l'avion. Pour résoudre le problème extrémal auxiliaire

$$(\hat{x}(t) - a)\, v - (\hat{y}(t) - b)\, u \to \sup,$$
$$(u - u_0)^2 + v^2 \leqslant V^2,$$

on peut, par exemple, se servir de la substitution $u = u_0 + \xi$, $v = \eta$ et employer ensuite les mêmes considérations géométriques que dans le cas précédent. Ceci donne les équations

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t) = u_0 - V\frac{\hat{y}(t) - b}{R(t)}, \quad \dot{\hat{y}}(t) = \hat{v}(t) = V\frac{\hat{x}(t) - a}{R(t)},$$

où maintenant l'expression

$$R(t) = ((\hat{x}(t) - a)^2 + (\hat{y}(t) - b)^2)^{1/2}$$

ne sera plus constante. Néanmoins,

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{R(t)}((\hat{x}(t) - a)\,\dot{\hat{x}}(t) + (\hat{y}(t) - b)\,\dot{\hat{y}}(t)) =$$
$$= \frac{\hat{x}(t) - a}{R(t)}\, u_0 = \frac{u_0}{V}\frac{d\hat{y}(t)}{dt},$$

de sorte que

$$R(t) - \frac{u_0}{V}\hat{y}(t) = ((\hat{x}(t) - a)^2 + (\hat{y}(t) + b)^2)^{1/2} - \frac{u_0}{V}\hat{y}(t) = \text{Cte}. \qquad (9)$$

Ainsi *la courbe optimale est une ellipse d'équation*

$$((x - a)^2 + (y - b)^2)^{1/2} - \frac{u_0}{V}\, y = \text{Cte}. \qquad (10)$$

De même que dans le cas précédent, on peut montrer que cette ellipse est contournée par la trajectoire $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ exactement une seule fois. Remarquons que si la vitesse de l'avion aurait été inférieure à la vitesse du vent ($V < |u_0|$), il ne pourrait retourner au point initial (démontrez-le et comparez à l'exercice au début de ce paragraphe), tandis que la courbe (10) serait une hyperbole, i.e. serait non fermée.

R e m a r q u e. Contrairement au schéma admis, nous avons passé sous silence la question de l'existence de la solution. Ce n'est pas par hasard : un simple renvoi au théorème de Weierstrass est ici insuffisant. Indiquons brièvement une méthode de raisonnement possible.

Notons tout d'abord qu'on peut, sans perte de généralité, poser $x(0) = y(0) = 0$.

En se servant du théorème d'Arzelà ([KF], pp. 104-105), on peut montrer que l'ensemble des paires de fonctions $\{(x(\cdot), y(\cdot))\}$, qui vérifient sur l'intervalle fermé $[0, T]$ la condition généralisée de Lipschitz et les conditions aux limites

$$\left(\frac{x(t_1)-x(t_2)}{t_1-t_2}, \frac{y(t_1)-y(t_2)}{t_1-t_2}\right) \in A, \quad t_1 \neq t_2, \quad 0 \leqslant t_1, \ t_2 \leqslant T, \tag{11}$$

$$x(0) = x(T) = 0, \quad y(0) = y(T) = 0,$$

est compact dans l'espace $C([0, T]) \times C([0, T])$.

Ensuite, la fonctionnelle « aire » est définie sur cet ensemble; c'est une fonction semi-continue par en bas. En appliquant la généralisation correspondante du théorème de Weierstrass, nous voyons que la solution $(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot))$ existe.

Enfin, les fonctions qui vérifient la condition (11) sont différentiables presque partout et $(\dot{\hat{x}}(t), \dot{\hat{y}}(t)) \in A$. Il s'avère possible de généraliser le principe du maximum à cette situation et par conséquent les raisonnements employés ci-dessus sont applicables à la solution $(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot))$.

1.6.5. Problème du brachistochrone et quelques problèmes géométriques. Considérons la série suivante de problèmes élémentaires du calcul des variations classique:

$$1. \ \mathcal{J}(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} y^\alpha \sqrt{1+y'^2}\, dx \to \inf; \quad y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1. \tag{1}$$

Cette série comprend plusieurs problèmes intéressants: pour $\alpha = 0$ on obtient le problème des courbes de plus petite longueur sur le plan; pour $\alpha = -1/2$, le problème du brachistochrone (voir 1.2.4); pour $\alpha = 1$, le problème de la surface de révolution minimale; pour $\alpha = -1$, le problème des courbes de plus petite longueur sur le plan de Lobatchevski, dans l'interprétation de Poincaré [15, pp. 131-132].

L'intégrante $f_\alpha = y^\alpha \sqrt{1+y'^2}$ dans les problèmes (1) ne dépend pas de x.

Par conséquent l'équation d'Euler possède une intégrale d'énergie (voir 1.4.1) qui permet de trouver toutes les extrémales situées dans le demi-plan supérieur.

$$2 \text{ à } 4. \qquad y' f_{\alpha y'} - f = \text{Cte} \Rightarrow y^{-2\alpha}(1+y'^2) = D^2. \tag{2}$$

5. Considérons d'abord le cas des valeurs négatives de α: $\alpha = -\beta$, $\beta > 0$. Alors

$$\frac{y^\beta\,dy}{\sqrt{D^2-y^{2\beta}}} = dx \Rightarrow x - C_1 = \int \frac{y^\beta\,dy}{\sqrt{D^2-y^{2\beta}}}. \tag{3}$$

Effectuons le changement de variable

$$y^{2\beta} = D^2\sin^2 t \Rightarrow y = D^{1/\beta}\sin^{1/\beta} t \Rightarrow dy = \frac{D^{1/\beta}}{\beta}\sin^{1/\beta-1} t\cos t\,dt.$$

En substituant les expressions obtenues dans (3), nous obtenons les relations suivantes ($D^{1/\beta} = C$):

$$y = C\sin^{1/\beta} t, \quad x = C_1 + \frac{C}{\beta}\int_0^t \sin^{1/\beta} s\,ds.$$

En particulier, lorsque $\beta = 1/2$ (le brachistochrone), on obtient la famille de cycloïdes qui s'expriment sous forme paramétrique ($\tau=2t$) de la manière suivante

$$\hat{y}(\tau, C, C_1) = \frac{C}{2}(1-\cos\tau), \quad \hat{x}(\tau, C, C_1) = C_1 + \frac{C}{2}(\tau - \sin\tau).$$

Lorsque $\beta = 1$ (le demi-plan de Poincaré), nous obtenons une famille de demi-cercles

$$\hat{y}(t, C, C_1) = C\sin t, \quad \hat{x}(t, C, C_1) = C_1 - C\cos t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\hat{x} - C_1)^2 + \hat{y}^2 = C^2.$$

En ce qui concerne la série $\alpha > 0$, nous n'en résolvons que le problème de la surface de révolution minimale. Nous avons, d'après (2),

$$\frac{dy}{\sqrt{D^2y^2-1}} = dx.$$

En nous servant de la substitution

$$Dy = \operatorname{ch} t \Rightarrow D\,dy = \operatorname{sh} t\,dt, \quad \sqrt{D^2y^2-1} = \operatorname{sh} t,$$

nous trouvons une famille de chaînettes à deux paramètres

$$y = \frac{1}{D}\operatorname{ch}(Dx + D_1).$$

Ayant obtenu dans tous les cas une famille d'extrémales à deux paramètres (solutions des équations d'Euler), il faut maintenant choisir les constantes d'intégration de manière à remplir les conditions aux limites $y(x_i) = y_i$ et passer à l'étape 6: l'étude des solutions trouvées et l'expression de la réponse.

Toutefois nous ne le ferons pas ici. En nous rappelant que, de plus, nous avons à nouveau évité ici de discuter la question de l'existence de la solution, le lecteur, à plus forte raison que dans le sous-paragraphe précédent, a le droit de déclarer: « Il y a quelque chose de pourri dans le royaume de la commande optimale!».

En effet:

Pour $\alpha > 0$ le problème (1) peut ne pas avoir de solution usuelle. Par exemple, dans le problème de la surface de révolution minimale ($\alpha=1$), si les conditions aux limites sont symétriques ($y(-x_0) = y(x_0)$), il faut chercher une extrémale symétrique, i.e. $y = \text{ch}\, Dx/D$. Toutes les extrémales de cette forme s'obtiennent de l'extrémale $y = \text{ch}\, x$ par homothétie et, ensemble, elles remplissent seulement un angle, sans remplir le demi-plan tout entier (fig. 30). Par conséquent, pour un x_0 suffisamment grand, le problème, mettons, avec les conditions $y(-x_0) = y(x_0) = 1$, n'a pas de solution.

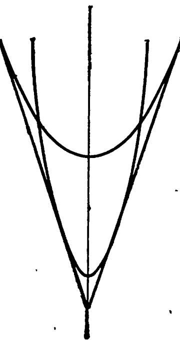


Fig. 30

Pour $\alpha < 0$ l'intégrante dans le problème (1) tend à l'infini pour $y \to 0$. Ainsi, par exemple, le problème du brachistochrone $\alpha = -1/2$, avec les conditions aux limites usuelles $y(x_0) = 0$, $y(x_1) > 0$ (voir 1.1.4), n'entre pas dans le cadre usuel.

Pour obtenir une solution complète des problèmes de la série (1), un travail supplémentaire est nécessaire.

CHAPITRE II

APPAREIL DE LA THÉORIE DES PROBLÈMES D'EXTRÉMUM

Le lecteur s'est familiarisé avec divers problèmes d'extrémum, avec les notions fondamentales et les idées générales qui s'y rapportent. Il a également pu acquérir une certaine idée des méthodes de résolution de ces problèmes. Nous passons maintenant à l'exposé systématique et suffisamment formel de la théorie mathématique appropriée.

La généralité de la théorie développée, ainsi que sa simplicité relative, s'avèrent possibles grâce à un libre emploi de faits et de notions propres à des branches annexes des mathématiques, en premier lieu à l'analyse fonctionnelle. Leur exposition est donnée ici sous une forme commode pour la suite. La plus grande partie du chapitre est constituée par ce que l'on pourrait appeler « éléments de calcul différentiel ».

§ 2.1. Notions préliminaires d'analyse fonctionnelle

Dans ce paragraphe, nous décrivons ceux des faits de l'analyse fonctionnelle qui seront nécessaires par la suite pour la construction de la théorie des problèmes d'extrémum. Les démonstrations, que l'on peut trouver dans le manuel de A. Kolmogorov et S. Fomine [KF], seront généralement omises.

2.1.1. Espaces vectoriels normés et espaces de Banach. Rappelons qu'un espace vectoriel X est dit *normé* si X est muni d'une fonctionnelle $\|\cdot\|$: $X \to \mathbf{R}$ appelée *norme* qui vérifie les trois axiomes suivants:

a)
$$\| x \| \geqslant 0, \quad \forall x \in X \text{ et } \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
b)
$$\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|, \quad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}; \tag{1}$$
c)
$$\| x_1 + x_2 \| \leqslant \| x_1 \| + \| x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Parfois, pour souligner le fait que la norme est donnée dans l'espace X, nous écrirons $\|\cdot\|_X$.

Chaque espace normé devient *métrique* si on y introduit la distance selon la formule

$$\rho(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \|.$$

Un espace vectoriel normé complet relativement à la distance ainsi introduite est appelé *espace de Banach.*

Exercices. Soit $X = \mathbf{R}^2$. Parmi les fonctions ci-dessous, quelles sont celles (et pour quelles valeurs des paramètres) qui donnent une norme dans X?

1. $N(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty$;
2. $N(x) = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|$;
3. $N(x) = \max\{|a_{11}x_1 + a_{12}x_2|, |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|\}$.
4. Décrire toutes les normes dans $\mathbf{R}^2$ (dans $\mathbf{R}^n$).
5. Démontrer que toutes les normes dans $\mathbf{R}^2$ (dans $\mathbf{R}^n$) sont équivalentes. (Les normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe des nombres $c > 0$ et $C > 0$, tels que $cN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant CN_1(x)$, $\forall x \in X$.)

L'ensemble X^* de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur X (*l'espace dual de* X) est un espace de Banach si l'on se donne une norme dans X^* en posant

$$\| x^* \|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \langle x^*, x \rangle,$$

où $\langle x^*, x \rangle$ désigne le résultat obtenu en appliquant la fonctionnelle x^* à x.

Pour plus de détails, voir [KF], chapitre IV, § 2.

Exercice 6. Trouver les normes dans les espaces duaux des espaces décrits dans les exercices 1 à 3.

Les espaces de Banach suivants joueront un rôle important par la suite.

Exemple 1. L'espace $C(K, \mathbf{R}^n)$ des fonctions vectorielles continues $x(\cdot): K \to \mathbf{R}^n$, données sur un compact K, avec la norme

$$\| x(\cdot) \|_0 = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

L'espace $C(K, \mathbf{R})$ sera désigné simplement par $C(K)$.

Exemple 2. L'espace $C^r([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ des fonctions vectorielles r fois continûment différentiables $x(\cdot): [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$, données sur un segment fini $[t_0, t_1] \subset \mathbf{R}$, avec la norme

$$\| x(\cdot) \|_r = \max(\| x(\cdot) \|_0, \ldots, \| x^{(r)}(\cdot) \|_0).$$

L'espace $C^r([t_0, t_1], \mathbf{R})$ sera désigné par $C^r([t_0, t_1])$;

$$C^0([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \overset{\text{def}}{=} C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n).$$

Exercices.

7. Démontrer que chaque espace normé de dimension finie est un espace de Banach.

8. Démontrer que la boule unité d'un espace normé de dimension finie est un ensemble convexe fermé borné possédant un centre de symétrie et tel que l'origine des coordonnées est son point intérieur; et que réciproquement, pour chaque espace convexe fermé borné possédant un centre de symétrie et tel que l'origine des coordonnées est un point intérieur, il existe une norme relativement à laquelle cet ensemble est la boule unité.

9. Donner un exemple d'un espace normé qui ne soit pas un espace de Banach.

2.1.2. Produits d'espaces. Espaces quotients. Soient X et Y des espaces vectoriels. Leur produit $X \times Y$, i.e. l'ensemble de toutes les paires (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, se transforme en espace vectoriel si l'on y définit les opérations d'addition et de multiplication par un nombre suivant les coordonnées:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Si X et Y sont des espaces normés, alors on peut introduire une norme dans le produit $X \times Y$, par exemple en posant:

$$\| (x, y) \|_{X\times Y} = \max \{\| x \|_X, \| y \|_Y\}. \tag{1}$$

Exercice. Vérifier que $\| x \|_X + \| y \|_Y$ et $\sqrt{\| x \|_X^2 + \| y \|_Y^2}$ sont également des normes dans $X\times Y$, équivalentes à la norme (1).

On a les lemmes évidents suivants.

Lemme 1. *Si X et Y sont des espaces de Banach, alors $X \times Y$ est un espace de Banach.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 2. *Chaque fonctionnelle linéaire $\Lambda \in (X \times Y)^*$ se met uniquement sous la forme*

$$\langle \Lambda (x, y)\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle, \tag{2}$$

où $x^* \in X^*$ et $y^* \in Y^*$.

Démonstration. Posons $\langle x^*, x\rangle = \langle \Lambda, (x, 0)\rangle$, $\langle y^*, y\rangle = \langle \Lambda, (0, y)\rangle$. La linéarité de ces fonctionnelles est évidente, tandis que le fait qu'elles sont continues ($\Leftrightarrow$ bornées) découle des estimations suivantes:

$$|\langle x^*, x\rangle | \leqslant \| \Lambda \| \| (x, 0) \| = \| \Lambda \| \| x \|,$$
$$|\langle y^*, y\rangle | \leqslant \| \Lambda \| \| (0, y) \| = \| \Lambda \| \| y \|.$$

L'unicité de la représentation (2) est également évidente. ■

Puisque pour tous les $x^* \in X^*$ et $y^* \in Y^*$ la formule (2) détermine une fonctionnelle $\Lambda \in (X \times Y)^*$, nous avons obtenu une description complète de l'espace $(X \times Y)^*$. Brièvement cette descrip-

tion est donnée par la formule suivante:

$$(X \times Y)^* = X^* \oplus Y^*.$$

Supposons maintenant que X est un espace vectoriel, L son sous-espace. Posons $x \sim x'$, si $x - x' \in L$. La relation ainsi introduite sera une relation d'équivalence (car il est évident que $x \sim x$, $x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$ et $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$) et donc ([KF], chapitre I, § 2) détermine une décomposition de X en classes d'équivalence. Une telle classe pour la relation introduite ci-dessus est appelée *classe d'équivalence* (ou *classe de contiguïté*) relativement au sous-espace L. Dans l'ensemble de toutes les classes d'équivalence, on introduit d'une manière naturelle les opérations d'addition et de multiplication par un nombre ([KF], chapitre III, § 1, p. 4); les axiomes d'un espace vectoriel sont alors vérifiés. Ainsi, l'ensemble de classes d'équivalence se transforme en espace vectoriel, appelé *espace quotient de X par L* et désigné par X/L.

La classe d'équivalence $\pi(x)$ à laquelle appartient l'élément $x \in X$ est la classe $x + L$. L'application $\pi: X \to X/L$ est linéaire et épimorphe [1] (démontrer!). On l'appelle *application canonique* de X sur X/L. Il est évident que $L = \operatorname{Ker} \pi$.

Soient maintenant X un espace normé et L son sous-espace. Posons

$$\| \xi \|_{X/L} = \inf_{x \in \xi} \| x \|_X \tag{3}$$

ou

$$\| \xi \|_{X/L} = \inf_{\pi x = \xi} \|x\|_X = \inf_{\substack{\pi x_0 = \xi \\ x' \in L}} \| x_0 + x' \|. \tag{3'}$$

Il découle immédiatement des définitions (3), (3′) que l'opérateur π est continu ($\| \pi x \| \leqslant \| x \|$) et que, pour chaque $\xi \in X/L$, il existe un point $x \in X$ tel que

$$\pi x = \xi, \quad \| x \| \leqslant 2 \| \xi \|_{X/L}. \tag{4}$$

Théorème sur l'espace quotient. *Soient X un espace normé et L son sous-espace fermé. Alors la fonction $\|\cdot\|_{X/L}$, définie par la relation* (3), *est une norme dans X/L. Si l'espace X est un espace de Banach, alors l'espace quotient X/L à norme $\|\cdot\|_{X/L}$ est également un espace de Banach.*

Démonstration. Il faut démontrer tout d'abord que la fonctionnelle $\|\cdot\|_{X/L}$ vérifie les axiomes d'une norme et ensuite que la complétude de X/L découle de celle de X. Démontrons la première assertion du théorème, i.e. vérifions les axiomes (1) de 2.1.1.

Axiome a): $\| \xi \|_{X/L} \geqslant 0$ $(\forall \xi)$ puisque la norme est non négative dans X. Si $\xi = 0$, alors en guise de $x \in \xi$ on peut prendre $x = 0$ et l'on aura $\| 0 \|_{X/L} = 0$. Soit $\| \xi \|_{X/L} = 0$. Il découle alors

[1]) I.e. applique X sur X/L tout entier.

de (3) qu'on peut trouver une suite $\{x_n\}$, $x_n \in \xi$ telle que $\| x_n \| \to 0$, i.e. $x_n \to 0$. Puisque ξ est fermé, on a $0 \in \xi$, et ξ est donc l'élément nul de X/L.

Axiome b): Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors, si $\pi x = \xi$, on a

$$\| \alpha\xi \|_{X/L} = \inf_{\pi y = \alpha\xi} \| y \| = \inf_{\pi x = \xi} \| \alpha x \| = |\alpha| \inf_{\pi x = \xi} \| x \| = |\alpha| \, \| \xi \|.$$

Axiome c):

$$\| \xi_1 + \xi_2 \| = \inf_{\substack{\pi x_i = \xi_i \\ x' \in L}} \| x_1 + x_2 + x' \| = \inf_{x_i' \in L} \| x_1 + x_1' + x_2 + x_2' \| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x_1' \in L} \| x_1 + x_1' \| + \inf_{x_2' \in L} \| x_2 + x_2' \| = \| \xi_1 \|_{X/L} + \| \xi_2 \|_{X/L}.$$

Démontrons la deuxième assertion du théorème, i.e. le fait que X/L est complet. Soit $\{\xi_n\}$ une suite fondamentale dans X/L:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon): \; n > N(\varepsilon) \Rightarrow \| \xi_{n+m} - \xi_n \|_{X/L} < \varepsilon, \quad \forall m \geqslant 1.$$

Choisissons $\varepsilon_k = 2^{-k}$ et des numéros n_k tels que $n_{k+1} > n_k$, $\| \xi_{n_k+m} - \xi_{n_k} \| \leqslant 2^{-k}$, $m > 0$, $k \geqslant 1$. Alors $\| \xi_{n_2} - \xi_{n_1} \| \leqslant 1/2$, et, d'après (4), il existe des représentants $x_i \in \xi_{n_i}$ tels que $\| x_2 - x_1 \| \leqslant 1$. D'une manière analogue, on peut construire des éléments $\{x_n\}_{n \geqslant 3}$ tels que $\| x_k - x_{k-1} \| \leqslant 2^{-(k-1)}$, $x_k \in \xi_{n_k}$, $k = 3, 4, \ldots$ La suite $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ est fondamentale dans X (vérifier!), tandis que X est complet par hypothèse. Par conséquent, la limite $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k$ existe. Considérons la classe $\xi_0 = \pi x_0$. On a

$$\| \xi_{n_k} - \xi_0 \|_{X/L} = \inf_{x' \in L} \| x_k - x_0 - x' \|_X \leqslant \| x_k - x_0 \|_X \underset{k \to \infty}{\to} 0 .$$

Ainsi $\xi_{n_k} \to \xi_0$, mais alors on a également $\xi_n \to \xi_0$ puisque $\{\xi_n\}$ est fondamentale. Par conséquent X/L est complet. ■

Exercices

1. Soit $X = C([0, 1])$, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m \leqslant 1$, et supposons que le sous-espace L est constitué par des fonctions $x(\cdot) \in C([0, 1])$ telles que $x(\tau_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Trouver l'espace quotient X/L et définir $\| \cdot \|_{X/L}$.

2. Généraliser les résultats de l'exercice 1 et démontrer que si F est un sous-ensemble fermé du segment $[0, 1]$ et

$$L_F = \{x(\cdot) \in C([0, 1]) \mid x(t) \equiv 0, \; t \in F\},$$

alors l'espace $C([0, 1])/L_F$ est isométriquement isomorphe à l'espace $C(F)$.

2.1.3. Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences. Dans la théorie des problèmes d'extrémum, un rôle important est joué par les théorèmes de séparabilité et certains autres faits provenant de l'analyse convexe. La majorité de ceux-ci sont des conséquences du théorème de Hahn-Banach, que l'on appelle souvent premier prin-

cipe fondamental de l'analyse linéaire. Vu que ce théorème se rencontre dans tous les cours usuels d'analyse fonctionnelle, nous nous limiterons ici à son énoncé et à ses conséquences les plus importantes.

Dans cette section X est un espace vectoriel ou un espace vectoriel topologique [1]), $\bar{\mathbf{R}}$ est la droite augmentée, i.e. $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 1. Une fonction $p: X \to \bar{\mathbf{R}}$ est dite *convexe et homogène* si l'on a

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \text{quels que soient } x, y \in X, \tag{1}$$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \text{quels que soient } x \in X \text{ et } \alpha > 0. \tag{2}$$

Exemples. 1) X est un espace normé, $p(x) = \|x\|$.

2) X est un espace vectoriel, L un sous-espace vectoriel de X, et

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ +\infty, & x \notin L. \end{cases}$$

3) X est un espace vectoriel, $l_1, \ldots, l_m$ est une famille de fonctionnelles linéaires sur X; $p(x) = \max(\langle l_1, x\rangle, \ldots, \langle l_m, x\rangle)$.

Un exemple important s'obtient de la

Définition 2. Soit A un sous-ensemble convexe de l'espace vectoriel X contenant 0. Sa *fonction de Minkowski* $\mu A(\cdot)$ se définit par l'égalité

$$\mu A(x) = \inf\{t > 0 \mid x/t \in A\} \tag{3}$$

(s'il n'y a pas de $t > 0$ tels que $x/t \in A$, alors $\mu A(x) = +\infty$).

Proposition 1. *La fonction de Minkowski est non négative, convexe et homogène*;

$$\{x \mid \mu A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \mid \mu A(x) \leqslant 1\}. \tag{4}$$

Si X est un espace vectoriel topologique, alors $\mu A(\cdot)$ est continue au point 0 si et seulement si $0 \in \operatorname{int} A$.

Démonstration. Si $\mu A(x)$ ou $\mu A(y)$ est égal à $+\infty$, alors (1) est vérifiée. Supposons donc que $\mu A(x) < +\infty$ et $\mu A(y) < +\infty$. Par définition, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe des t et s tels que

$$0 < t < \mu A(x) + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad x/t \in A,$$

$$0 < s < \mu A(y) + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad y/s \in A.$$

Mais alors

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{x}{t}\frac{t}{t+s} + \frac{y}{s}\frac{s}{t+s} \in$$

puisque A est convexe, on a donc

$$\mu A(x+y) \leqslant t + s < \mu A(x) + \mu A(y) + \varepsilon.$$

[1]) Au sujet des espaces vectoriels topologiques, voir [KF], chap. III, § 5.

Vu que ε était arbitraire, on a également (1). Ensuite, pour $\alpha > 0$, on a

$$\mu A\ (\alpha x) = \inf\{t > 0 \mid \alpha x/t \in A\} = \inf\{\alpha s > 0 \mid x/s \in A\} = \\ = \alpha \inf\{s > 0 \mid x/s \in A\} = \alpha\mu A\ (x),$$

de sorte que (2) est vérifié.

Le fait que $\mu A\ (x)$ est non négative et la deuxième inclusion dans (4) découlent directement de la définition. Si $\mu A\ (x) < 1$, alors il existe un $t \in (0, 1)$ pour lequel $x/t \in A$, et puisque $0 \in A$ et A est convexe, on a

$$x = 0\cdot(1-t) + \frac{x}{t}\cdot t \in A,$$

de sorte que la première inclusion dans (4) est vérifiée.

Soit maintenant X un espace vectoriel topologique. On a alors les équivalences successives suivantes: $\mu A\ (\cdot)$ est continue au point $0 \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists U_\varepsilon \ni 0, \quad \forall x \in U_\varepsilon, \quad \mu A\ (x) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \exists U_1 \ni 0, \quad \forall x \in U_1, \quad \mu A\ (x) < 1 \Leftrightarrow \\ \exists U_1 \ni 0, \quad U_1 \subset A \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{int} A$$

(ici U_ε et U_1 sont des voisinages du point 0; la deuxième équivalence est vérifiée à cause de l'homogénéité de $\mu A\ (\cdot)$ et puisque l'on peut poser $U_\varepsilon = \varepsilon U_1$). ■

P r o p o s i t i o n 2. *Pour que la fonctionnelle linéaire x^* sur l'espace vectoriel topologique X soit continue, il faut et il suffit que pour une certaine fonction convexe homogène $p\ (\cdot)$ continue au point 0 on ait, pour tous les $x \in X$, l'inégalité*

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant p\ (x). \tag{5}$$

D é m o n s t r a t i o n. On établit la nécessité immédiatement en posant $p\ (x) = |\langle x^*, x\rangle|$.

Supposons maintenant que (5) est vérifiée et $p\ (x)$ est continue au point 0. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U \ni 0$ tel que $p\ (x) < \varepsilon$ pour tous les $x \in U$. Puisque $0 \in U$ et $0 = (-0) \in \in (-U)$, il existe un voisinage W tel que $0 \in W \subset U \cap (-U)$. Si $x \in W$, alors x et $-x \in U$, de sorte que, d'après (5), on a

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant p\ (x) < \varepsilon, \\ \langle x^*, -x\rangle \leqslant p\ (-x) < \varepsilon.$$

Par conséquent, $|\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon$ pour tous les $x \in W$, i.e. x^* est continu en 0. Il reste à remarquer qu'une fonctionnelle linéaire continue en un point est continue sur X tout entier ([KF], p. 170).

T h é o r è m e d e H a h n - B a n a c h ([KF], p. 129-132).

Soit $p: X \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction homogène convexe sur l'espace vectoriel X et supposons que $l: L \to \mathbf{R}$ est une fonctionnelle linéaire sur le sous-

espace L de l'espace X telle que

$$\langle l, x\rangle \leqslant p(x) \quad \textit{pour tous les} \quad x \in L. \tag{6}$$

Alors il existe une fonctionnelle linéaire Λ, *définie sur X tout entier, qui est le prolongement de l, i.e.*

$$\langle \Lambda, x\rangle \equiv \langle l, x\rangle, \quad x \in L, \tag{7}$$

et qui vérifie l'inégalité

$$\langle \Lambda, x\rangle \leqslant p(x) \quad \textit{pour tous les} \quad x \in X. \tag{8}$$

Corollaire 1. *Soit X un espace normé et* $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. *Il existe alors un élément* $\Lambda \in X^*$ *tel que* $\|\Lambda\| = 1$ *et* $\langle \Lambda, x_0\rangle = \|x_0\|$.

Démonstration. Sur le sous-espace

$$L = \{x \mid x = \alpha x_0, \quad \alpha \in \mathbf{R}\}$$

donnons-nous une fonctionnelle linéaire l en posant

$$\langle l, \alpha x_0\rangle = \alpha \|x_0\| \tag{9}$$

La fonction $p(x) = \|x\|$ est convexe homogène et

$$\langle l, \alpha x_0\rangle = \alpha \|x_0\| \leqslant |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = p(\alpha x_0),$$

de sorte qu'on a l'inégalité (6). D'après le théorème de Hahn-Banach, l se prolonge à une fonctionnelle linéaire Λ sur X tout entier, et l'on a les relations (7) et (8). En se rappelant la définition de la norme d'une fonctionnelle (voir 2.1.1), on obtient de (8)

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|=1} \langle \Lambda, x\rangle \leqslant \sup_{\|x\|=1} p(x) = 1,$$

de sorte qu'en particulier $\Lambda \in X^*$.

D'autre part, il découle de (7) et (9) que

$$\langle \Lambda, x_0\rangle = \langle l, x_0\rangle = \|x_0\|,$$

et donc la deuxième assertion du corollaire considéré est vérifiée; en outre

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|=1} \langle \Lambda, x\rangle \geqslant \left\langle \Lambda, \frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle = 1,$$

d'où $\|\Lambda\| = 1$. ■

On déduit immédiatement du corollaire 1 le

Corollaire 2. *Si l'espace normé X est non trivial (i.e.* $X \neq \{0\}$), *alors l'espace dual* X^* *est également non trivial.*

2.1.4. Théorèmes de séparabilité. Dans cette section X est un espace vectoriel topologique; X^* est l'espace dual, consistant de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur X.

Définition 1. Nous disons que la fonctionnelle $x^* \in X^*$ *sépare les ensembles* $A \subset X$ *et* $B \subset X$, si

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle \leqslant \inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle, \tag{1}$$

et sépare strictement A et B, si

$$\sup_{x\in A}\langle x^*,\ x\rangle < \inf_{x\in B}\langle x^*,\ x\rangle. \tag{2}$$

Du point de vue géométrique, l'inégalité (1) signifie que l'hyperplan

$$H\ (x^*,\ c) = \{x \mid \langle x^*,\ x\rangle = c\},$$

où $\sup\limits_{x\in A}\ \langle x^*,\ x\rangle \leqslant c \leqslant \inf\limits_{x\in B}\ \langle x^*,\ x\rangle$, sépare les ensembles A et B l'un de l'autre dans ce sens que A est situé dans un demi-espace $(H_+\ (x^*,\ c) = \{x \mid \langle x^*,\ x\rangle \leqslant c\})$ déterminé par $H\ (x^*,\ c)$ et B dans l'autre $(H_-(x^*,\ c) = \{x \mid \langle x^*,\ x\rangle \geqslant c\})$ (fig. 31); l'inégalité (2)

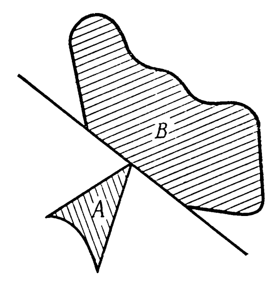


Fig. 31

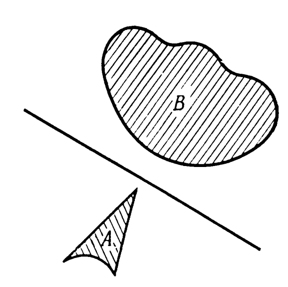


Fig. 32

signifie que, dans ce cas, on peut choisir c de manière que A et B soient situés dans les demi-espaces correspondants et ne possèdent pas de points communs avec $H\ (x^*,\ c)$ (fig. 32).

Premier théorème de séparabilité. *Si les ensembles $A \subset X$ et $B \subset X$ sont convexes, non vides et disjoints, A étant ouvert, il existe alors une fonctionnelle linéaire continue non nulle qui sépare A et B.*

Démonstration. A) Puisque A et B ne sont pas vides, il existe des points $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. L'ensemble

$$C = (A - a_0) - (B - b_0) = \{x \mid x = a - a_0 - b + b_0,\ a \in A,\ b \in B\},$$

est évidemment convexe (voir également la proposition 1 et l'exercice 2 de 2.6.1), contient 0 et est ouvert (en effet, si $\hat{x} = \hat{a} - a_0 - \hat{b} + b_0$ et $\hat{a} \in A$, alors il existe un voisinage U, $\hat{a} \in U \subset A$, on a donc $\hat{x} \in U - a_0 - \hat{b} + b_0 \subset C$. En outre $c = b_0 - a_0 \notin C$, puisque dans le cas contraire $b_0 - a_0 = \hat{a} - a_0 - \hat{b} + b_0$ pour certains $\hat{a} \in A$ et $\hat{b} \in B$, d'où l'on tire $\hat{a} = \hat{b} \in A \cap B$, i.e. ces ensembles se rencontrent, contrairement à l'hypothèse.

B) Désignons par $p(x)$ la fonction de Minkowski de l'ensemble C. D'après la proposition 1 (2.1.3), $p(x)$ est une fonction non négative convexe homogène et continue au point 0. En outre $p(x) \leqslant 1$ pour tous les $x \in C$.

C) Sur le sous-espace

$$L = \{x \mid x = \alpha c = \alpha (b_0 - a_0), \quad \alpha \in \mathbf{R}\}$$

définissons la fonctionnelle linéaire l en posant $\langle l, \alpha c\rangle = \alpha p(c)$. Alors pour $\alpha > 0$ nous avons

$$\langle l, \alpha c\rangle = \alpha p(c) = p(\alpha c),$$

et pour $\alpha \leqslant 0$,

$$\langle l, \alpha c\rangle = \alpha p(c) \leqslant 0 \leqslant p(\alpha c),$$

puisque $p(\cdot)$ est non négative. Par conséquent, pour tous les $x \in L$, on a l'inégalité $\langle l, x\rangle \leqslant p(x)$ et, d'après le théorème de Hahn-Banach, l peut être prolongée à une fonctionnelle linéaire Λ telle que

$$\langle \Lambda, \alpha c\rangle = \langle l, \alpha c\rangle = \alpha p(c), \quad \alpha \in \mathbf{R} \tag{3}$$

et

$$\langle \Lambda, x\rangle \leqslant p(x), \quad x \in X. \tag{4}$$

Puisque $p(\cdot)$ est continue au point 0, il découle de (4) que la fonctionnelle Λ est continue (proposition 2, 2.1.3).

D) Quels que soient $a \in A$ et $b \in B$, on a

$$\langle \Lambda, a - b\rangle = \langle \Lambda, a - a_0 - b + b_0\rangle + \langle \Lambda, a_0 - b_0\rangle \leqslant$$
$$\leqslant p(a - a_0 - b + b_0) + \langle l, (-1)(b_0 - a_0)\rangle \leqslant 1 - p(b_0 - a_0),$$

puisque $a - a_0 - b + b_0 \in C$, tandis que sur C $p(x) \leqslant 1$; en outre, on s'est servi de (4). Mais, pour $0 < t \leqslant 1$, le point $(b_0 - a_0)/t = c/t$ ne peut appartenir à l'ensemble C, car C est convexe et contient 0, tandis que le point $c = b_0 - a_0 \notin C$ est situé sur $[0, c/t]$. Par conséquent

$$p(b_0 - a_0) = \inf \left\{t > 0 \,\middle|\, \frac{b_0 - a_0}{t} \in C\right\} \geqslant 1. \tag{5}$$

On a donc $\langle \Lambda, a - b\rangle \leqslant 1 - p(b_0 - a_0) \leqslant 0$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$. Dans l'inégalité $\langle \Lambda, a\rangle \leqslant \langle \Lambda, b\rangle$, on peut choisir $a \in A$ et $b \in B$ indépendamment, donc

$$\sup_{a \in A} \langle \Lambda, a\rangle \leqslant \inf_{b \in B} (\Lambda, b).$$

En outre, d'après (3) et (5), on a $\langle \Lambda, b_0 - a_0\rangle = p(b_0 - a_0) \geqslant 1$, de sorte que $\Lambda \neq 0$. Par conséquent, Λ sépare A et B. ■

R e m a r q u e. Dans 1.3.3, nous avons déjà démontré le théorème de séparabilité dans le cas d'un espace X de dimension finie. Si l'on compare ses hypothèses avec les hypothèses du théorème que nous venons de démontrer, nous voyons que dans le cas de dimension finie on peut omettre la condition selon laquelle A est ouvert (le fait

qu'un des ensembles y consistait d'un seul point est sans importance). Les hypothèses du premier théorème de séparabilité peuvent être affaiblies: on peut demander seulement que int $A \neq \varnothing$ et (int A) $\cap$ $\cap B = \varnothing$. Néanmoins, on ne peut pas se passer complètement de l'existence de points intérieurs, pour au moins un des deux ensembles.

Exercices

1. Soit A un ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique X et int $A \neq \varnothing$, $x^* \in X^*$. Démontrer que

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle = \sup_{x \in \operatorname{int} A} \langle x^*, x\rangle. \tag{6}$$

2. Déduire de (6) le théorème de séparabilité dans le cas où A et B sont convexes et tels que int $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $B \cap \operatorname{int} A = \varnothing$.

3. Démontrer que, dans l'espace $X = l_2$, l'ellipsoïde compact

$$A = \left\{x = [x_k] \in l_2 \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \leqslant 1\right\}$$

et la demi-droite

$$B = \{x = [x_k] \mid x_k = t/k, \quad t > 0\}$$

ne peuvent être séparés par aucune fonctionnelle linéaire continue.

Deuxième théorème de séparabilité. *Soient X un espace vectoriel topologique localement convexe* ([KF], p. 164), *A un sous-ensemble de X fermé convexe non vide et $\hat{x} \in X$ un point qui n'appartient pas à A. Il existe alors une fonctionnelle linéaire continue non nulle qui sépare strictement A et $\hat{x}$.*

Démonstration. Puisque $\hat{x} \notin A$ et A est fermé, il existe un voisinage $V \ni \hat{x}$ tel que $A \cap V = \varnothing$. Puisque X est localement convexe, il existe un voisinage convexe $B \subset V$ du point $\hat{x}$. Il est clair que $B \cap A = \varnothing$ et, d'après le premier théorème de séparabilité, il existe une fonctionnelle non nulle x^* qui sépare A et B

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle \leqslant \inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle.$$

Il reste à remarquer que

$$\inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \hat{x}\rangle,$$

car la borne inférieure d'une fonctionnelle linéaire non nulle x^* ne peut être atteinte en un point intérieur $\hat{x}$ de l'ensemble B. ■

Définition 2. On appelle *annulateur* $A^{\perp}$ du sous-ensemble A d'un espace vectoriel X l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires l sur X telles que $\langle l, x\rangle = 0$ quel que soit $x \in A$.

Remarquons que $A^{\perp}$ est toujours fermé et contient $0 \in X^*$.

L e m m e s u r l a n o n - t r i v i a l i t é d e l' a n n u l a t e u r. *Soit L un sous-espace fermé d'un espace vectoriel topologique X localement convexe, et $L \neq X$. Alors l'annulateur $L^{\perp}$ contient un élément non nul $x^* \in X^*$.*

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons un point quelconque $\hat{x} \notin L$. D'après le deuxième théorème de séparabilité, il existe une fonctionnelle non nulle $x^* \in X^*$ qui sépare strictement $\hat{x}$ et L (L est un sous-espace d'un espace vectoriel, par conséquent, L est convexe):

$$\sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle. \tag{7}$$

S'il existait un $x_0 \in L$ pour lequel $\langle x^*, x_0 \rangle \neq 0$, alors, puisque $\alpha x_0 \in L$ pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$, on aurait

$$\sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle \geqslant \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \langle x^*, \alpha x_0 \rangle = +\infty,$$

contrairement à (7). Par conséquent $\langle x^*, x \rangle \equiv 0$ sur L, et donc $x^* \in L^{\perp}$. ■

2.1.5. Théorème de Banach sur l'opérateur inverse et lemme sur l'application inverse à droite. Le deuxième principe fondamental de l'analyse linéaire est le théorème suivant:

T h é o r è m e d e B a n a c h s u r l' o p é r a t e u r i n v e r s e. *Soient X et Y des espaces de Banach, $\Lambda: X \to Y$ un opérateur linéaire continu. Si Λ est un monomorphisme, i.e.*

$$\operatorname{Ker} \Lambda = \{x \mid \Lambda x = 0\} = \{0\},$$

et un épimorphisme, i.e.

$$\operatorname{Im} \Lambda = \{y \mid y = \Lambda x, \quad x \in X\} = Y,$$

alors Λ est un isomorphisme entre X et Y, i.e. il existe un opérateur linéaire continu $M = \Lambda^{-1}: Y \to X$ tel que

$$M\Lambda = I_X, \quad \Lambda M = I_Y.$$

D é m o n s t r a t i o n ([KF], p. 219). Nous nous servirons souvent dans notre cours du corollaire suivant du théorème de Banach:

L e m m e s u r l' a p p l i c a t i o n i n v e r s e à d r o i t e. *Soient X et Y des espaces de Banach, Λ un opérateur linéaire continu de X dans Y qui est un épimorphisme. Il existe alors une application $M: Y \to X$ (en général discontinue et non linéaire) qui vérifie les conditions*

$\Lambda \circ M = I_Y$,

$\| M(y) \| \leqslant C \| y \|$ *pour un certain* $C > 0$.

Remarquons qu'en vertu de la deuxième condition M est une application continue *à l'origine.*

D é m o n s t r a t i o n. L'opérateur Λ est continu, par conséquent son noyau Ker Λ, qui est l'image inverse du point zéro, sera un sous-espace fermé. D'après le théorème sur l'espace quotient (voir 2.1.2) l'espace $X/\text{Ker}\,\Lambda$ est un espace de Banach. Définissons l'opérateur $\widetilde{\Lambda}: X/\text{Ker}\,\Lambda \to Y$ en posant $\widetilde{\Lambda}\xi = \Lambda x$ sur la classe d'équivalence $\xi = \pi x$. Cette définition est correcte

$$x_1,\ x_2 \in \xi \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker}\,\Lambda \Rightarrow \Lambda x_1 = \Lambda x_2.$$

L'opérateur $\widetilde{\Lambda}$ est linéaire. Si $\pi x_i = \xi_i$, $i = 1, 2$, alors

$$\widetilde{\Lambda}(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2) = \Lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \\ = \alpha_1\Lambda x_1 + \alpha_2\Lambda x_2 = \alpha_1\widetilde{\Lambda}\xi_1 + \alpha_2\widetilde{\Lambda}\xi_2.$$

L'opérateur $\widetilde{\Lambda}$ est continu : pour chaque $x \in \xi$ on a

$$\|\widetilde{\Lambda}\xi\| = \|\Lambda x\| \leqslant \|\Lambda\|\,\|x\|,$$

d'où l'on tire

$$\|\widetilde{\Lambda}\xi\| \leqslant \|\Lambda\| \inf_{x\in\xi} \|x\| = \|\Lambda\|\,\|\xi\|_{X/\text{Ker}\,\Lambda}.$$

Enfin, l'opérateur $\widetilde{\Lambda}$ est bijectif. En effet, $\widetilde{\Lambda}$ est un épimorphisme de même que $\Lambda: \forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ \Lambda x = y \Rightarrow$ pour $\xi = \pi(x)$, $\widetilde{\Lambda}\xi = y$. D'autre part,

$$\text{Ker}\,\widetilde{\Lambda} = 0:\ \widetilde{\Lambda}\xi = 0,\ \pi x = \xi \Rightarrow \Lambda x = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}\,\Lambda \Rightarrow \xi = 0.$$

Ainsi nous avons démontré que l'opérateur $\widetilde{\Lambda}$ est un opérateur bijectif linéaire continu de $X/\text{Ker}\,\Lambda$ dans Y. D'après le théorème de Banach sur l'opérateur inverse, il existe un opérateur continu inverse à $\widetilde{\Lambda}$: $\widetilde{M} = \widetilde{\Lambda}^{-1}$, $\widetilde{M}: Y \to X/\text{Ker}\,\Lambda$.

Pour l'élément $\xi = \widetilde{M}y$ trouvons, suivant (4) de 2.1.2, un élément $x = x(\xi)$ tel que $x \in \xi$ et $\|x\| \leqslant 2\,\|\xi\|_{X/\text{Ker}\,\Lambda}$. Posons $M(y) = x(\xi)$. On obtient finalement

$$(\Lambda \circ M)(y) = \Lambda x(\xi) = \widetilde{\Lambda}\xi = \widetilde{\Lambda}\widetilde{M}y = y,$$

$$\|M(y)\| = \|x(\xi)\| \leqslant 2\,\|\xi\|_{X/\text{Ker}\,\Lambda} = 2\,\|\widetilde{M}y\|_{X/\text{Ker}\,\Lambda} \leqslant 2\,\|\widetilde{M}\|\,\|y\|.\ \blacksquare$$

2.1.6. Lemme sur l'image fermée. Soient X, Y et Z des espaces de Banach, $A: X \to Y$ et $B: X \to Z$ des opérateurs linéaires continus. L'égalité

$$Cx = (Ax,\ Bx)$$

définit un opérateur linéaire continu $C: X \to Y \times Z$.

E x e r c i c e. Démontrer que si la norme dans $Y \times Z$ est définie par la relation (1) (voir 2.1.2), alors $\| C \| = \max \{\| A \|, \| B \|\}$.

L e m m e s u r l' i m a g e f e r m é e. *Si le sous-espace* $\operatorname{Im} A$ *est fermé dans* Y *et le sous-espace* $B \operatorname{Ker} A$ [1]) *est fermé dans* Z, *alors le sous-espace* $\operatorname{Im} C$ *est fermé dans* $Y \times Z$.

D é m o n s t r a t i o n. Le sous-espace fermé $\widetilde{Y} = \operatorname{Im} A$ d'un espace de Banach Y est lui-même un espace de Banach et $A : X \to \widetilde{Y}$ est un épimorphisme. D'après le lemme de 2.1.5, il existe une application inverse à droite à A, que nous noterons $M : \widetilde{Y} \to X$. Supposons que (y, z) appartient à l'adhérence de l'image de l'opérateur C. Cela signifie qu'il existe une suite $\{x_n \mid n \geqslant 1\}$ telle que $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, $z = \lim_{n\to\infty} Bx_n$. Posons

$$\xi_n = M(Ax_n - y)$$

($y \in \widetilde{Y}$ étant la limite d'éléments Ax_n appartenant à $\widetilde{Y}$). Compte tenu des propriétés de M, nous obtenons

$$A(x_n - \xi_n) = Ax_n - (A \circ M)(Ax_n - y) = y,$$
$$\| \xi_n \| = \| M(Ax_n - y) \| \leqslant C_M \| Ax_n - y \| \to 0.$$

Par conséquent, $B\xi_n \to 0$ et $\lim_{n\to\infty} B(x_n - \xi_n) = \lim_{n\to\infty} Bx_n = z$, i.e. z appartient à l'adhérence de l'ensemble

$$\Sigma = \{\zeta = Bx \mid Ax = y\}.$$

Cet ensemble s'obtient par translation du sous-espace $B \operatorname{Ker} A$:

$$\zeta_1, \ \zeta_2 \in \Sigma \Rightarrow \zeta_i = Bx_i, \quad Ax_i = y, \quad i = 1, \ 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \zeta_2 - \zeta_1 = B(x_2 - x_1), \quad A(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \zeta_2 =$$
$$= \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1), \quad \zeta_1 \in \Sigma, \quad \zeta_2 - \zeta_1 \in B \operatorname{Ker} A.$$

Mais $B \operatorname{Ker} A$ est fermé par hypothèse, donc l'ensemble Σ est également fermé. Par conséquent z, appartenant à l'adhérence de Σ, appartient à Σ lui-même, il existe donc un élément $\hat{x}$ pour lequel $A\hat{x} = y$, $B\hat{x} = z$. Ainsi $(y, z) \in \operatorname{Im} C$. ■

2.1.7. Lemme sur l'annulateur du noyau d'un opérateur régulier. *Soient* X, Y *des espaces de Banach*, $A : X \to Y$ *un épimorphisme linéaire continu. Alors* $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$.

D é m o n s t r a t i o n. A) Supposons que $x^* \in \operatorname{Im} A^* \Leftrightarrow x^* = A^*y^*$. Alors, si $x \in \operatorname{Ker} A$, on a

$$\langle x^*, x\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = 0,$$

i.e. $\operatorname{Im} A^* \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

[1]) I.e. l'image du noyau de l'opérateur A par l'application B.

B) Supposons que $x^* \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$, i.e. $Ax = 0 \Rightarrow \langle x^*, x\rangle = 0$. Envisageons l'application $C: X \to \mathbf{R} \times Y$, $Cx = (\langle x^*, x\rangle, Ax)$. L'image du noyau de A par l'application x^* est zéro, i.e. un sous-ensemble fermé, et, d'après le lemme sur l'image fermée (2.1.6), $\operatorname{Im} C$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{R} \times Y$. Il ne coïncide pas avec $\mathbf{R} \times Y$ puisque, par exemple, $(1, 0) \notin \operatorname{Im} C$ (en effet, si $(\alpha, 0) = (\langle x^*, x\rangle, Ax)$, on a $Ax = 0 \Rightarrow \alpha = (x^*, x) = 0$).

D'après le lemme sur la non-trivialité de l'annulateur d'un sous-espace fermé propre (2.1.4), il existe une fonctionnelle linéaire continue non nulle $\Lambda \in (\operatorname{Im} C)^\perp \subset (\mathbf{R} \times Y)^*$ et, en vertu du lemme sur la forme générale de la fonctionnelle linéaire sur un produit d'espaces (2.1.2), nous pouvons trouver un nombre $\hat{\lambda}_0 \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ et un élément $\hat{y}^* \in Y^*$ tels que

$$\langle \hat{\lambda}_0 x^* + A^* \hat{y}^*, x\rangle = \hat{\lambda}_0 \langle x^*, x\rangle + \langle \hat{y}^*, Ax\rangle = \langle \Lambda, Cx\rangle \equiv 0, \quad \forall x.$$

Le cas $\hat{\lambda}_0 = 0$ est impossible, car $\operatorname{Im} A = Y$ et donc

$$\langle \hat{y}^*, Ax\rangle \equiv 0 \Rightarrow \hat{y}^* = 0 \Rightarrow \Lambda = 0.$$

Par conséquent $x^* = A^* (-\hat{y}^*/\hat{\lambda}_0)$, i.e. $x^* \in \operatorname{Im} A^*$ et $(\operatorname{Ker} A)^\perp \subset \operatorname{Im} A^*$. ■

2.1.8. Fonctions absolument continues. Dans la théorie de la commande optimale, on rencontre constamment des équations différentielles de la forme

$$\dot{x} = \varphi (t, x, u (t)), \tag{1}$$

où $u(\cdot)$ est une fonction donnée, appelée *commande*. Dans cette situation, quoique la fonction $\varphi (t, x, u)$ est suffisamment bonne (continue ou même différentiable), la commande $u(\cdot)$ ne l'est en général pas. Elle peut être continue par morceaux, et il est même commode de supposer parfois que $u(\cdot)$ est seulement une fonction mesurable. Par conséquent, le deuxième membre de l'équation (1) peut être discontinu, et donc il faut préciser ce que l'on entend par sa solution.

R e m a r q u e. Dans la présente section, la mesurabilité, l'intégrabilité, l'expression « presque partout », etc., sont entendues au sens usuel de Lebesgue ([KF], chapitre V, §§ 4, 5). Cette même règle restera en vigueur dans les autres parties du livre à de rares exceptions près, qui seront spécialement mentionnées: par exemple, dans les formules du sous-paragraphe suivant, l'intégrale est entendue au sens de Stieltjes ou de Lebesgue-Stieltjes ([KF], chapitre VI, § 6). Lorsqu'il s'agira de fonctions à valeurs vectorielles ou matricielles, chacune des composantes de la fonction devra posséder la propriété correspondante. Par exemple, la fonction $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots$

$\ldots, x_n(\cdot)) : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ est mesurable et intégrable si chacune des fonctions numériques $x_i(\cdot) : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ possède la même propriété et, par définition,

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,dt = \left(\int_\alpha^\beta x_1(t)\,dt, \ldots, \int_\alpha^\beta x_n(t)\,dt\right). \tag{2}$$

Il est naturel de supposer (ce que nous ferons toujours) que l'équation différentielle (1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est équivalente à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(s, x(s), u(s))\,ds. \tag{3}$$

Pour que ceci soit valable, $x(\cdot)$ doit être l'intégrale indéfinie de sa dérivée, i.e. il est nécessaire que la formule de Newton-Leibniz

$$x(t) - x(\tau) = \int_\tau^t \dot{x}(s)\,ds \tag{4}$$

soit vérifiée. Les fonctions $x(\cdot)$ pour lesquelles on a (4) sont appelées fonctions absolument continues dans la théorie de l'intégration selon Lebesgue ([KF], chapitre VI, § 4). Il est important de savoir que les fonctions de cette classe possèdent une autre définition équivalente que l'on peut vérifier effectivement.

D é f i n i t i o n. Soit X un espace vectoriel normé, $\Delta = [\alpha, \beta]$ un intervalle fermé de la droite numérique. La fonction $x(\cdot): \Delta \to X$ est dite *absolument continue*, si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout système fini d'intervalles ouverts disjoints deux à deux $(\alpha_k, \beta_k) \subset [\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, \ldots, N$, dont la somme des longueurs vérifie la relation

$$\sum_{k=1}^N (\beta_k - \alpha_k) < \delta, \tag{5}$$

on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^N \| x(\beta_k) - x(\alpha_k) \| < \varepsilon. \tag{6}$$

E x e m p l e. Une fonction $x(\cdot): \Delta \to X$ qui vérifie la condition de Lipschitz

$$\| x(t_1) - x(t_2) \| \leqslant K \, | t_1 - t_2 |, \quad t_1, t_2 \in \Delta,$$

est absolument continue. En effet, ici il faut prendre $\delta = \varepsilon/K$. On voit directement à partir de la définition, qu'une fonction absolument continue est uniformément continue sur Δ (prendre $N = 1$).

P r o p o s i t i o n 1. *Soient X et Y des espaces vectoriels normés et Δ un intervalle fermé de la droite numérique.*

Si les fonctions $x_i(\cdot)\colon \Delta \to X$, $i = 1, 2$, sont absolument continues et $c_i \in \mathbf{R}$, alors la fonction $c_1x_1(\cdot) + c_2x_2(\cdot)$ est absolument continue.

Si les fonctions $x(\cdot)\colon \Delta \to X$ et $A(\cdot)\colon \Delta \to \mathcal{L}(X, Y)$ sont absolument continues, alors la fonction $A(\cdot)x(\cdot)\colon \Delta \to Y$ l'est également.

Si la fonction $\Phi(\cdot)\colon G \to Y$ vérifie la condition de Lipschitz sur l'ensemble $\mathcal{K} \subset G$, tandis que la fonction $x(\cdot)\colon \Delta \to G$ est absolument continue et $\operatorname{im} x(\cdot) = \{y \mid y = x(t),\ t \in \Delta\} \subset \mathcal{K}$, alors la fonction $\Phi(x(\cdot))\colon \Delta \to Y$ est absolument continue.

D é m o n s t r a t i o n. La première assertion découle directement de la définition (voir également [KF], p. 337). Pour la démonstration de la seconde assertion, remarquons que $x(\cdot)$ et $A(\cdot)$, étant continues, sont bornées, de sorte que

$$\| x(t) \| \leqslant M_x, \quad \| A(t) \| \leqslant M_A, \quad t \in \Delta.$$

Maintenant, pour tout système d'intervalles ouverts disjoints $(\alpha_k, \beta_k) \subset \Delta$, $k = 1, 2, \ldots, N$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k)x(\beta_k) - A(\alpha_k)x(\alpha_k) \| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k)x(\beta_k) - A(\beta_k)x(\alpha_k) \| + \sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k)x(\alpha_k) - A(\alpha_k)x(\alpha_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k) \| \, \| x(\beta_k) - x(\alpha_k) \| + \sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k) - A(\alpha_k) \| \, \| x(\alpha_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant M_A \sum_{k=1}^{N} \| x(\beta_k) - x(\alpha_k) \| + M_x \sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k) - A(\alpha_k) \|.$$

Choisissons $\delta > 0$ de façon que (5) implique les inégalités

$$\sum_{k=1}^{N} \| x(\beta_k) - x(\alpha_k) \| < \frac{\varepsilon}{2M_A}, \qquad \sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k) - A(\alpha_k) \| < \frac{\varepsilon}{2M_x}.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{N} \| A(\beta_k)x(\beta_k) - A(\alpha_k)x(\alpha_k) \| < \frac{\varepsilon}{2M_A} M_A + \frac{\varepsilon}{2M_x} M_x = \varepsilon,$$

et donc $A(\cdot)x(\cdot)$ est absolument continue.

D'une manière analogue, si

$$\| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \| \leqslant K \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{K},$$

on a

$$\sum_{k=1}^{N} \| \Phi(x(\beta_k)) - \Phi(x(\alpha_k)) \| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \| x(\beta_k) - x(\alpha_k) \| < \varepsilon,$$

si $\delta > 0$ est choisi de manière que (5) implique (6) où l'on a remplacé ε par ε/K. ■

Le théorème principal de ce sous-paragraphe ne sera énoncé que pour un espace X de dimension finie, pour ne pas définir l'opération d'intégration dans un espace normé arbitraire (pour $X = \mathbf{R}^n$ il suffit de sous-entendre (2)). C'est le seul cas qui nous sera nécessaire par la suite.

Théorème de Lebesgue ([KF], p. 340). *Si la fonction* $x(\cdot): \Delta \to \mathbf{R}^n$ *est absolument continue, alors elle est différentiable presque partout, sa dérivée* $\dot{x}(\cdot)$ *est intégrable sur* Δ *et pour tous les* t, $\tau \in \Delta$ *on a la relation* (4).

Si la fonction $\xi(\cdot): \Delta \to \mathbf{R}^n$ *est intégrable sur* Δ *et* $\tau \in \Delta$, *alors la fonction* $x(t) = \int_\tau^t \xi(s)\,ds$ *est absolument continue et* $\dot{x}(t) = \xi(t)$ *presque partout.*

En vertu de ce théorème, nous appellerons par la suite une fonction $x(\cdot)$ solution de l'équation différentielle (1) si elle est absolument continue et vérifie (1) presque partout. En effet, d'après le théorème de Lebesgue, ceci est suffisant pour que (1) entraîne (3). Réciproquement, si $x(\cdot)$ vérifie (3) (i.e. en particulier $t \to \varphi(t, (x(t), u(t))$ est une fonction intégrable), alors, d'après le théorème de Lebesgue, $x(\cdot)$ est absolument continue et on a (1) presque partout.

Pour conclure ce sous-paragraphe, notons une autre assertion dont l'analogue « numérique » est bien connu dans la théorie de l'intégration selon Lebesgue et dont la démonstration sera laissée au lecteur en guise d'exercice.

Proposition 2. *Une fonction mesurable* $x(\cdot): \Delta \to \mathbf{R}^n$ *est intégrable si et seulement si* $|x(\cdot)|$ *est intégrable. Dans ce cas, on a*

$$\left|\int_\Delta x(t)\,dt\right| \leqslant \int_\Delta |x(t)|\,dt. \tag{7}$$

2.1.9. Théorème de Riesz sur la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace C. Formule de Dirichlet. Les définitions d'une fonction de variation bornée et de l'intégrale de Stieltjes seront supposées connues ([KF], chapitre VI, §§ 2, 6). Une fonction de variation bornée $v(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ sera dite *canonique* si elle est continue à droite en tous les points de l'intervalle ouvert (α, β) et $v(\alpha) = 0$.

Théorème de Riesz ([KF], p. 365). *A chaque fonctionnelle linéaire continue* $x^* \in C([\alpha, \beta])^*$ *correspond une fonction canonique de variation bornée* $v(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ *telle que pour toutes les* $x(\cdot) \in C([\alpha, \beta])$ *on a*

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int_\alpha^\beta x(t)\,dv(t), \tag{1}$$

et cette représentation est unique: si, pour toutes les $x(\cdot) \in C([\alpha, \beta])$ *et pour une* $v(\cdot)$ *canonique, on a*

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,dv(t) = 0,$$

alors $v(t) \equiv 0$.

Ce théorème se généralise facilement au cas vectoriel. Soient $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ... les vecteurs unités de la base standard de $\mathbf{R}^n$. Un élément quelconque $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)) \in C([\alpha, \beta], \mathbf{R}^n)$ se met sous la forme

$$x(\cdot) = \sum_{k=1}^n x_k(\cdot)\, e_k.$$

Si maintenant $x^* \in C([\alpha, \beta], \mathbf{R}^n)^*$, on a

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x^*, x_k(\cdot)\, e_k\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k^*, x_k(\cdot)\rangle,$$

où les fonctionnelles $x_k^* \in C([\alpha, \beta])^*$ sont définies par les égalités $\langle x_k^*, \xi(\cdot)\rangle = \langle x^*, \xi(\cdot)\, e_k\rangle$. En appliquant le théorème de Riesz à x_k^*, on obtient la représentation suivante

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \sum_{k=1}^n \int_\alpha^\beta x_k(t)\, dv_k(t). \tag{2}$$

Une famille de fonctions de variation bornée $v(\cdot) = (v_1(\cdot), \ldots, v_n(\cdot))$ est appelée fonction à valeurs vectorielles de variation bornée (les valeurs sont des vecteurs lignes) $v(\cdot) : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^{n*}$. Alors la formule (2) peut être récrite sous la forme

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int_\alpha^\beta dv(t)\, x(t), \tag{3}$$

qui coïncide avec (1) à l'ordre des facteurs près. De même que dans le théorème de Riesz, la correspondance entre x^* et $v(\cdot)$ est bijective pourvu que la fonction $v(\cdot)$ soit « canonique ».

Chaque fonction de variation bornée $v(\cdot) : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ définit une mesure généralisée (où une « charge » [KF], chapitre VI, § 5). L'intégrale de Stieltjes (1) est justement l'intégrale relativement à cette mesure. D'une manière analogue, une fonction à valeurs vectorielles de variation bornée $v(\cdot) : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^{n*}$ définit sur $[\alpha, \beta]$ une mesure à valeurs vectorielles relativement à laquelle l'intégrale est (3). La mesure qui correspond à la fonction de variation bornée $v(t)$ est généralement désignée par $dv(t)$.

Si $v_1(\cdot)$ et $v_2(\cdot)$ sont deux fonctions de variation bornée sur l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, alors on peut définir sur le carré $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ le produit de mesures $dv_1(\cdot) \times dv_2(\cdot)$, le théorème de Fubini ([KF], p. 310) étant valable. En particulier, on a la formule bien connue pour la permutation des limites d'intégration (« formule de Dirichlet »):

$$\int_\alpha^\beta \left\{\int_\alpha^t f(t, s)\, dv_1(s)\right\} dv_2(t) = \int_\alpha^\beta \left\{\int_s^\beta f(t, s)\, dv_2(t)\right\} dv_1(s). \qquad (4)$$

Lorsqu'on généralise la formule (4) aux fonctions à valeurs vectorielles (cette généralisation nous sera nécessaire par la suite), il faut faire attention à l'ordre des facteurs. Par exemple, si

$$f(\cdot, \cdot): [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),$$
$$v_1(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n, \quad v_2(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^{n*},$$

il faut récrire la formule (4) de la manière suivante

$$\int_\alpha^\beta dv_2(t) \left\{\int_\alpha^t f(t, s)\, dv_1(s)\right\} = \int_\alpha^\beta \left\{\int_s^\beta dv_2(t) f(t, s)\right\} dv_1(s). \qquad (5)$$

§ 2.2. Eléments du calcul différentiel dans un espace vectoriel normé

Le calcul différentiel est la branche de l'analyse mathématique qui étudie les propriétés locales des applications différentiables. A un niveau intuitif, la différentiabilité d'une application signifie que celle-ci possède une approximation locale par une application affine appropriée — la différentielle — ou, d'une manière plus générale, peut être approximée par une application polynomiale, ce qui permet d'obtenir les informations nécessaires sur les propriétés de l'application étudiée. Au même titre que l'analyse convexe, le calcul différentiel est un appareil de base de la théorie des problèmes d'extrémum.

Les fondements du calcul différentiel pour les fonctions scalaires sur la droite furent posés par Newton et Leibniz. Les problèmes du calcul des variations nécessitèrent la généralisation de la notion de dérivée et de différentielle aux applications des espaces de plusieurs dimensions et même des espaces de dimension infinie. Ceci fut réalisé par Lagrange au XVIIIe siècle et de nos jours plus complètement par Fréchet, Gâteaux, Levi et d'autres mathématiciens.

2.2.1. Dérivée suivant une direction donnée, première variation, dérivées de Gâteaux et de Fréchet, différentiabilité stricte. Il est bien connu que dans le cas des fonctions à valeurs réelles d'une seule

variable réelle les deux définitions suivantes: l'existence de la limite finie

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})}{h} \tag{1}$$

et la possibilité d'avoir la décomposition asymptotique pour $h\to 0$

$$F(\hat{x}+h)=F(\hat{x})+F'(\hat{x})h+o(h), \tag{2}$$

nous amènent à la même notion de différentiabilité. Pour les fonctions de plusieurs variables, et à fortiori pour les fonctions définies sur un domaine de dimension infinie, tout n'est pas aussi simple. La définition (1) et la définition de la dérivée partielle, qui la généralise, nous amènent à la notion de la dérivée suivant une direction donnée, de la première variation et de la dérivée de Gâteaux. En même temps, la généralisation de la définition (2) nous amène à la dérivée de Fréchet et à la différentiabilité stricte.

Soient X et Y des espaces vectoriels normés, U un voisinage du point $\hat{x}$ dans X et F une application de U dans Y.

Définition 1. La limite

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{F(\hat{x}+\lambda h)-F(\hat{x})}{\lambda}, \tag{3}$$

si elle existe, est appelée *dérivée de F au point $\hat{x}$ suivant la direction h*; on la désigne par $F'(\hat{x};h)$ (et chez d'autres auteurs par $(\nabla_h F)(\hat{x})$, $D_h F(\hat{x})$, $\nu_h F(\hat{x})$).

Définition 2. Supposons que pour tout $h\in X$ la dérivée $F'(\hat{x};h)$ suivant la direction h existe. L'application $\delta_+F(\hat{x};\cdot):X\to\to Y$ définie par la formule $\delta_+F(x;h)=F'(x;h)$ est appelée *première variation de l'application F au point $\hat{x}$* (on dit alors que la fonction *F possède une première variation au point $\hat{x}$*).

Si $\delta_+(\hat{x},-h)=-\delta_+(\hat{x},h)$ pour tous les h, autrement dit, si, pour tout $h\in X$, on a la limite

$$\delta F(\hat{x},h)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(\hat{x}+\lambda h)-F(\hat{x})}{\lambda},$$

alors l'application $h\mapsto\delta F(\hat{x};h)$ est appelée *première variation suivant Lagrange* de l'application F au point $\hat{x}$ (voir 1.4.1).

Définition 3. Supposons que F possède au point $\hat{x}$ une première variation et qu'il existe en même temps un opérateur linéaire continu $\Lambda\in\mathscr{L}(X,Y)$ tel que $\delta_+F(x;h)\equiv\Lambda h$.

Alors l'opérateur Λ est appelé *dérivée de Gâteaux* de l'application F au point x; on le désigne par $F'_G(x)$.

Ainsi $F'_G(x)$ est un élément de $\mathscr{L}(X, Y)$ tel que pour chaque $h \in X$ on a la relation

$$F(x + \lambda h) = F(x) + \lambda F'_G h + o(\lambda) \tag{4}$$

(quand $\lambda \downarrow 0$).

Malgré la ressemblance extérieure des relations (2) et (4), elles diffèrent profondément. Comme nous verrons plus loin, même pour $X = \mathbf{R}^2$, une fonction différentiable suivant Gâteaux peut ne pas être continue. C'est que $o(\lambda)$, dans la décomposition (4), n'est pas nécessairement uniforme relativement à h.

Définition 4. Supposons que dans un voisinage du point $\hat{x}$ l'application F peut être représentée sous la forme

$$F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + \Lambda h + \alpha(h)\,\|h\|, \tag{5}$$

où $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ et

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0. \tag{6}$$

Alors l'application $F(\cdot)$ est dite *différentiable selon Fréchet au point* $\hat{x}$; on écrit alors $F \in D^1(\hat{x})$. L'opérateur Λ est appelé *dérivée de Fréchet* (ou simplement dérivée) de l'application F au point $\hat{x}$; on le désigne par $F'(\hat{x})$.

Les relations (5) et (6) peuvent se récrire de la manière suivante

$$F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})\,h + o(\|h\|). \tag{7}$$

Il en découle facilement que la dérivée de Fréchet est bien définie (pour la dérivée de Gâteaux ce fait est évident, les dérivées dans une direction donnée étant uniquement déterminées), puisque l'égalité $\|\Lambda_1 h - \Lambda_2 h\| = o(\|h\|)$ pour les opérateurs $\Lambda_i \in \mathscr{L}(X, Y)$, $i = 1, 2$, n'est possible que si $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Enfin, en se servant du langage $\varepsilon - \delta$, on peut reformuler (5) et (6) de la manière suivante: pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout h vérifiant $\|h\| < \delta$ on a l'inégalité

$$\|F(x + h) - F(x) - \Lambda h\| \leqslant \varepsilon \|h\|. \tag{8}$$

Ceci nous amène naturellement à la définition plus forte suivante.

Définition 5. L'application F est appelée *strictement différentiable au point* $\hat{x}$ (on écrit alors $F \in SD^1(\hat{x})$) s'il existe un opérateur $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un tel $\delta > 0$ que pour tous les x_1 et x_2 vérifiant les inégalités $\|x_1 - \hat{x}\| < \delta$,

$\| x_2 - \hat{x} \| < \delta$ on a l'inégalité suivante

$$\| F(x_1) - F(x_2) - \Lambda (x_1 - x_2) \| \leqslant \varepsilon \| x_1 - x_2 \|. \tag{9}$$

En posant $x_2 = \hat{x}$ et $x_1 = \hat{x} + h$ dans (9), on obtient (8), de sorte qu'une fonction strictement différentiable est différentiable également suivant Fréchet et $\Lambda = F'(\hat{x})$.

La dérivée $F'(\hat{x})$ (de Gâteaux, de Fréchet ou la dérivée stricte) est par définition une application linéaire de X dans Y. La valeur de cette application sur les vecteurs $h \in X$ sera souvent désignée par $F'(\hat{x})[h]$. Pour les fonctions numériques d'une seule variable (lorsque $X = Y = \mathbf{R}$), l'espace $\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des applications linéaires continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ s'identifie naturellement avec $\mathbf{R}$ (à la fonction linéaire $y = kx$ correspond le coefficient angulaire k). C'est justement dans ce sens qu'en analyse élémentaire la dérivée en un point est un nombre (le coefficient angulaire de la tangente), alors que l'application linéaire correspondante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est la différentielle $dy = F'(\hat{x})dx$ (ici, dx et dy sont les éléments de l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ de dimension 1).

Il est également connu que pour les fonctions d'une seule variable la définition 3 (ou la définition de la première variation selon Lagrange, qui coïncide avec elle dans ce cas) et la définition 4 sont équivalentes (une fonction possède une dérivée en un point si et seulement si elle possède une différentielle en ce point) ; ces définitions amènent à une même notion de dérivée, essentiellement celle qui fut introduite par Newton et Leibniz. La définition 2 est applicable ici aux fonctions qui possèdent au point $\hat{x}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche qui peuvent ne pas coïncider. Pour les fonctions de plusieurs variables ($1 < \dim X < \infty$), on emploie en analyse élémentaire la définition 1 (si h est un vecteur unité, alors (3) est la définition ordinaire de la dérivée suivant une direction donnée ; si h est le vecteur de base de l'axe OX_k, alors en remplaçant dans (3) $\lambda \downarrow 0$ par $\lambda \to 0$, on obtient la définition de la dérivée partielle $\partial F / \partial x_k$) et la définition 4 (l'existence de la différentielle totale).

La généralisation de la notion de dérivée aux espaces de dimension infinie fut stimulée par les problèmes du calcul des variations. La définition de la première variation $\delta F(\hat{x}; h)$, sa notation et son appellation sont dues à Lagrange. Dans le langage de l'analyse fonctionnelle, cette même définition fut donnée par Gâteaux, par conséquent, la première variation suivant Lagrange est parfois appelée différentielle de Gâteaux. La condition de linéarité dans la définition de la dérivée selon Gâteaux est devenue généralement acceptée après les travaux de P. Levi. En analyse on emploie le plus souvent (dans le

cas de dimension finie, ainsi que dans le cas de dimension infinie) la définition de la dérivée selon Fréchet, néanmoins dans certaines situations (en particulier celles qui seront considérées par la suite) l'existence de la dérivée de Fréchet en un point est insuffisante. Il faut des conditions un peu plus fortes. C'est ce qui a mené à la notion de différentiabilité stricte.

P r o p o s i t i o n 1. *Les définitions* 1 *à* 5 *et la continuité d'une fonction sont liées par les implications suivantes*:

$$\textcircled{1} \Longleftarrow \textcircled{2} \Longleftarrow \textcircled{3} \Longleftarrow \textcircled{4} \Longleftarrow \textcircled{5}$$

④ ⇓ *continuité au point* $\hat{x}$

⑤ ⇓ *continuité dans un voisinage du point* $\hat{x}$

aucune desquelles ne peut être inversée.

D é m o n s t r a t i o n. La partie affirmative de la démonstration (i.e. la validité des implications) découle immédiatement des définitions, tandis que la partie négative (l'impossibilité d'inverser les implications) se démontre grâce à une suite de contre-exemples, dont la description détaillée est laissée au lecteur en guise d'exercice.

1) 2 n'implique pas 3: $f_1 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = |x|$.

Au point $x = 0$ la variation est non linéaire. Ce même exemple montre que la continuité en un point n'implique la différentiabilité ni selon Fréchet, ni selon Gâteaux.

2) 3 n'implique pas 4: $f_2 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2, \quad x_2 > 0, \\ 0 & \text{dans les autres points.} \end{cases}$$

Cet exemple montre qu'une fonction peut être différentiable selon Gâteaux (au point (0, 0)) sans être continue.

3) 4 n'implique pas 5: $f_3 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ est rationnel,} \\ 0, & x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Au point $x = 0$ cette fonction est différentiable (selon Fréchet), mais n'est pas strictement différentiable, car elle est discontinue pour $x \neq 0$. ■

Exercices

1. Montrer que la fonction $f_4\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, définie en coordonnées polaires sur $\mathbf{R}^2$ par l'égalité

$$f_4(x) = r\cos 3\varphi \quad (x = (x_1, x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)),$$

possède au point (0, 0) une première variation selon Lagrange mais n'est pas différentiable selon Gâteaux.

2. Toute fonction $F \in SD^1(\hat{x})$ vérifie la condition de Lipschitz dans un certain voisinage du point $\hat{x}$.

3. Pour toute fonction $F \in SD^1(\hat{x})$ numérique ($X = Y = \mathbf{R}$), la dérivée $F'(x)$ existe en presque tous les points d'un certain voisinage du point $\hat{x}$.

Proposition 2. *Si les applications $F_i\colon U \to Y$, $i = 1, 2$, et $A\colon U \to \mathscr{L}(Y, Z)$, où Z est un espace vectoriel normé, sont différentiables dans le sens d'une des définitions 1 à 5 (la même définition pour toutes les trois applications), alors: quels que soient les nombres $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, l'application $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ est différentiable dans le même sens au point $\hat{x}$ et l'on a*

$$F'(\hat{x}) = \alpha_1 F_1'(\hat{x}) + \alpha_2 F_2'(\hat{x})$$

ou

$$F'(\hat{x}; h) = \alpha_1 F_1'(\hat{x}; h) + \alpha_2 F_2'(\hat{x}; h),$$

l'application

$$\Phi = AF_i$$

étant différentiable au point $\hat{x}$ dans le même sens et de plus

$$\Phi'(\hat{x}; h) = A'(\hat{x}; h)\, F_i(\hat{x}) + A(\hat{x})\, F_i'(\hat{x}; h).$$

La démonstration découle immédiatement des définitions. ■

Dans le cas particulier où $X = \mathbf{R}$ et $A\colon U \to \mathscr{L}(Y, \mathbf{R}) = Y^*$, $\Phi(x) = \langle A(x), F_i(x)\rangle$ est une fonction numérique et cette dernière formule peut se récrire de la manière suivante:

$$\langle A(x), F_i(x)\rangle' \,|_{x=\hat{x}} = \langle A'(\hat{x}), F_i(\hat{x})\rangle + \langle A(\hat{x}), F_i'(\hat{x})\rangle,$$

ce qui correspond parfaitement à la formule usuelle du calcul différentiel.

Donnons deux exemples très simples de calcul de dérivées.

1) Application affine. L'application $A\colon X \to Y$ d'un espace vectoriel dans un autre est appelée *affine* s'il existe une application linéaire $\Lambda\colon X \to Y$ et une constante $a \in Y$ telles que

$$A(x) = \Lambda x + a.$$

Si X et Y sont des espaces normés et $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$, alors l'application A est strictement différentiable en tout point x et l'on a

$$A'(x) = \Lambda.$$

Cette assertion se vérifie immédiatement. En particulier, si A est linéaire ($a = 0$), alors $A'(x)[h] = A(h)$ et la dérivée d'une application constante ($\Lambda = 0$) est nulle.

Exercice 1. Démontrer la réciproque: si la dérivée (que l'on peut prendre dans le sens de Gâteaux) de l'application $A : X \to Y$ existe en chaque point $x \in X$ et elle est la même pour tous les x, alors A est une application affine.

2) Application polylinéaire. Soient X et Y des espaces vectoriels topologiques et $\mathscr{L}^n(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications continues polylinéaires des produits cartésiens $X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ fois}}$ dans Y. Rappelons que l'application $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ est *polylinéaire* si pour chaque i l'application

$$x_i \mapsto \Pi(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \ldots, \hat{x}_n)$$

est linéaire. Si X et Y sont normés, alors l'application Π est continue si et seulement si elle est bornée, i.e. si le nombre

$$\|\Pi\| = \sup_{\|x_1\| \leqslant 1, \ldots, \|x_n\| \leqslant 1} \|\Pi(x_1, \ldots, x_n)\| \qquad (10)$$

est fini. Dans ce cas $\mathscr{L}^n(X, Y)$ est un espace vectoriel normé à norme (10) pour lequel on a l'inégalité

$$\|\Pi(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \|\Pi\| \, \|x_1\| \ldots \|x_n\|. \qquad (11)$$

La fonction $Q_n(x) = \Pi(x, \ldots, x)$ est appelée *forme de degré n* (pour $n = 2$, forme quadratique; pour $n = 3$, forme ternaire) correspondant à l'application polylinéaire Π. Il découle de la définition que

$$Q_n(\hat{x} + h) = Q_n(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{n} \Pi(\hat{x}, \ldots, h, \ldots, \hat{x}) + O(\|h\|^2), \qquad (12)$$

et par conséquent $Q_n(\cdot)$ est différentiable selon Fréchet en chaque point $\hat{x}$ et

$$Q_n'(\hat{x})[h] = \sum_{i=1}^{n} \Pi(\hat{x}, \ldots, h, \ldots, \hat{x}) \qquad (13)$$

(dans les deux formules (12) et (13) le i-ième terme de la somme contient la variable h à la i-ième place, tandis que les autres variables prennent la valeur $\hat{x}$). Si l'application Π est symétrique, i.e. $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ ne varie pas pour toutes permutations des arguments x_i, alors (13) se transforme en

$$Q_n'(\hat{x})[h] = n\Pi(h, \hat{x}, \ldots, \hat{x}).$$

En particulier, si X est l'espace réel hilbertien à produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, $A \in \mathscr{L}(X, X)$ et $\Pi(x_1, x_2) = (Ax_1 \mid x_2)$, alors $Q_2(x) = (Ax \mid x)$ — la forme quadratique de l'opérateur A — est différentiable et

$$Q_2'(\hat{x})[h] = (A\hat{x} \mid h) + (Ah \mid \hat{x}) = (A\hat{x} + A^*\hat{x} \mid h),$$

puisque $Q_2'(\hat{x})$ s'identifie naturellement avec le vecteur $A\hat{x} + A^*\hat{x}$. Par exemple, pour $Q_2(x) = \frac{1}{2}(x \mid x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, la dérivée $Q'(x)$ est égale à x.

Exercice 2. Démontrer que $Q_n(x) = \Pi(x, \ldots, x)$, où $\Pi \in \mathscr{L}^n(X, Y)$ est strictement différentiable pour tous les x.

Un exemple plus compliqué est donné par l'assertion suivante.

Proposition 3. *Soit $U \subset \mathscr{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus $A : X \to Y$ pour lesquels on peut trouver un opérateur inverse $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$. Si au moins un des deux espaces X ou Y est un espace de Banach, alors U est ouvert, la fonction $\Phi(A) = A^{-1}$ est différentiable selon Fréchet en tout point $A \in U$ et l'on a*

$$\Phi'(\hat{A})[H] = -\hat{A}^{-1}H\hat{A}^{-1}.$$

Démonstration. Si X est un espace de Banach, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-\hat{A}^{-1}H)^k$ converge dans $\mathscr{L}(X, X)$ pour $\|H\| < \|\hat{A}^{-1}\|^{-1}$ et, comme on vérifie facilement,

$$(\hat{A} + H)\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-\hat{A}^{-1}H)^k \hat{A}^{-1}\right] = I_Y,$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-\hat{A}^{-1}H)^k \hat{A}^{-1}\right](\hat{A} + H) = I_X.$$

Par conséquent

$$(\hat{A} + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\hat{A}^{-1}H)^k \hat{A}^{-1} \tag{14}$$

pour $\|H\| < \|\hat{A}^{-1}\|^{-1}$, de sorte que $\mathring{B}(\hat{A}, \|\hat{A}^{-1}\|^{-1}) \subset U$ et U est ouvert.

Si Y est un espace de Banach, alors (14) doit être remplacé par

$$(\hat{A} + H)^{-1} = \hat{A}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-H\hat{A}^{-1})^k.$$

D'autre part, il découle de (14) que

$$\|(\hat{A}+H)^{-1}-\hat{A}^{-1}+\hat{A}^{-1}H\hat{A}^{-1}\|=\Big\|\sum_{k=2}^{\infty}(-\hat{A}^{-1}H)^k\hat{A}^{-1}\Big\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}(\|\hat{A}^{-1}\|\,\|H\|)^k\|\hat{A}^{-1}\|=\frac{\|\hat{A}^{-1}\|^3\|H\|^2}{1-\|\hat{A}^{-1}\|\,\|H\|}=o(\|H\|)$$

pour $H\to 0$, par conséquent, la fonction $\Phi(A)=\hat{A}^{-1}$ est différentiable, sa dérivée de Fréchet s'exprimant de la manière suivante: $\Phi'(\hat{A})[\cdot]=-\hat{A}^{-1}(\cdot)\hat{A}^{-1}$. ■

Exercice 3. Démontrer que $\Phi(A)$ est strictement différentiable en tout point $\hat{A}\in U$.

2.2.2. Théorème de superposition des applications différentiables.

Théorème de superposition. *Soient X, Y, Z des espaces normés; U un voisinage du point $\hat{x}$ dans X, V un voisinage du point $\hat{y}$ dans Y; $\varphi: U\to V$, $\varphi(\hat{x})=\hat{y}$; $\psi: V\to Z$; $f=\psi\circ\varphi: U\to Z$ la superposition des applications φ et ψ.*

Si ψ est différentiable selon Fréchet au point $\hat{y}$, tandis que φ est différentiable au point $\hat{x}$ selon Fréchet (est différentiable selon Gâteaux, possède une première variation ou possède une dérivée suivant la direction h), alors f jouit au point $\hat{x}$ de la même propriété que φ et l'on a

$$f'(\hat{x})=\psi'(\hat{y})\circ\varphi'(\hat{x}) \tag{1}$$

ou

$$f'(\hat{x};\,h)=\psi'(\hat{y})[\varphi'(\hat{x};\,h)]. \tag{2}$$

Si ψ est strictement différentiable en $\hat{y}$, tandis que φ est strictement différentiable en $\hat{x}$, alors f est strictement différentiable en $\hat{x}$.

Démonstration. Considérons en détail les deux cas extrêmes: le cas de la dérivée dans une direction donnée et le cas de la différentiabilité stricte.

A) Par définition de la dérivée de Fréchet

$$\psi(y)=\psi(\hat{y})+\psi'(\hat{y})[y-\hat{y}]+\alpha(y)\|y-\hat{y}\|,$$

où

$$\lim_{y\to\hat{y}}\alpha(y)=\alpha(\hat{y})=0.$$

Si les limites suivantes existent

$$\varphi'(\hat{x}\,;\,h)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\varphi(\hat{x}+\lambda h)-\varphi(\hat{x})}{\lambda}=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\varphi(\hat{x}+\lambda h)-\hat{y}}{\lambda},$$

alors

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(\hat{x}+\lambda h)-f(\hat{x})}{\lambda}=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\psi(\varphi(\hat{x}+\lambda h))-\psi(\hat{y})}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\psi'(\hat{y})[\varphi(\hat{x}+\lambda h)-\hat{y}]+\alpha(\varphi(\hat{x}+\lambda h))\,\|\varphi(\hat{x}+\lambda h)-\hat{y}\|}{\lambda}=$$

$$=\psi'(\hat{y})\left[\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\varphi(\hat{x}+\lambda h)-\hat{y}}{\lambda}\right]+$$

$$+\lim_{\lambda\downarrow 0}\alpha(\varphi(\hat{x}+\lambda h))\lim_{\lambda\downarrow 0}\left\|\frac{\varphi(\hat{x}+\lambda h)-\hat{y}}{\lambda}\right\|=$$

$$=\psi'(\hat{y})[\varphi'(\hat{x}\,;\,h)]+\alpha(\hat{y})\,\|\varphi'(\hat{x}\,;\,h)\|=\psi'(\hat{y})[\varphi'(\hat{x}\,;\,h)],$$

ce qui démontre (2).

B) Pour simplifier les notations, désignons $A_1=\varphi'(\hat{x})$, $A_2=\psi'(\hat{y})$. Par définition de la différentiabilité stricte, quels que soient $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, il existe des $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ tels que

$$\|x_1-\hat{x}\|<\delta_1,\ \|x_2-\hat{x}\|<\delta_1\Rightarrow\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)-A_1(x_1-x_2)\|\leqslant\varepsilon_1\|x_1-x_2\|, \qquad (3)$$

$$\|y_1-\hat{y}\|<\delta_2,\ \|y_2-\hat{y}\|<\delta_2\Rightarrow\|\psi(y_1)-\psi(y_2)-A_2(y_1-y_2)\|\leqslant\varepsilon_2\|y_1-y_2\|. \qquad (4)$$

Pour chaque $\varepsilon>0$, choisissons $\varepsilon_1>0$ et $\varepsilon_2>0$ de manière à avoir l'inégalité

$$\varepsilon_1\|A_2\|+\varepsilon_2\|A_1\|+\varepsilon_1\varepsilon_2<\varepsilon\,;$$

d'après ces nombres ε_1, ε_2, trouvons $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ de manière à avoir les relations (3) et (4) et, enfin, posons

$$\delta=\min\left(\delta_1,\ \frac{\delta_2}{\varepsilon_1+\|A_1\|}\right).$$

Si maintenant $\|x_1-\hat{x}\|<\delta$ et $\|x_2-\hat{x}\|<\delta$, alors, en vertu de (3), on a

$$\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)-A_1(x_1-x_2)\|+\|A_1(x_1-x_2)\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1\|x_1-x_2\|+\|A_1\|\,\|x_1-x_2\|=(\|A_1\|+\varepsilon_1)\,\|x_1-x_2\|. \qquad (5)$$

En posant dans cette inégalité tour à tour $x_1 = \hat{x}$ et $x_2 = \hat{x}$, on obtient

$$\|\varphi(x_i) - \varphi(\hat{x})\| = \|\varphi(x_i) - \hat{y}\| < (\|A_1\| + \varepsilon_1)\,\delta \leqslant \delta_2,$$

de sorte que pour $y_i = \varphi(x_i)$ on a (4). En se servant maintenant de (4), (3) et (5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1) - f(x_2) - A_2 A_1 (x_1 - x_2)\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|\psi(\varphi(x_1)) - \psi(\varphi(x_2)) - A_2(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))\| + \\
&\quad\quad + \|A_2(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) - A_2 A_1 (x_1 - x_2)\| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon_2 \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| + \|A_2\|\,\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - A(x_1 - x_2)\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \varepsilon_2 (\|A_1\| + \varepsilon_1)\|x_1 - x_2\| + \|A_2\|\,\varepsilon_1 \|x_1 - x_2\| = \\
&\quad = (\varepsilon_2 \|A_1\| + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \|A_2\|\,\varepsilon_1)\|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon \|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

d'où on tire la différentiabilité stricte de f au point $\hat{x}$.

Si l'on pose $x_2 = \hat{x}$, $x_1 = \hat{x} + h$ dans les raisonnements ci-dessus, on obtient la démonstration du théorème dans le cas de la différentiabilité de φ selon Fréchet. Les autres assertions s'obtiennent en analysant l'égalité (2) déjà démontrée. ■

Le contre-exemple suivant nous montre que le théorème de superposition n'est pas valable en général si ψ n'est différentiable que selon Gâteaux.

E x e m p l e. Soient $X = Y = \mathbf{R}^2$, $Z = \mathbf{R}$;

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1, x_2),\quad \varphi_2(x_1, x_2)) = (x_1^2, x_2);$$

$$\psi(y) = \psi(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y_1 = y_2^2, \quad y_2 > 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

(comparer au contre-exemple de la démonstration de la proposition 1 dans 2.1.1). Ici φ est différentiable suivant Fréchet au point (0, 0) et même strictement différentiable (vérifier!) ; la fonction ψ est différentiable suivant Gâteaux au point (0, 0), néanmoins la fonction

$$f(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(x_1^2, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_2 = |x_1| > 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

n'est pas différentiable suivant Gâteaux au point (0, 0) (et ne possède même pas de dérivées dans les directions $h = (1, 1)$ et $h = (-1, 1)$ en ce point).

C o r o l l a i r e. *Soient X et Y des espaces normés, U un voisinage du point $\hat{y}$ dans Y, $f: U \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable selon Fréchet au point $\hat{y}$ et $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors $f \circ \Lambda : \Lambda^{-1}(U) \to \mathbf{R}$ est différentiable selon Fréchet au point $\hat{x} = \Lambda^{-1}(\hat{y})$ et*

$$(f \circ \Lambda)'(\hat{x}) = \Lambda^*(f' \circ \Lambda)(\hat{x}). \qquad (6)$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après les définitions,

$$(f' \circ \Lambda)(\hat{x}) = f'(\Lambda\hat{x}) = f'(\hat{y}) \in \mathscr{L}(Y, \mathbf{R}) = Y^*$$

et

$$(f \circ \Lambda)'(\hat{x}) = f'(\Lambda\hat{x}) \circ \Lambda = f'(\hat{y}) \circ \Lambda \in \mathscr{L}(X, \mathbf{R}) = X^*.$$

Maintenant, pour tout $h \in X$, on peut écrire

$$\langle \Lambda^* (f' \circ \Lambda)(\hat{x}), h\rangle = \langle (f' \circ \Lambda)(\hat{x}), \Lambda h\rangle = f'(\hat{y})[\Lambda h] =$$
$$= (f'(\hat{y}) \circ \Lambda) h = \langle f'(\hat{y}) \circ \Lambda, h\rangle = \langle (f \circ \Lambda)'(\hat{x}), h\rangle,$$

ce qui démontre (6).

2.2.3. Théorème de la moyenne et ses corollaires. Il est bien connu que le théorème de Lagrange pour les fonctions numériques d'une seule variable, également connu sous l'appellation du t h é o r è m e d e l a m o y e n n e o u f o r m u l e d e s a c c r o i s s e m e n t s f i n i s, affirme que *si la fonction* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *est continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$ *et différentiable dans l'intervalle ouvert* (a, b), *alors il existe un point* $c \in (a, b)$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1}$$

On vérifie tout aussi facilement que la formule (1) reste valable dans le cas d'une fonction numérique $f(x)$ dont la variable appartient à un espace vectoriel topologique quelconque.

Dans ce cas

$$[a, b] = \{x \mid x = a + t(b - a), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

et l'on définit d'une manière analogue l'intervalle ouvert (a, b), tandis que la différentiabilité peut être entendue dans le sens de Gâteaux. En posant

$$\Phi(t) = f(a + t(b - a)),$$

nous réduisons la démonstration au cas d'une seule variable réelle.

Pour les fonctions à valeurs vectorielles la situation est tout autre.

E x e m p l e. Supposons que l'application $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ est définie par l'égalité $f(t) = (\sin t, -\cos t)$. Alors pour chaque t la dérivée de Fréchet (même la dérivée stricte) $f'(t)$ existe (démontrer !) :

$$f'(t)[\alpha] = (\cos t, \sin t)\alpha = (\alpha \cos t, \alpha \sin t).$$

Mais en même temps, pour tout c, on a

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(c)[2\pi - 0] = (2\pi \cos c, 2\pi \sin c),$$

de sorte que la formule (1) n'a plus lieu.

On peut cependant remarquer que la formule (1) elle-même est beaucoup moins souvent employée en analyse que l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leqslant M |b - a|$ (où $M = \sup |f'(x)|$) qui en découle. Nous montrerons maintenant que sous cette forme plus faible, l'assertion considérée est déjà applicable aux espaces normés arbitraires. En suivant la tradition, on conserve pour ce théorème l'appellation 2 du « théorème de la moyenne » quoique, bien sûr, on devrait l'appeler « théorème d'estimation des accroissements finis ».

Théorème de la moyenne. *Soient X et Y des espaces vectoriels normés et $U \subseteq X$ un ensemble ouvert contenant le segment $[a, b]$.*

Si la fonction $f: U \to Y$ est différentiable selon Gâteaux en chaque point $x \in [a, b]$, alors

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant \sup_{c \in [a, b]} \| f'(c) \| \, \| b - a \|. \tag{2}$$

Démonstration. Choisissons arbitrairement $y^* \in Y^*$ et envisageons la fonction

$$\Phi(t) = \langle y^*, f(a + t(b - a)) \rangle.$$

En chaque point du segment [0, 1] cette fonction possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite

$$\Phi'_-(t) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\Phi(t-\alpha) - \Phi(t)}{-\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \left\langle y^*, \frac{f(a+(t-\alpha)(b-a)) - f(a+t(b-a))}{-\alpha} \right\rangle =$$
$$= -\left\langle y^*, \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(a+t(b-a) - \alpha(b-a)) - f(a+t(b-a))}{\alpha} \right\rangle =$$
$$= -\langle y^*, f'(a+t(b-a))[-(b-a)] \rangle =$$
$$= \langle y^*, f'(a+t(b-a))[b-a] \rangle,$$

et d'une manière analogue

$$\Phi'_+(t) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\Phi(t+\alpha) - \Phi(t)}{\alpha} = \langle y^*, f'(a+t(b-a))[b-a] \rangle.$$

Puisque ces dérivées coïncident, la fonction $\Phi(t)$ est différentiable (dans le sens usuel) sur [0, 1]; elle est donc continue sur cet intervalle. D'après la formule de Lagrange, il existe un $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$\langle y^*, f(b) - f(a) \rangle = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta) =$$
$$= \langle y^*, f'(a + \theta(b - a))[b - a] \rangle.$$

D'après le corollaire 1 du théorème de Hahn-Banach (voir 2.1.3) qui affirme que pour tout élément $y \in Y$ il existe une fonctionnelle linéaire $y^* \in Y^*$ vérifiant $\| y^* \| = 1$ et $\langle y^*, y \rangle = \| y \|$, nous

pouvons choisir une telle fonctionnelle y^* pour l'élément $y = f(b) - f(a)$; nous obtenons

$$\|f(b) - f(a)\| = \langle y^*, f(b) - f(a)\rangle = \\ = \langle y^*, f'(a + \theta(b-a))[b-a]\rangle \leqslant \\ \leqslant \|y^*\| \, \|f'(a+\theta(b-a))\| \, \|b-a\| \leqslant \sup_{c\in[a,b]} \|f'(c)\| \, \|b-a\|,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Envisageons quelques corollaires du théorème de la moyenne.

Corollaire 1. *Supposons que toutes les hypothèses du théorème de la moyenne sont remplies et* $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$. *Alors*

$$\|f(b) - f(a) - \Lambda(b-a)\| \leqslant \sup_{c\in[a,b]} \|f'(c) - \Lambda\| \, \|b-a\|. \tag{3}$$

Démonstration. Appliquer le théorème de la moyenne à l'application $g(x) = f(x) - \Lambda x$. ■

Corollaire 2. *Soient X et Y des espaces normés, U un voisinage du point* $\hat{x}$ *dans X et* $f: U \to Y$ *une application différentiable selon Gâteaux en chaque point* $x \in U$. *Si l'application* $x \mapsto f'_G(x)$ *est continue (dans la topologie opératorielle uniforme de l'espace* $\mathscr{L}(X, Y)$) *au point* $\hat{x}$, *alors l'application f est strictement différentiable au point* $\hat{x}$ *(et donc différentiable selon Fréchet en ce point).*

Démonstration. D'après un $\varepsilon > 0$ donné, trouvons un $\delta > 0$ de manière que

$$\|x - \hat{x}\| < \delta \Rightarrow \|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Si $\|x_1 - \hat{x}\| < \delta$ et $\|x_2 - \hat{x}\| < \delta$, alors pour tout $x = x_1 + t(x_2 - x_1) \in [x_1, x_2]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a

$$\|x - \hat{x}\| = \|x_1 + t(x_2 - x_1) - \hat{x}\| = \|t(x_2 - \hat{x}) + (1-t)(x_1 - \hat{x})\| \leqslant \\ \leqslant t\|x_2 - \hat{x}\| + (1-t)\|x_1 - x\| < t\delta + (1-t)\delta = \delta,$$

de sorte que, d'après (4), $\|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| < \varepsilon$.

En appliquant le corollaire 1 pour $\Lambda = f'_G(\hat{x})$, on obtient

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'_G(\hat{x})(x_1 - x_2)\| \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\in[x_1, x_2]} \|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| \, \|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon \|x_1 - x_2\|,$$

ce qui implique la différentiabilité stricte de f au point $\hat{x}$. ■

Définition. Soient X et Y des espaces normés. L'application $F: U \to Y$ définie sur un ouvert $U \subset X$ est dite de classe $C^1(U)$ si elle possède une dérivée en chaque point $x \in U$, l'application

$x \mapsto F'(x)$ étant continue (dans la topologie opératorielle uniforme).

Le corollaire 2 nous montre qu'il n'est pas nécessaire de préciser de quelle dérivée il s'agit ici. On se sert constamment de cette remarque lorsqu'on vérifie la différentiabilité de fonctionnelles concrètes : on démontre l'existence de la dérivée de Gâteaux, on vérifie sa continuité, ce qui garantit déjà la différentiabilité stricte (et donc l'existence de la dérivée de Fréchet).

Exercices. Supposons que dans les hypothèses du théorème de la moyenne on a $Y = \mathbf{R}^n$, l'application $x \mapsto f'_G(x)$ étant continue dans $U \subset X$. Alors

1)
$$f(b) - f(a) = \int_0^1 f'_G(a + t(b-a))\, dt\, [b-a]. \tag{5}$$

2) Il existe un opérateur $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ appartenant à l'enveloppe convexe fermée (voir 2.6.2) de l'ensemble $\{f'_G(x) \mid x \in [a, b]\}$ et tel que

$$f(b) - f(a) = \Lambda(b-a).$$

3) Généraliser 1) et 2) au cas d'un espace de Banach arbitraire Y, en définissant l'intégrale de (5) d'une manière appropriée.

2.2.4. Dérivation dans un produit d'espaces. Dérivées partielles. Théorème sur la différentielle totale. Dans ce sous-paragraphe X, Y, Z sont des espaces normés. Envisageons d'abord le cas d'une application à valeurs dans le produit $Y \times Z$, $F: U \to Y \times Z$, $U \subset X$. Puisque un point de $Y \times Z$ est une paire (y, z), l'application F consiste également de deux composantes $F(x) = (G(x), H(x))$, où $G: U \to Y$, $H: U \to Z$. On déduit immédiatement de la définition l'assertion suivante.

Proposition 1. *Soient X, Y, Z des espaces normés, U un voisinage du point $\hat{x}$ dans X, $G: U \to Y$, $H: U \to Z$.*

Pour que l'application $F = (G, H): U \to Y \times Z$ soit différentiable au point $\hat{x}$ dans le sens d'une des définitions 1 à 5 de 2.2.1, il est nécessaire et suffisant que G et H possèdent cette même propriété. On a alors

$$F'(\hat{x}) = (G'(\hat{x}), H'(\hat{x}))$$

ou

$$F'(\hat{x}; h) = (G'(\hat{x}; h), H'(\hat{x}; h)).$$

Passons maintenant au cas où le domaine de définition de l'application $F: U \to Z$ est situé dans un produit d'espaces $U \subset X \times Y$.

Définition. Soient X, Y, Z des espaces normés, U un voisinage du point $(\hat{x}, \hat{y})$ dans $X \times Y$ et $F: U \to Z$.

Si l'application $x \mapsto F(x, \hat{y})$ est différentiable au point $\hat{x}$ (suivant Gâteaux, Fréchet ou strictement), sa dérivée est appelée *dérivée partielle relativement à* x de l'application F au point $(\hat{x}, \hat{y})$; on la note $F_x(\hat{x}, \hat{y})$ ou $\frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y})$.

On définit d'une manière analogue la dérivée partielle relativement à y :

$$F_y(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}).$$

Théorème sur la différentielle totale. *Soient X, Y et Z des espaces normés, U un voisinage dans $X \times Y$ et $F: U \to Z$ une application qui possède en chaque point $(x, y) \in W$ des dérivées partielles $F_x(x, y)$ et $F_z(x, y)$ dans le sens de Gâteaux.*

Si les applications $(x, y) \mapsto F_x(x, y)$ et $(x, y) \mapsto F_y(x, y)$ sont continues au point $(\hat{x}, \hat{y}) \in U$ dans la topologie opératorielle uniforme, alors F est strictement différentiable en ce point et l'on a

$$F'(\hat{x}, \hat{y})[\xi, \eta] = F_x(\hat{x}, \hat{y})[\xi] + F_y(\hat{x}, \hat{y})[\eta].$$

Démonstration. Ayant choisi un $\varepsilon > 0$ quelconque, prenons $\delta > 0$ si petit que le voisinage « rectangulaire »

$$V = \overset{\circ}{B}(\hat{x}, \delta) \times \overset{\circ}{B}(\hat{y}, \delta) = \{(x, y) \mid \| x - \hat{x} \| < \delta, \ \| y - \hat{y} \| < \delta\}$$

du point $(\hat{x}, \hat{y})$ soit contenu dans U, les inégalités suivantes y étant remplies

$$\| F_x(x, y) - F_x(\hat{x}, \hat{y}) \| < \varepsilon, \quad \| F_y(x, y) - F_y(\hat{x}, \hat{y}) \| < \varepsilon. \quad (1)$$

Nous avons maintenant

$$\Delta =$$
$$= F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) - F_x(\hat{x}, \hat{y})[x_1 - x_2] -$$
$$- F_y(\hat{x}, \hat{y})[y_1 - y_2] = [F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) -$$
$$- F_x(\hat{x}, \hat{y})[x_1 - x_2]] + [F(x_2, y_1) - F(x_2, y_2) -$$
$$- F_y(\hat{x}, \hat{y})[y_1 - y_2]].$$

On voit facilement que si les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont situés dans V, alors on a également $(x_2, y_1) \in V$ et, en outre, les deux segments $[(x_1, y_1), (x_2, y_1)]$ et $[(x_2, y_1), (x_2, y_2)]$ sont contenus dans $V \subset \subset U$. Par conséquent, les fonctions $x \mapsto F(x, y_1)$ et $y \mapsto F(x_2, y)$ sont différentiables suivant Gâteaux : la première possède la dérivée F_x sur $[x_1, x_2]$, la deuxième, la dérivée F_y sur $[y_1, y_2]$. En appliquant le théorème de la moyenne à ces fonctions (sous la forme de l'inégalité (3) de 2.2.3 avec un choix approprié de Λ), nous obtenons en

vertu de (1)

$$(x_1, y_1) \in V,\ (x_2, y_2) \in V \Rightarrow \|\Delta\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in [x_1, x_2]} \{\|F_x(\xi, y_1) - F_x(\hat{x}, \hat{y})\| \, \|x_1 - x_2\|\} +$$

$$+ \sup_{\eta \in [y_1, y_2]} \{\|F_y(x_2, \eta) - F_y(\hat{x}, \hat{y})\| \, \|y_1 - y_2\|\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|x_1 - x_2\| + \varepsilon \|y_1 - y_2\|. \ \blacksquare$$

Corollaire. *Pour avoir $F \in C^1(U)$, il est nécessaire et suffisant que les dérivées partielles F_x et F_y soient continues dans U.*

De même que la proposition 1, le théorème sur la différentielle totale se généralise sans difficulté au cas du produit d'un nombre fini quelconque d'espaces.

Considérons encore le cas de dimension finie. Supposons que $F: U \to \mathbf{R}^m$ est définie sur un ensemble ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$.

Puisque, de manière naturelle, on a

$$\mathbf{R}^m = \underbrace{\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{m \text{ fois}}, \quad \mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{n \text{ fois}},$$

on peut se servir aussi bien de la proposition 1 que du théorème sur la différentielle totale. Si l'on a

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \text{ et } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

alors

$$F'(\hat{x})[h] = \begin{pmatrix} F'_1(\hat{x})[h] \\ F'_2(\hat{x})[h] \\ \ldots\ldots \\ F'_m(\hat{x})[h] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(\hat{x}) h_j \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_j}(\hat{x}) h_j \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(\hat{x}) h_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}) \cdot h. \qquad (2)$$

La matrice d'ordre $m \times n$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x})\right)$$

est appelée *matrice de Jacobi* de l'application F au point $\hat{x}$. On voit évidemment que c'est tout simplement la matrice de l'opérateur linéaire $F'(\hat{x})\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, écrite pour les bases standards de $\mathbf{R}^n$ et de $\mathbf{R}^m$.

En analyse classique, on écrit généralement

$$h = dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

et la formule (2) se met sous la forme

$$dF(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\hat{x})\, dx_j.$$

L'assertion démontrée dans le présent sous-paragraphe est une généralisation du théorème bien connu qui affirme que l'existence de dérivées partielles continues est une condition suffisante pour la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables.

2.2.5. Dérivées d'ordres supérieurs. Formule de Taylor. Dans ce sous-paragraphe X et Y sont des espaces normés, U est un sous-ensemble ouvert de X. La différentiabilité est partout entendue dans le sens de Fréchet.

Si l'application $f\colon U \to Y$ est différentiable en chaque point $x \in U$, alors l'application $f'(x)\colon U \to \mathscr{L}(X, Y)$ est définie. Puisque $\mathscr{L}(X, Y)$ est également un espace normé, on peut s'interroger sur l'existence de la dérivée seconde

$$f''(x) = (f')'(x) \in \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y)).$$

On définit par récurrence les dérivées d'ordres supérieurs: si $f^{(n-1)}(x)$ est déjà définie dans U, alors

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \in \underbrace{\mathscr{L}(X, \ldots, \mathscr{L}(X, Y)}_{n \text{ fois}} \ldots).$$

D é f i n i t i o n 1. Soit $f\colon U \to Y$. Nous dirons que $f^{(n)}$ existe au point $\hat{x} \in U$, si dans un certain voisinage de ce point les dérivées $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ existent ainsi que $f^{(n)}(\hat{x})$.

Si $f^{(n)}(x)$ existe en chaque point $x \in U$ et l'application $x \mapsto f^{(n)}(x)$ est continue dans la topologie uniforme (engendrée par la

norme) de l'espace $\mathscr{L}(X, \ldots, \mathscr{L}(X, Y) \ldots)$, alors f est appelée application de classe $C^n(U)$.

Par la suite, nous aurons besoin de certaines propriétés des applications polylinéaires continues (voir l'exemple 2 de 2.2.1).

P r o p o s i t i o n 1. *Les espaces normés* $\mathscr{L}^n(X, \mathscr{L}^m(X, Y))$ *et* $\mathscr{L}^{n+m}(X, Y)$ *sont isométriquement isomorphes.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $\pi \in \mathscr{L}^n(X, \mathscr{L}^m(X, Y))$, alors $\pi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}^m(X, Y)$ et l'égalité

$$\Pi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = \pi(x_1, \ldots, x_n)[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}] \tag{1}$$

détermine une application Π polylinéaire de l'espace $X^{n+m} = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n+m \text{ fois}}$ dans Y. Inversement, toute application Π détermine, suivant l'égalité (1), une application π polylinéaire de l'espace $X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ fois}}$ dans l'espace des applications polylinéaires de X^m dans Y. Il reste à remarquer que

$$\|\Pi\| = \sup_{\substack{\|x_1\| \leqslant 1 \\ \cdots \\ \|x_{n+m}\| \leqslant 1}} \|\Pi(x_1, \ldots, x_{n+m})\| = \sup_{\substack{\|x_1\| \leqslant 1 \\ \cdots \\ \|x_n\| \leqslant 1}} \sup_{\substack{\|x_{n+1}\| \leqslant 1 \\ \cdots \\ \|x_{n+m}\| \leqslant 1}} \pi(x_1, \ldots, x_n)[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}] = \sup_{\substack{\|x_1\| \leqslant 1 \\ \cdots \\ \|x_n\| \leqslant 1}} \|\pi(x_1, \ldots, x_n)\| = \|\pi\|. \ \blacksquare$$

C o r o l l a i r e 1. $\underbrace{\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, \ldots,}_{n \text{ fois}} \mathscr{L}(X, Y) \ldots))$ *est isométriquement isomorphe à* $\mathscr{L}^n(X, Y)$.

Ainsi, on peut supposer que $f^{(n)}(x) \in \mathscr{L}^n(X, Y)$. La valeur de cette application polylinéaire sur les vecteurs $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sera désignée par $f^{(n)}(x)[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. D'après la définition par récurrence, on a

$$f^{(n)}(x_0)[\xi_1, \ldots, \xi_n] = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \alpha\xi_1)[\xi_2, \ldots, \xi_n] - f^{(n-1)}(x_0)[\xi_2, \ldots, \xi_n]}{\alpha}.$$

Pour un choix arbitraire de $\Pi \in \mathscr{L}^n(X, Y)$ et pour des indices différents $(i_1, \ldots, i_k)$, chacun desquels prend une des valeurs 1,

2, . . ., n, désignons

$$\Pi_{i_1 \ldots i_k}(x; h_1, \ldots, h_k) = \Pi(x_1, \ldots, x_n)\,|_{x_{i_l}=h_l,\ l=1,2,\ldots,k,\ x_i=x,\ i\neq i_1,\ldots,i_k}.$$

P r o p o s i t i o n 2. *Si* $\Pi \in \mathscr{L}^n(X, Y)$ *et* $Q(x) = \Pi(x, \ldots, x)$, *alors*

$$\begin{aligned} &Q'(x)[h_1] = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i(x; h_1),\\ &Q''(x)[h_1, h_2] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \Pi_{ij}(x; h_1, h_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &Q^{(n)}(x)[h_1, \ldots, h_n] = \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} \Pi(h_{i_1}, \ldots, h_{i_n}),\\ &Q^{(k)}(x) \equiv 0 \ \ si\ \ k > n \end{aligned} \tag{2}$$

(dans la formule pour $Q^{(n)}$, on prend la somme sur toutes les permutations des indices).

La démonstration de ces formules s'obtient par un calcul direct (comparer également à l'exemple de 2.2.1). Remarquons que (2) implique que chacune des dérivées $Q^{(l)}$ est une fonction symétrique de $(h_1, \ldots, h_l)$. Nous verrons par la suite que ceci n'est pas un fait du hasard.

P r o p o s i t i o n 3. *Si l'application* $\Pi \in \mathscr{L}^n(X, Y)$ *est symétrique et* $Q(x) = \Pi(x, \ldots, x) \equiv 0$, *alors* $\Pi \equiv 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \ldots, t_n) &= Q(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n) =\\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_n} t_{i_1} \ldots t_{i_n} \Pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) =\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant\alpha_i\leqslant n\\ \Sigma\alpha_i=n}} t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n} \Sigma'_\alpha \Pi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) =\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant\alpha_i\leqslant n\\ \Sigma\alpha_i=n}} t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n} N_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1\ \text{fois}}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n\ \text{fois}}), \end{aligned}$$

où dans Σ'_α nous avons regroupé les termes dont les indices $i_1, \ldots, i_n$ possèdent la propriété suivante: α_1 d'entre eux sont égaux à 1, ..., α_n d'entre eux sont égaux à n, $N_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ étant le nombre de termes de cette somme (dans la dernière égalité nous nous sommes servis du fait que Π est symétrique).

Par hypothèse, $\varphi(t_1, \ldots, t_n) \equiv 0$ et donc tous les coefficients de ce polynôme sont nuls. En particulier, le coefficient $n!\,\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ du terme $t_1t_2 \ldots t_n$ est nul. ■

Théorème des dérivées mixtes. *Si la dérivée seconde $f''(\hat{x})$ de la fonction $f: U \to Y$ existe, alors on a pour tous les ξ, $\eta \in X$*

$$f''(\hat{x})[\xi, \eta] = f''(\hat{x})[\eta, \xi]. \tag{3}$$

Démonstration. D'après la définition de la dérivée seconde

$$f'(x) - f'(\hat{x}) = (f')'(\hat{x})[x - \hat{x}] + \alpha(x)\,\|x - \hat{x}\|,$$

où $\alpha(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ et

$$\lim_{x \to \hat{x}} \alpha(x) = \alpha(\hat{x}) = 0. \tag{4}$$

Pour η suffisamment petit et x suffisamment proche de $\hat{x}$, la fonction

$$\varphi(x) = f(x + \eta) - f(x)$$

est définie et

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x+\eta) - f'(x) = f'(x+\eta) - f'(\hat{x}) - (f'(x) - f'(\hat{x})) = \\ &= (f')'(\hat{x})[x+\eta-\hat{x}] + \alpha(x+\eta)\,\|x+\eta-\hat{x}\| - \\ &\quad - (f')'(\hat{x})[x-\hat{x}] - \alpha(x)\,\|x-\hat{x}\| = \\ &= (f')'(\hat{x})[\eta] + \alpha(x+\eta)\,\|x-\hat{x}+\eta\| - \alpha(x)\,\|x-\hat{x}\|.\end{aligned}$$

En particulier

$$\varphi'(\hat{x}) = (f')'(\hat{x})[\eta] + \alpha(\hat{x}+\eta)\,\|\eta\|, \tag{5}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\varphi'(x) - \varphi'(\hat{x}) = \\ &= \alpha(x+\eta)\,\|x-\hat{x}+\eta\| - \alpha(x)\,\|x-\hat{x}\| - \alpha(\hat{x}+\eta)\|\eta\|.\end{aligned} \tag{6}$$

D'après (4), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\|x - \hat{x}\| < \delta \Rightarrow \|\alpha(x)\| < \varepsilon, \tag{7}$$

d'où l'on tire en vertu de (6)

$$\begin{aligned}&\|x - \hat{x}\| < \delta/2, \\ &\|\eta\| < \delta/2 \Rightarrow \|\varphi'(x) - \varphi'(\hat{x})\| < 2\varepsilon\,(\|x - \hat{x}\| + \|\eta\|).\end{aligned} \tag{8}$$

Pour des ξ et η suffisamment petits, la deuxième différence

$$\Delta(\eta, \xi) = f(\hat{x} + \xi + \eta) - f(\hat{x} + \xi) - f(\hat{x} + \eta) + f(\hat{x}) \tag{9}$$

est définie, de sorte que l'on peut obtenir, en appliquant (5), (7) et (8),

$$\|\xi\| < \delta/2,\ \|\eta\| < \delta/2 \Rightarrow \|\Delta(\eta, \xi) - f''(\hat{x})[\eta, \xi]\| =$$
$$= \|\varphi(\hat{x}+\xi) - \varphi(\hat{x}) - ((f')'(\hat{x})[\eta])[\xi]\| =$$
$$= \|\varphi(\hat{x}+\xi) - \varphi(\hat{x}) - \varphi'(\hat{x})[\xi] + \alpha(\hat{x}+\eta)[\xi]\|\eta\|\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in[\hat{x}, \hat{x}+\xi]} \|\varphi'(x) - \varphi'(\hat{x})\|\|\xi\| + \|\alpha(\hat{x}+\eta)\|\|\xi\|\|\eta\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon(\|\xi\| + \|\eta\|)\|\xi\| + \varepsilon\|\xi\|\|\eta\| \leqslant 3\varepsilon(\|\xi\| + \|\eta\|)\|\xi\|.$$

En remplaçant ξ, η par $t\xi$, $t\eta$, où maintenant ξ et η sont des valeurs fixes arbitraires, tandis que $t \in \mathbf{R}$ doit être petit, nous obtenons l'inégalité

$$\|\Delta(t\eta, t\xi) - t^2 f''(\hat{x})[\eta, \xi]\| \leqslant 3\varepsilon t^2(\|\xi\| + \|\eta\|)\|\xi\|. \quad (10)$$

En changeant de place ξ et η dans les raisonnements ci-dessus, nous obtenons également

$$\|\Delta(t\xi, t\eta) - t^2 f''(\hat{x})[\xi, \eta]\| \leqslant 3\varepsilon t^2(\|\xi\| + \|\eta\|)\|\eta\|. \quad (11)$$

Mais $\Delta(t\eta, t\xi) = \Delta(t\xi, t\eta)$, puisque la deuxième différence (9) est symétrique relativement à ξ et η, tandis que (10) et (11) amènent, après simplification par t^2, à l'inégalité

$$\|f''(\hat{x})[\eta, \xi] - f''(\hat{x})[\xi, \eta]\| \leqslant 3\varepsilon(\|\xi\| + \|\eta\|)^2.$$

ε étant arbitraire, on obtient (3). ■

Le titre que nous avons donné à ce théorème provient de l'analyse classique et du théorème correspondant qui affirme l'indépendance de la dérivée mixte de l'ordre de différentiation: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (pourquoi ?).

Corollaire 2. *La dérivée $f^{(n)}(\hat{x})$ (si elle existe) est une fonction polylinéaire symétrique.*

Démonstration. Pour $n = 2$, c'est l'assertion du théorème que nous venons de démontrer. Ensuite il faut raisonner par récurrence en se servant des égalités

$$((f^{(n-1)})'(\hat{x})[\xi])[\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}] =$$
$$= f^{(n)}(\hat{x})[\xi_1, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}] =$$
$$= ((f^{(n-2)})''(\hat{x})[\xi, \eta_1])[\eta_2, \ldots, \eta_{n-1}].$$

L'hypothèse de récurrence, appliquée à la première égalité, montre l'invariance de $f^{(n)}(\hat{x})[\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}]$ relativement à toute permu-

tation des variables η_i, tandis que le théorème 1 et la deuxième égalité impliquent l'invariance relativement à la transposition de ξ avec η_1. Ceci est suffisant pour démontrer la symétrie de $f^{(n)}(\hat{x})$. ■

Si l'on passe de la fonction symétrique polylinéaire à la forme correspondante (voir l'exemple de 2.2.1), on obtient la différentielle à la place de la dérivée.

Définition 2.

$$d^n f(x_0 ; h) = f^n(x_0)[h, \ldots, h].$$

Exemple. Si $Q(x) = \Pi(x, \ldots, x)$, où $\Pi \in \mathscr{L}^n(X, Y)$, alors, en vertu de la proposition 2,

$$d^k Q(0; h) = 0 \text{ pour } k \neq n$$

et

$$d^n Q(0; h) = k!\, Q(h).$$

Lemme. *Si la dérivée $f^{(n)}(\hat{x})$ existe et $f(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) = 0, \ldots$ $\ldots, f^{(n)}(\hat{x}) = 0$, on a*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(\hat{x}+h) \|}{\| h \|^n} = 0.$$

Démonstration. Pour $n = 1$ l'assertion est valable d'après la définition de la dérivée. On continue le raisonnement par récurrence. Soit $n > 1$. Posons $g(x) = f'(x)$. Alors $g(\hat{x}) = 0, \ldots$ $\ldots, g^{(n-1)}(\hat{x}) = 0$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\| g(\hat{x} + h_1) \| < \varepsilon \| h_1 \|^{n-1} \text{ avec } \| h_1 \| < \delta.$$

Maintenant, d'après le théorème de la moyenne, on a pour $\| h \| < \delta$

$$\| f(\hat{x}+h) \| = \| f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x}) h \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{h_1 \in [0, h]} \| f'(\hat{x}+h_1) - f'(\hat{x}) \| \, \| h \| =$$

$$= \sup_{h_1 \in [0, h]} \| g(\hat{x}+h_1) \| \, \| h \| \leqslant \sup_{h_1 \in [0, h]} \varepsilon \| h_1 \|^{n-1} \| h \| = \varepsilon \| h \|^n. \ ■$$

Théorème sur la formule de Taylor. *Si $f^n(\hat{x})$ existe, alors*

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + df(\hat{x}; h) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(\hat{x}; h) + \alpha_n(h) \| h \|^n,$$

où

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = \alpha_n(0) = 0.$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$g(\xi) = f(\hat{x}+\xi) - f(\hat{x}) - df(\hat{x}; \xi) - \ldots - \frac{1}{n!} d^n f(\hat{x}; \xi).$$

En nous servant de l'exemple envisagé ci-dessus et de l'égalité

$$d^k f(\hat{x}; \xi) = f^{(k)}(\hat{x})[\xi, \ldots, \xi], \quad f^{(k)}(\hat{x}) \in \mathcal{L}^k(X, Y),$$

nous obtenons

$$d^k g(0; h) = d^k f(\hat{x}; h) - \frac{1}{k!}(k!\, d^k f(\hat{x}; h)) = 0.$$

En appliquant le corollaire 1, d'après lequel $g^{(k)}(0)$ est une fonction symétrique appartenant à $\mathcal{L}^k(X, Y)$, et la proposition 3, selon laquelle toute fonction symétrique s'annule dès que la forme correspondante s'annule, nous voyons que $g(0) = 0, \ldots, g^{(n)}(0) = 0$. D'après le lemme, $\| g(\xi) \| = o(\| \xi \|^n)$ et l'assertion du théorème est démontrée; en outre, $\alpha_n(h) = \frac{g(h)}{\|h\|^n}$ pour $h \neq 0$. ■

Exercice. Si $f^{(n)}(x)$ existe dans un voisinage en étoile du point $\hat{x}$, alors

1) $$\left\| f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - df(\hat{x}; h) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(\hat{x}; h) \right\| \leqslant \sup_{c \in [\hat{x}, \hat{x}+h]} \| f^{(n)}(c) \| \frac{\| h \|^n}{n!};$$

2) $$\left\| f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - df(\hat{x}; h) - \ldots - \frac{1}{n!} d^n f(\hat{x}, h) \right\| \leqslant \sup_{c \in [\hat{x}, \hat{x}+h]} \| f^{(n)}(c) - f^{(n)}(\hat{x}) \| \frac{\| h \|^n}{n!}.$$

Indication. Une des méthodes de solution possibles est la suivante: pour $n > 1$ la dérivée $f'(x)$ est continue dans un voisinage du point $\hat{x}$ et l'on peut se servir de l'égalité

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \int_0^1 f'(x_0 + th)\, dt\, [h]$$

(voir l'exercice de 2.2.3).

Les inégalités obtenues dans ce problème sont les généralisations de la formule classique de Taylor à terme résiduel sous la forme de Lagrange, tandis que le théorème lui-même nous donne cette même formule à terme résiduel sous la forme de Péano.

La démonstration de l'existence des dérivées d'ordre supérieur dans le sens de Fréchet pour les applications concrètes amène souvent à des calculs compliqués; par contre, le calcul des dérivées ou, plus

exactement, des différentielles, i.e. des formes homogènes correspondantes, s'effectue en général beaucoup plus facilement. Le plus souvent, on le fait en se servant de la notion de variations selon Lagrange.

D é f i n i t i o n 3. La fonction $f = U \to Y$ possède une *n-ième variation selon Lagrange* en un point $\hat{x} \in U$ si pour tout $h \in X$ la fonction $\varphi(\alpha) = f(\hat{x} + \alpha h)$ est différentiable au point $\alpha = 0$ jusqu'à l'ordre n inclus. Dans ce cas, l'application $h \mapsto \delta^n f(\hat{x};\, h)$ définie par l'égalité

$$\delta^n f(\hat{x};\ h) = \varphi^{(n)}(0) = \frac{d^n}{d\alpha^n} f(\hat{x} + \alpha h)|_{\alpha=0} \tag{12}$$

est appelée n-ième variation de f au point $\hat{x}$.

C o r o l l a i r e 3. *Si $f^{(n)}(\hat{x})$ existe, alors f possède une n-ième variation selon Lagrange au point $\hat{x}$, et l'on a*

$$\delta^n f(\hat{x};\ h) = d^n f(\hat{x};\ h) = f^{(n)}(\hat{x})\ [h, \ldots, h]. \tag{13}$$

L a d é m o n s t r a t i o n s'obtient facilement par récurrence en se servant de la formule de Taylor, puisque cette dernière nous donne

$$f(\hat{x} + \alpha h) = f(\hat{x}) + \frac{\alpha}{1!} df(\hat{x};\ h) + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} d^n f(\hat{x};\ h) + o(\alpha^n).$$

Ainsi, si l'on sait à priori que la dérivée $f^{(n)}(\hat{x})$ existe, on peut calculer $d^n f(\hat{x};\, h)$ en se servant des formules (12) et (13) et du calcul différentiel pour les fonctions de variable scalaire, ce qui est, bien entendu, beaucoup plus simple. En vertu de la proposition 3, la différentielle $d^n f(\hat{x};\, h)$ détermine de façon unique la dérivée $f^{(n)}(\hat{x})$ (i.e. la fonction polylinéaire).

La réciproque est évidemment fausse: une fonction peut avoir une n-ième variation sans posséder de dérivée de Fréchet $f^{(n)}$.

Nous laissons au lecteur le soin de trouver les propriétés supplémentaires que doit posséder la n-ième variation pour que l'assertion analogue à la condition suffisante de différentiabilité soit satisfaite (corollaire 2 de 2.2.3).

§ 2.3. Théorème des fonctions implicites

La généralisation du théorème classique sur les fonctions implicites démontrée dans ce paragraphe s'applique avec succès dans diverses branches de l'analyse. Nous aurons l'occasion de nous en convaincre par la suite.

2.3.1. Enoncé du théorème d'existence des fonctions implicites. *Soient: X un espace topologique, Y et Z des espaces de Banach, W un voisinage du point (x_0, y_0) dans $X \times Y$, Ψ une application de W dans Z et $\Psi(x_0, y_0) = z_0$.*

Si:

1) *l'application $x \mapsto \Psi(x, y_0)$ est continue au point x_0;*

2) *il existe un opérateur linéaire continu $\Lambda: Y \to Z$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre $\delta > 0$ et un voisinage Ξ du point x_0 possédant la propriété suivante: la condition $x \in \Xi$ et les inégalités $\| y' - y_0 \| < \delta$, $\| y'' - y_0 \| < \delta$ impliquent l'inégalité*

$$\| \Psi(x, y') - \Psi(x, y'') - \Lambda(y' - y'') \| < \varepsilon \| y' - y'' \|;$$

3) $$\Lambda Y = Z;$$

alors il existe un nombre $K > 0$, un voisinage $\mathcal{U}$ du point (x_0, z_0) dans $X \times Z$ et une application $\varphi: \mathcal{U} \to Y$ tels que

a) $\Psi(x, \varphi(x, z)) = z$;

b) $\| \varphi(x, z) - y_0 \| \leqslant K \| \Psi(x, y_0) - z \|$.

2.3.2. Modification du principe des applications contractantes.

L e m m e. *Soient T un espace topologique, Y un espace de Banach, V un voisinage du point (t_0, y_0) dans $T \times Y$, Φ une application de V dans Y. S'il existe un voisinage U du point t_0 dans T, un nombre $\beta > 0$ et un nombre θ, $0 < \theta < 1$, tels que $t \in U$ et $\| y - y_0 \| < \beta$ impliquent*

a) $$(t, \Phi(t, y)) \in V;$$

b) $$\| \Phi(t, \Phi(t, y)) - \Phi(t, y) \| \leqslant \theta \| \Phi(t, y) - y \|;$$

c) $$\| \Phi(t, y_0) - y_0 \| < \beta(1 - \theta),$$

alors la suite $\{y_n(t) \mid n \geqslant 0\}$, définie par récurrence de la manière suivante

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = \Phi(t, y_{n-1}(t)),$$

pour tout $t \in U$, est contenue dans la boule

$$\mathring{B}(y_0, \beta) = \{y \mid \| y - y_0 \| < \beta\}$$

et converge uniformément pour $t \in U$ vers l'application $t \mapsto \varphi(t)$ et l'on a

$$\| \varphi(t) - y_0 \| \leqslant \frac{\| \Phi(t, y_0) - y_0 \|}{1 - \theta}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous démontrerons le lemme par récurrence. Soit t un élément de U. Désignons par Γ_n l'assertion: « L'élément $y_k(t)$ est défini pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et appartient à $\mathring{B}(y_0, \beta)$ ». Puisque $y_0(t) = y_0 \in \mathring{B}(y_0, \beta)$, l'assertion Γ_0 est vérifiée. Supposons

que Γ_n est démontrée. Alors, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons

$$\| y_{k+1}(t) - y_k(t) \| \overset{\text{def}}{=} \| \Phi(t, y_k(t)) - \Phi(t, y_{k-1}(t)) \| \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \| \Phi(t, \Phi(t, y_{k-1}(t)) - \Phi(t, y_{k-1}(t)) \| \leqslant$$
$$\leqslant \theta \| \Phi(t, y_{k-1}(t)) - y_{k-1}(t) \| \overset{\text{def}}{=} \theta \| y_k(t) - y_{k-1}(t) \|.$$

En continuant ce raisonnement, on obtient

$$\| y_{k+1}(t) - y_k(t) \| \leqslant \theta \| y_k(t) - y_{k-1}(t) \| \leqslant$$
$$\leqslant \theta^2 \| y_{k-1}(t) - y_{k-2}(t) \| \leqslant \ldots \leqslant \theta^k \| y_1(t) - y_0 \| =$$
$$= \theta^k \| \Phi(t, y_0) - y_0 \|.$$

Supposons maintenant que $k \geqslant 1$, $k + l \leqslant n + 1$; alors, d'après l'inégalité du triangle,

$$\| y_{k+l}(t) - y_k(t) \| =$$
$$= \| y_{k+l}(t) - y_{k+l-1}(t) + y_{k+l-1}(t) - \ldots + y_{k+1}(t) - y_k(t) \| \leqslant$$
$$\leqslant (\theta^{k+l-1} + \ldots + \theta^k) \| \Phi(t, y_0) - y_0 \| <$$
$$< \left(\sum_{s=k}^{\infty} \theta^s \right) \| \Phi(t, y_0) - y_0 \| = \frac{\theta^k}{1-\theta} \| \Phi(t, y_0) - y_0 \| < \theta^k \beta. \quad (1)$$

En particulier, si l'on pose $k + l = n + 1$, $k = 1$, dans (1) et l'on se sert de la condition c), on obtient

$$\| y_{n+1}(t) - y_0 \| = \| y_{n+1}(t) - y_1(t) + y_1(t) - y_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \| y_{n+1}(t) - y_1(t) \| + \| y_1(t) - y_0 \| < \theta\beta + \beta(1 - \theta) = \beta.$$

Par conséquent, Γ_{n+1} est vérifiée, d'où l'on obtient par récurrence que cette assertion est valable pour tous les n. Mais alors (1) implique

$$\| y_{k+l}(t) - y_k(t) \| \leqslant \frac{\theta^k}{1-\theta} \| \Phi(t, y_0) - y_0 \|, \quad \forall l, \quad k \geqslant 1. \quad (2)$$

Il découle de (2) que la suite $\{y_k(t) \mid k \geqslant 0\}$ est fondamentale et, Y étant complet, converge à un certain élément que nous désignerons par $\varphi(t)$. Si l'on passe à la limite pour $l \to \infty$ dans (2), on obtient

$$\| \varphi(t) - y_k(t) \| \leqslant \frac{\theta^k}{1-\theta} \| \Phi(t, y_0) - y_0 \| < \theta^k \beta. \quad (3)$$

Il découle de (3) que l'application $t \mapsto y_k(t)$, $t \in U$, converge uniformément vers l'application $t \mapsto \varphi(t)$. Enfin, si l'on pose $k = 1$ dans (3), on obtient

$$\| \varphi(t) - y_0 \| = \| \varphi(t) - y_1(t) + y_1(t) - y_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\theta}{1-\theta} \| \Phi(t, y_0) - y_0 \| + \| \Phi(t, y_0) - y_0 \| = \frac{\| \Phi(t, y_0) - y_0 \|}{1-\theta}.$$

2.3.3. Démonstration du théorème. La démonstration du théorème énoncé dans 2.3.1 se décompose en plusieurs parties.

A) Par hypothèse, Λ est un épimorphisme de Y dans Z. Par conséquent, d'après le lemme sur l'application inverse à droite (voir 2.1.5), il existe une application $M: Z \to Y$ telle que

$$(\Lambda \circ M)(z) = z, \tag{1}$$

$$\| M(z) \| \leqslant C \| z \| \tag{2}$$

pour un certain $C > 0$. Posons $T = X \times Z$ et vérifions si les hypothèses du lemme de 2.3.2 sont remplies pour l'application

$$\Phi(t, y) = \Phi(x, z, y) = y + M(z - \Psi(x, y)).$$

B) Choisissons θ, $0 < \theta < 1$ et $\varepsilon = \theta/C$, où C est la constante de (2), et trouvons un voisinage Ξ_1 du point x_0 et un nombre $\beta_0 > 0$ tels que les inégalités $\| y' - y_0 \| < \beta_0$, $\| y'' - y_0 \| < \beta_0$ impliquent (conformément à la condition 2) du théorème) l'inégalité (pour $x \in \Xi_1$)

$$\| \Psi(x, y') - \Psi(x, y'') - \Lambda(y' - y'') \| < \varepsilon \| y' - y'' \|. \tag{3}$$

Désignons $V = \Xi_1 \times Z \times \mathring{B}(y_0, \beta_0)$.

C) Soit $\beta = \beta_0/(C \| \Lambda \| + 2)$. En nous servant de la continuité de la fonction $(x, z) \mapsto \Psi(x, y_0) - z$ au point (x_0, z_0) (voir la condition 1) du théorème), choisissons un voisinage $\Xi_2 \subset \Xi_1$ du point x_0 et un nombre $\gamma > 0$ tels que l'inclusion

$$(x, z) \in \mathcal{U} = \Xi_2 \times \mathring{B}(z_0, \gamma)$$

implique l'inégalité

$$\| \Psi(x, y_0) - z \| < \beta (1 - \theta)/C. \tag{4}$$

D) Si $(x, z) \in \mathcal{U}$ et $y \in \mathring{B}(y_0, \beta)$, on a

$$\| \Phi(x, z, y) - y_0 \| \overset{\text{def}}{=} \| y - y_0 + M(z - \Psi(x, y)) \| \overset{(2)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \| y - y_0 \| + C \| z - \Psi(x, y) \| \leqslant \| y - y_0 \| +$$
$$+ C \{ \|z - \Psi(x, y_0) - \Psi(x, y) + \Psi(x, y_0) + \Lambda(y - y_0) -$$
$$- \Lambda(y - y_0) \| \} \leqslant \| y - y_0 \| + C \{ \| z - \Psi(x, y_0) \| +$$
$$+ \| \Psi(x, y) - \Psi(x, y_0) - \Lambda(y - y_0) \| + \| \Lambda(y - y_0) \| \} \overset{(3)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \| y - y_0 \| + C \{ \| z - \Psi(x, y_0) \| + \varepsilon \| y - y_0 \| + \|\Lambda\| \| y - y_0 \| \} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \theta + C \| \Lambda \|) \| y - y_0 \| + C \| z - \Psi(x, y_0) \| \tag{5}$$

(car $\varepsilon C = \theta$!).

Il découle de (5), en vertu de (4), que, premièrement,

$$\| \Phi(x, z, y) - y_0 \| <$$
$$< (1 + \theta + C \| \Lambda \|) \beta + C \frac{\beta(1-\theta)}{C} = (2 + C \| \Lambda \|) \beta = \beta_0. \tag{5'}$$

Ainsi, on a la condition a) du lemme de 2.3.2: $(x, z, \Phi(x, z, y)) \in V$. Deuxièmement, pour $y = y_0$, on obtient

$$\| \Phi(x, z, y_0) - y_0 \| \leqslant C \| z - \Psi(x, y_0) \| \overset{(4)}{<} C \frac{\beta(1-\theta)}{C} = \beta(1-\theta). \tag{5''}$$

Ainsi, on a la condition c) du lemme de 2.3.2.

E) Si l'on a à nouveau $(x, z) \in \mathcal{U}$, $y \in \overset{\circ}{B}(y_0, \beta)$, alors

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, \Phi(x, z, y)) - \Phi(x, z, y) &\overset{\text{def}}{=} \\ = \Phi(x, z, y) + M(z - \Psi(x, \Phi(x, z, y))) - \Phi(x, z, y) &= \\ = M(z - \Psi(x, \Phi(x, z, y))).\end{aligned} \tag{6}$$

En se servant de (1), on obtient

$$\Lambda\Phi(x, z, y) = \Lambda y + \Lambda M(z - \Psi(x, y)) = \Lambda y + z - \Psi(x, y),$$

d'où

$$z = \Psi(x, y) + \Lambda(\Phi(x, z, y) - y). \tag{7}$$

En substituant (7) dans (6) et en se servant de la relation $\Phi(x, z, y) \in \overset{\circ}{B}(y_0, \beta_0)$, valable en vertu de (5'), on a

$$\begin{aligned}&\| \Phi(x, z, \Phi(x, z, y)) - \Phi(x, z, y) \| \overset{(6)}{=} \\ &= \| M(z - \Psi(x, \Phi(x, z, y))) \| \overset{(2)}{\leqslant} C \| z - \Psi(x, \Phi(x, z, y)) \| \overset{(7)}{=} \\ &= C \| \Psi(x, \Phi(x, z, y)) - \Psi(x, y) - \Lambda(\Phi(x, z, y) - y) \| \overset{(3)}{\leqslant} \\ &\leqslant C\varepsilon \| y - \Phi(x, z, y) \| = \theta \| y - \Phi(x, z, y) \|.\end{aligned} \tag{8}$$

Ainsi la condition b) du lemme de 2.3.2 est remplie.

F) Comparons à nouveau le lemme de 2.3.2 et nos constructions. A l'espace topologique T du lemme correspond dans notre cas le produit $X \times Z$, au point t_0, le point (x_0, z_0), au voisinage U du point t_0, le voisinage $\mathcal{U}$ du point (x_0, z_0) ; au voisinage V du lemme correspond le voisinage V construit dans B), à l'application $(t, y) \mapsto \Phi(t, y)$ correspond dans notre cas l'application $(x, z, y) \mapsto \Phi(x, z, y)$, au nombre β du lemme correspond le nombre β construit dans C).

Alors la relation (5') signifie que l'on a l'hypothèse a) du lemme, la relation (5''), que l'on a l'hypothèse c) et enfin la relation (8) signifie que l'on a l'hypothèse b). Ainsi le lemme peut être appliqué.

G) D'après le lemme, la suite $\{y_n(x, z) \mid n \geqslant 0\}$, $(x, z) \in \mathcal{U}$, définie par les relations récurrentes

$$y_0(x, z) = y_0, \quad y_{n+1}(x, z) = \Phi(x, z, y_n(x, z)),$$

est contenue pour tous les $n \geqslant 0$ dans la boule $\overset{\circ}{B}(y_0, \beta)$ et converge uniformément vers la fonction $\varphi(x, z)$, de plus

$$\|\varphi(x, z) - y_0\| \leqslant \|\Phi(x, z, y_0) - y_0\|/(1-\theta) \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \|M(z - \Psi(x, y_0))\|/(1-\theta) \overset{(2)}{\leqslant} \frac{C}{1-\theta}\|z - \Psi(x, y_0)\|,$$

de sorte qu'on a l'assertion b) du théorème pour $K = C/(1-\theta)$.

H) $\|\Psi(x, \varphi(x, z)) - z\| \leqslant$

$$\leqslant \|\Psi(x, \varphi(x, z)) - \Psi(x, y_n(x, z))\| + \|\Psi(x, y_n(x, z)) - z\| \overset{(1)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \|\Psi(x, \varphi(x, z)) - \Psi(x, y_n(x, z)) - \Lambda(\varphi(x, z) - y_n(x, z))\| +$$
$$+ \|\Lambda(\varphi(x, z) - y_n(x, z)\| + \|\Lambda M(z - \Psi(x, y_n(x, z)))\| \overset{(3),\,(2)}{<}$$
$$< \varepsilon\|\varphi(x, z) - y_n(x, z))\| + \|\Lambda\|\,\|\varphi(x, z) - y_n(x, z)\| +$$
$$+ \|\Lambda\|\,\|y_{n+1}(x, z) - y_n(x, z)\| \to 0$$

pour $n \to \infty$. Par conséquent, $\Psi(x, \varphi(x, z)) = z$. ■

2.3.4. Théorèmes classiques des fonctions implicites et des applications inverses. Du théorème général démontré ci-dessus, on peut déduire deux théorèmes classiques qui sont souvent employés dans diverses branches des mathématiques où l'on applique l'analyse, par exemple, en géométrie différentielle. En comparaison de 2.3.1, nous renforcerons en deux directions les conditions imposées à la fonction Ψ. Premièrement, nous la supposerons maintenant continûment différentiable et deuxièmement — ce qui est le plus important — l'opérateur Λ qui apparaît dans l'énoncé du théorème de 2.3.1 sera supposé inversible. Tout ceci nous garantit la différentiabilité et l'unicité de la fonction implicite.

A) Théorème classique des fonctions implicites. *Soient X, Y, Z des espaces de Banach, W un voisinage dans $X \times Y$, $\Psi: W \to Z$ une application de classe $C^1(W)$. Si:*

1) $\Psi(x_0, y_0) = 0$;

2) *il existe un opérateur inverse* $[\Psi_y(x_0, y_0)]^{-1} \in \mathscr{L}(Z, Y)$,

alors il existe des nombres $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et une application $\varphi: \overset{\circ}{B}(x_0, \delta) \to Y$ de classe $C^1(\overset{\circ}{B}(x_0, \delta))$ tels que

a) $$\varphi(x_0) = y_0; \qquad (2)$$

b) $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(x) - y_0\| < \varepsilon$ *et* $\Psi(x, \varphi(x)) \equiv 0$;

c) *dans le « rectangle » $\overset{\circ}{B}(x_0, \delta) \times \overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon)$ l'égalité $\Psi(x, y) = 0$ n'est possible que si $y = \varphi(x)$;*

d) $$\varphi'(x) = -[\Psi_y(x, \varphi(x))]^{-1}\Psi_x(x, \varphi(x)). \qquad (3)$$

D é m o n s t r a t i o n. Il découle de la différentiabilité continue de Ψ dans W que l'on a les hypothèses 1) et 2) du théorème d'existence des fonctions implicites de 2.3.1 (pour vérifier 2), il faut poser $\Lambda = \Psi_y(x_0, y_0)$ et se servir du théorème de la moyenne). La condition (3) est vérifiée puisque $\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)$ existe. Par conséquent, d'après ce théorème, on peut trouver un nombre $K > 0$, un voisinage $U \ni x_0$ et une application $\varphi: U \to Y$ tels que

$$\Psi(x, \varphi(x)) \equiv 0, \tag{4}$$

$$\| \varphi(x) - y_0 \| \leqslant K \| \Psi(x, y_0) \|. \tag{5}$$

En posant $x = x_0$ dans (5) et en se servant de (1), on obtient (2), tandis que (4) donne la deuxième moitié de l'assertion b).

B) L'application Ψ appartient à $C^1(W)$; elle est donc strictement différentiable au point (x_0, y_0) (corollaire 2 de 2.2.3). Par conséquent, pour tout $\varkappa > 0$, il existe un $\varepsilon(\varkappa) > 0$ tel que

$$\| x_i - x_0 \| < \varepsilon(\varkappa), \quad \| y_i - y_0 \| < \varepsilon(\varkappa), \quad i = 1, 2, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \| \Psi(x_1, y_1) - \Psi(x_2, y_2) - \Psi_x(x_0, y_0)(x_1 - x_2) -$$
$$-\Psi_y(x_0, y_0)(y_1 - y_2) \| \leqslant \varkappa \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\}. \tag{6}$$

Posons d'abord $\varkappa_0 = 1/2 \, \| \Psi_y^{-1}(x_0, y_0) \|^{-1}$ et trouvons le $\varepsilon = \varepsilon(\varkappa_0)$ correspondant. Puisque $\Psi(x, y)$ est continue et $\Psi(x_0, y_0) = 0$, il existe un δ, $0 < \delta < \varepsilon$, tel que

$$\mathring{B}(x_0, \delta) = \{x \mid \| x - x_0 \| < \delta\} \subset U \text{ et}$$

$$\| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| \Psi(x, y_0) \| < \frac{\varepsilon}{K} \overset{(5)}{\Rightarrow} \| \varphi(x) - y_0 \| < \varepsilon, \tag{7}$$

par conséquent, on a la première moitié de l'assertion b).

Supposons maintenant que $\Psi(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ au point $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathring{B}(x_0, \delta) \times \mathring{B}(y_0, \varepsilon)$. En appliquant (6) avec la valeur de $\varkappa_0$ indiquée ci-dessus ($x_1 = x_2 = \hat{x}$, $y_1 = \hat{y}$, $y_2 = \varphi(\hat{x})$), on obtient

$$\| \hat{y} - \varphi(\hat{x}) \| = \| \Psi_y^{-1}(x_0, y_0) \Psi_y(x_0, y_0)(\hat{y} - \varphi(\hat{x})) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \Psi_y^{-1}(x_0, y_0) \| \, \| \Psi(\hat{x}, \hat{y}) - \Psi(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - \Psi_y(x_0, y_0)(\hat{y} - \varphi(\hat{x})) \| \overset{(6)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \| \Psi_y(x_0, y_0)^{-1} \| \varkappa_0 \| \hat{y} - \varphi(\hat{x}) \| = \frac{1}{2} \| \hat{y} - \varphi(\hat{x}) \|,$$

ce qui est possible seulement pour $\hat{y} = \varphi(\hat{x})$, i.e. l'assertion c) est vérifiée.

C) Pour les mêmes $\varkappa_0$, ε, δ, posons $x_1 = x$, $x_2 = x_0$, $y_1 = y_2 = y_0$ dans (6), alors

$$\| x - x_0 \| < \delta \overset{(6)}{\Rightarrow} \| \Psi(x, y_0) - \Psi(x_0, y_0) - \Psi_x(x_0, y_0)(x - x_0) \| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa_0 \| x - x_0 \| \Rightarrow \| \Psi(x, y_0) \| \leqslant (\| \Psi_x(x_0, y_0) \| + \varkappa_0) \| x - x_0 \| \overset{(5)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \| \varphi(x) - y_0 \| \leqslant K(\| \Psi_x(x_0, y_0) \| + \varkappa_0) \| x - x_0 \|. \tag{8}$$

Choisissons maintenant $\varkappa_1 > 0$ de manière arbitraire et appliquons (6) à

$$x_1 = x, \quad x_2 = x_0, \quad y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = y_0.$$

Pour

$$\delta_1 = \min\left\{\varepsilon(\varkappa_1), \quad \frac{\varepsilon(\varkappa_1)}{K(\|\Psi_x(x_0, y_0)\| + \varkappa_0)}\right\}$$

on a

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\Psi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi(x) - y_0\| =$$
$$= \|\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\{\Psi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \Psi_y(x_0, y_0)(\varphi(x) - y_0)\}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\| \, \|\Psi(x, \varphi(x)) - \Psi(x_0, y_0) -$$
$$- \Psi_x(x_0, y_0)(x - x_0) - \Psi_y(x_0, y_0)(\varphi(x) - y_0)\| \overset{(6)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \|\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\| \varkappa_1 \max\{\|x - x_0\|, \|\varphi(x) - y_0\|\} \overset{(8)}{\leqslant} C\varkappa_1 \|x - x_0\|, \text{ où}$$

$$C = \|\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\| \max\{1, K(\|\Psi_x(x_0, y_0)\| + \varkappa_0)\}.$$

Puisque $\varkappa_1$ est choisi arbitrairement, l'inégalité démontrée montre que pour $x \to x_0$ on a

$$\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\Psi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi(x) - y_0 = o(x - x_0)$$

ou bien

$$\varphi(x) = y_0 + [-\Psi_y^{-1}(x_0, y_0)\Psi_x(x_0, y_0)](x - x_0) + o(x - x_0),$$

par conséquent, la dérivée de Fréchet $\varphi'(x_0)$ existe, l'égalité (3) ayant lieu pour $x = x_0$.

Pour démontrer la différentiabilité de φ pour les autres valeurs de x, rappelons que l'ensemble des opérateurs Λ pour lesquels un opérateur inverse existe est ouvert dans $\mathscr{L}(X, Y)$ (proposition 3 de 2.2.1). Par conséquent, en prenant, s'il le faut, δ plus petit, on peut supposer que $\Psi_y^{-1}(x, \varphi(x))$ existe lorsque $\|x - x_0\| < \delta$.

Nous pouvons maintenant répéter toute la démonstration en remplaçant le point (x_0, y_0) par le point $(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))$, où $\|\hat{x} - x_0\| < \delta$. En vertu de l'unicité déjà démontrée, nous obtiendrons la même fonction $\varphi(x)$ (à condition que $\|x - \hat{x}\|$ soit suffisamment petit) et, pour cette fonction, la formule (3) sera valable si $x = \hat{x}$. Puisque $\hat{x}$ était arbitraire, l'assertion d) est vérifiée pour tous les $x \in \overset{\circ}{B}(x_0, \delta)$.

Enfin, la dérivée $\varphi'(x)$ est continue puisque, en vertu de (3), elle se représente sous forme de composée d'applications continues

$$x \mapsto (x, \varphi(x)), \quad (x, y) \mapsto \Psi_x(x, y), \quad (x, y) \mapsto \Psi_y(x, y), \; A \mapsto A^{-1}.$$

(La dernière est continue, puisqu'elle est différentiable selon Fréchet d'après la proposition 3 de 2.2.1.) ■

R e m a r q u e. Si, en plus des hypothèses du théorème, on a

$$\Psi \in C^r(W), \quad r \geqslant 2, \quad \text{alors } \varphi \in C^r(\mathring{B}(x_0, \delta)).$$

En effet, il découle de la formule (3) et du théorème de superposition que la dérivée seconde

$$\varphi''(x) = -\{\Psi_y(x, \varphi(x))^{-1} \circ \Psi_x(x, \varphi(x))\}'$$

existe et est continue. Ensuite on raisonne par récurrence.

T h é o r è m e s u r l ' a p p l i c a t i o n i n v e r s e. *Soient Y et Z des espaces de Banach, W un voisinage du point y_0 dans Y, $\Psi: W \to Z$ une application de classe $C^1(W)$ et $z_0 = \Psi(y_0)$.*

Si l'opérateur inverse $\Psi'(y_0)^{-1} \in \mathscr{L}(Z, Y)$ existe, alors:

a) *on peut trouver un $\varepsilon > 0$, tel que $\mathring{B}(y_0, \varepsilon) \subset W$ et $V = \{z \mid z = \Psi(y), \ \| y - y_0 \| < \varepsilon\} = \Psi(\mathring{B}(y_0, \varepsilon))$ est un voisinage de z_0 dans Z;*

b) *on peut trouver une application $\Phi: V \to Y$ de classe $C^1(V)$ inverse à $\Psi \mid \mathring{B}(y_0, \varepsilon)$, i.e. telle que*

$$y = \Phi(z) \Longleftrightarrow z = \Psi(y), \quad (y, z) \in \mathring{B}(y_0, \varepsilon) \times V; \tag{9}$$

c)
$$\Phi'(z) = [\Psi'(\Phi(z))]^{-1}. \tag{10}$$

D é m o n s t r a t i o n. A) L'application $\Psi \in C^1(W)$ est strictement différentiable en chaque point de W, en particulier au point y_0. Par conséquent, pour chaque $\varkappa > 0$, on peut trouver un $\varepsilon(\varkappa) > 0$ tel que

$$\| y_i - y_0 \| < \varepsilon(\varkappa), \quad i = 1, 2, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \| \Psi(y_1) - \Psi(y_2) - \Psi'(y_0)(y_1 - y_2) \| \leqslant \varkappa \| y_1 - y_2 \|. \tag{11}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ de sorte que pour tous les $y \in \mathring{B}(y_0, \varepsilon)$ il existe un opérateur inverse $\Psi'(y)^{-1}$ (voir proposition 3 de 2.2.1) et que l'on ait $\varepsilon < \varepsilon(\varkappa_0)$, où $\varkappa_0 = 1/2 \, \| \Psi'(y_0)^{-1} \|^{-1}$.

La dernière relation garantit l'injectivité de l'application Ψ sur $\mathring{B}(y_0, \varepsilon)$:

$$y_1, y_2 \in \mathring{B}(y_0, \varepsilon), \ \Psi(y_1) = \Psi(y_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \| y_1 - y_2 \| = \| \Psi'(y_0)^{-1} \Psi'(y_0)(y_1 - y_2) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \Psi'(y_0)^{-1} \| \| \Psi(y_1) - \Psi(y_2) - \Psi'(y_0)(y_1 - y_2) \| \overset{(11)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \| \Psi'(y_0)^{-1} \| \frac{1}{2 \| \Psi'(y_0)^{-1} \|} \| y_1 - y_2 \| = \frac{1}{2} \| y_1 - y_2 \| \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Nous montrerons ensuite que la boule $\mathring{B}(y_0, \varepsilon)$ est celle dont il s'agit dans la condition a) du théorème, mais pour le moment, posons

$V = \Psi(\overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon))$. L'application $\Psi \mid \overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon)$ étant injective, est inversible, de sorte qu'une application $\Phi: V \to \overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon)$ possédant la propriété (9) existe.

B) Pour tout point $\hat{y} \in \overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon)$ appliquons le théorème de 2.3.1 à l'application $\Psi(y)$ (qui ne dépend pas de x, de sorte que l'espace X peut être arbitraire) dans un voisinage du point $\hat{y}$. La condition 1) de ce théorème est triviale ici ; la condition 2) se transforme en celle de différentiabilité stricte au point $\hat{y}$ et, comme nous l'avons remarqué, elle est vérifiée, et l'on a $\Lambda = \Psi'(\hat{y})$; la condition 3) est remplie puisque $\hat{y} \in \overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon)$ et, conformément au choix de ε, $\Psi'(\hat{y})^{-1}$ existe.

D'après le théorème de 2.3.1, il existe un voisinage U du point $\hat{z} = \Psi(\hat{y})$ et une application $\varphi: U \to Y$ tels que

$$\Psi(\varphi(z)) \equiv z, \tag{12}$$

$$\| \varphi(z) - \hat{y} \| \leqslant K \| z - \hat{z} \| \tag{13}$$

pour un certain $K > 0$. Choisissons $\delta > 0$ si petit que $\overset{\circ}{B}(\hat{z}, \delta) \subset \subset U$ et $\delta < (\varepsilon - \| y_0 - \hat{y} \|)/K$. Alors

$$\| z - \hat{z} \| < \delta \overset{(13)}{\Rightarrow} \| \varphi(z) - \hat{y} \| < K \left(\frac{\varepsilon - \| y_0 - \hat{y} \|}{K} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \varphi(z) - y_0 \| < \varepsilon \Rightarrow z = \Psi(\varphi(z)) \in \Psi(\overset{\circ}{B}(y_0, \varepsilon)) =$$

$$= V \Rightarrow \overset{\circ}{B}(\hat{z}, \delta) \subset V.$$

Ainsi chaque point $\hat{z} \in V$ possède un voisinage $\overset{\circ}{B}(\hat{z}, \delta) \subset V$, de sorte que V est ouvert. En outre, pour $z \in \overset{\circ}{B}(z_0, \delta)$, on a

$$\Psi(\varphi(z)) \overset{(12)}{=} z = \Psi(\Phi(z)) \Rightarrow \varphi(z) = \Phi(z) \tag{14}$$

d'après l'injectivité de Ψ.

C) Démontrons maintenant la différentiabilité de Φ et la formule (10). En vertu de la différentiabilité stricte de Ψ au point $\hat{y} = \Phi(\hat{z})$ on a une assertion analogue à (11) : pour tout $\varkappa > 0$ il existe un $\varepsilon(\varkappa) > 0$ tel que

$$\| y_i - \hat{y} \| < \varepsilon(\varkappa), \quad i = 1, 2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \Psi(y_1) - \Psi(y_2) - \Psi'(\hat{y})(y_1 - y_2) \| \leqslant \varkappa \| y_1 - y_2 \|. \tag{15}$$

En posant ici $y_1=\Phi(z)$, $y_2=\hat{y}=\Phi(\hat{z})$, on obtient

$$\|z-\hat{z}\|<\frac{\varepsilon(\varkappa)}{K}\overset{(13)(14)}{\Rightarrow}\|\Phi(z)-\hat{y}\|<\varepsilon(\varkappa)\overset{(15)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\|\Psi(\Phi(z))-\Psi(\Phi(\hat{z}))-\Psi'(\hat{y})(\Phi(z)-\Phi(\hat{z})\|\leqslant$$

$$\leqslant\varkappa\|\Phi(z)-\hat{y}\|\overset{(13)}{\leqslant}\varkappa K\|z-\hat{z}\|\overset{(12)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\|z-\hat{z}-\Psi'(\hat{y})(\Phi(z)-\Phi(\hat{z}))\|\leqslant\varkappa K\|z-\hat{z}\|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|\Phi(z)-\Phi(\hat{z})-\Psi(\hat{y})^{-1}(z-\hat{z})\|=$$

$$=\|\Psi'(\hat{y})^{-1}(z-\hat{z}-\Psi'(\hat{y})(\Phi(z)-\Phi(\hat{z})))\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\Psi'(\hat{y})^{-1}\|\varkappa K\|z-\hat{z}\|,$$

et donc

$$\Phi(z)-\Phi(\hat{z})-\Psi'(\hat{y})^{-1}(z-\hat{z})=o(z-\hat{z})$$

pour $z\to\hat{z}$, car $\varkappa$ est arbitraire. Par conséquent, la dérivée de Fréchet $\Phi'(\hat{z})=\Psi'(\hat{y})^{-1}$ existe et (10) est démontrée. La dérivée $\Phi'(z)$ est continue sur V puisque, en vertu de (10), elle se représente comme la composée des applications continues $z\mapsto\Phi(z)$, $y\mapsto\Psi'(y)$ et $A\mapsto A^{-1}$ (la dernière est continue d'après la proposition 3 de 2.2.1).

2.3.5. Espace tangent et théorème de Lusternik. Dans ce sous-paragraphe, X est un espace normé, M un sous-ensemble de X.

D é f i n i t i o n. L'élément $h\in X$ est appelé *vecteur tangent à M au point $x_0\in M$*, s'il existe un nombre $\varepsilon>0$ et une application $r:[-\varepsilon,\ \varepsilon]\to X$ tels que

a) $x_0+\alpha h+r(\alpha)\in M$,

b) $r(\alpha)=o(\alpha)$ pour $\alpha\to 0$.

L'élément $h\in X$ est appelé *vecteur tangent unilatère à M au point* $x_0\in M$, s'il existe un $\varepsilon>0$ et une application $r:(0,\ \varepsilon)\to X$ tels que a) est vérifiée tandis que b) a lieu pour $\alpha\downarrow 0$.

L'ensemble de tous les vecteurs tangents à M au point x_0 est désigné par $T_{x_0}M$, l'ensemble des vecteurs tangents unilatères par $T^+_{x_0}M$. Il est évident que $T_{x_0}M\subset T^+_{x_0}M$ et que $T_{x_0}M=T^+_{x_0}M\cap\cap(-T^+_{x_0}M)$. Si l'ensemble $T_{x_0}M$ est un sous-espace de X, alors on l'appelle *espace tangent à M au point x_0*.

R e m a r q u e. En géométrie, on appelle généralement droite tangente, plan tangent, etc., non pas $T_{x_0}M$, mais la variété affine $x_0+T_{x_0}M$ (voir figure 33).

E x e m p l e s (les détails des démonstrations sont laissés au lecteur).

1) $X = \mathbf{R}^2$, $M = \{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (fig. 34); $T^+_{(0,0)}M = M$, $T_{(0,0)}M = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$, $T_{(1,0)}M = T^+_{(1,0)}M = \mathbf{R}^2$.

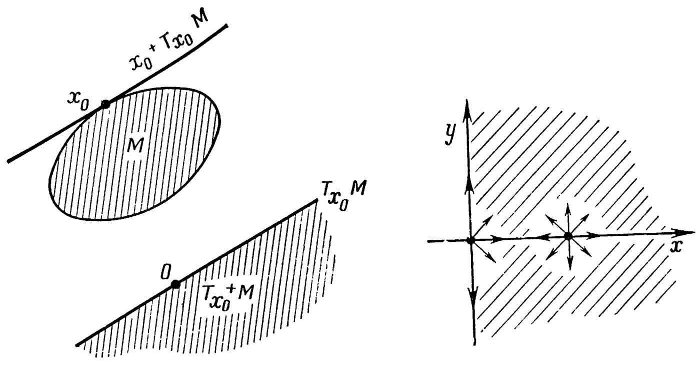


Fig. 33 Fig. 34

2) $X = \mathbf{R}^2$, $M = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} = \mathbf{R}^2_+$ (fig. 35);
$T_{(1,0)}M = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $T_{(0,0)}M = \{0\}$, $T_{(0,1)}M = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$, $T^+_{(1,0)}M = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R},\ b \geqslant 0\}$, $T^+_{(0,0)}M = M$, $T^+_{(0,1)}M = \{(a, b) \mid a \geqslant 0,\ b \in \mathbf{R}\}$.

3) $X = Y \times \mathbf{R}$, où Y est un espace normé et $M = \{(y, z) \mid z = \| y \| \}$, est un cône (fig. 36)

$$T_{(0,0)}M = \{0\}, \quad T^+_{(0,0)}M = M.$$

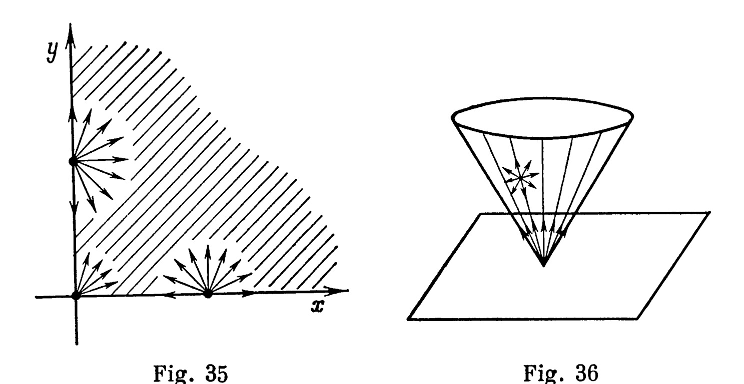


Fig. 35 Fig. 36

Exercices

1. Supposons que Y est un espace de Hilbert (par exemple $Y = \mathbf{R}^2$); trouver $T_{(y, \|y\|)}M$ et $T^+_{(y, \|y\|)}M$ dans l'exemple 3) pour $y \neq 0$ (fig. 36).

2. Trouver T_aM et T^+_aM lorsque

a) $M=\{2^{-n} \mid n=1, 2, \ldots\} \cup \{0\} \subset \mathbf{R}, \quad a=0$;

b) $M=\left\{\frac{1}{n} \middle| n=1, 2, \ldots\right\} \cup \{0\} \subset \mathbf{R}, \quad a=0$;

c) $M=\{(x, y) \mid x^2=y^3\} \subset \mathbf{R}^2, \quad a=(0, 0)$ et $a=(1, 1)$;

d) $M=\{(x, y) \mid x^2 \leqslant y^3\} \subset \mathbf{R}^2, \quad a=(0, 0)$ et $a=(1, 1)$;

e) $M=\{(x, y) \mid x^2 \geqslant y^3\} \subset \mathbf{R}^2, \quad a=(0, 0)$ et $a=(1, 1)$;

f) $M = \{(x, y, z) \mid z = 1$ si x et y sont rationnels, $z = 0$ dans les autres cas$\}$, $a = (0, 0, 1)$.

Dans de nombreux cas, en particulier dans certains qui présentent un intérêt particulier pour la théorie des problèmes d'extrémum, l'ensemble des vecteurs tangents peut être trouvé à l'aide du théorème général suivant.

Théorème de Lusternik. *Soient X, Z des espaces de Banach, U un voisinage du point x_0 dans X, $F: U \to Z$, $F(x_0) = 0$.*

Si F est strictement différentiable au point x_0 et $F'(x_0)$ est un épimorphisme, alors l'ensemble $M = \{x \mid F(x) = 0\}$ possède au point x_0 un espace tangent

$$T_{x_0}M = T^+_{x_0}M = \operatorname{Ker} F'(x_0).$$

Démonstration. A) Soit $h \in T^+_{x_0}M$. Alors, si $r(\cdot)$ est l'application qui figure dans la définition du vecteur tangent unilatère, on a, en vertu de la différentiabilité stricte,

$$0 = F(x_0 + \alpha h + r(\alpha)) = F(x_0) + \alpha F'(x_0)h + o(\alpha) = \\ = \alpha F'(x_0)h + o(\alpha).$$

Donc $F'(x_0)h = 0$, et $T^+_{x_0}M \subset \operatorname{Ker} F'(x_0)$.

B) Appliquons le théorème de 2.3.1 à l'application $\Psi(x, y) = F(x + y)$. D'après la différentiabilité stricte de F, l'application $x \mapsto \Psi(x, 0)$ est continue au point x_0 et

$$\| \Psi(x, y') - \Psi(x, y'') - F'(x_0)(y' - y'') \| \leqslant \varepsilon \| y' - y'' \|,$$

lorsque $\| x - x_0 \| < \delta$, $\| y' \| < \delta$, $\| y'' \| < \delta$. La condition 3) du théorème de 2.3.1 est également remplie, car $F'(x_0)$ applique X sur Z. Conformément à ce théorème, il existe une application $\varphi: U \to X$ du voisinage $U \subset X$ du point x_0 telle que

$$\Psi(x, \varphi(x)) \equiv 0 \Leftrightarrow F(x + \varphi(x)) \equiv 0,$$
$$\| \varphi(x) \| \leqslant K \| \Psi(x, 0) \| = K \| F(x) \|.$$

Il ne reste qu'à poser $r(\alpha) = \varphi(x_0 + \alpha h)$. Alors

$$F(x_0 + \alpha h + r(\alpha)) = F(x_0 + \alpha h + \varphi(x_0 + \alpha h)) = 0,$$
$$\| r(\alpha) \| = \| \varphi(x_0 + \alpha h) \| \leqslant K \| F(x_0 + \alpha h) \| = \\ = K \| F(x_0 + \alpha h) - F(x_0) \| = K \| F'(x_0)\alpha h + o(\|\alpha h\|) \| = \\ = K \| \alpha F'(x_0)h + o(\alpha) \|,$$

et si $h \in \operatorname{Ker} F'(x_0)$, alors $\| r(\alpha) \| = o(\alpha)$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker} F'(x_0) \subset T_{x_0}M \subset T^+_{x_0} M. \quad \blacksquare$$

Au niveau de l'intuition géométrique, le théorème de Lusternik est particulièrement transparent. En laissant de côté la rigueur, on peut définir l'espace L tangent à l'ensemble M au point x_0 en disant « qu'aux infiniment petits d'ordre supérieur près », M peut être approximé par la variété affine $x_0 + L$. Mais dans un « voisinage infiniment petit » du point x_0 la fonction F peut être approximée par sa partie linéaire

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

(le point x_0 appartient à M et donc $F(x_0) = 0$), tandis que l'ensemble $M = \{x \mid F(x) = 0\}$ peut être approximé par l'ensemble

$$\tilde{M} = \{x \mid F'(x_0)(x - x_0) = 0\} = \operatorname{Ker} F'(x_0) + x_0.$$

Ainsi, « aux infiniment petits d'ordre supérieur près », M coïncide avec la variété affine $\tilde{M} = x_0 + \operatorname{Ker} F'(x_0)$, par conséquent, $\operatorname{Ker} F'(x_0)$ est l'espace tangent.

§ 2.4. Différentiabilité de certaines applications concrètes

2.4.1. Opérateur de Nemytski et opérateur de relation différentiable. Soit U un ensemble ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$; supposons que la fonction $f(t, x) : U \to \mathbf{R}^m$ et sa dérivée partielle $f_x(t, x)$ sont continues dans U. A l'aide de l'égalité

$$\mathcal{N}(x(\cdot))(t) \equiv f(t, x(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \qquad (1)$$

définissons l'application $\mathcal{N} : \mathcal{U} \to C([t_0, t_1], \mathbf{R}^m)$ sur l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{x(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \mid (t, x(t)) \in U, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}. \qquad (2)$$

Cette application sera appelée *opérateur de Nemytski.*

E x e r c i c e 1. Montrer que l'ensemble (2) est ouvert dans $C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$.

P r o p o s i t i o n 1. *L'opérateur de Nemytski donné par la relation* (1) *est continûment différentiable sur l'ensemble* (2) *et l'on a*

$$\mathcal{N}'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)](t) = \hat{f}_x(t)\, h(t), \qquad (3)$$

où

$$\hat{f}_x(t) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \hat{x}(t)), \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m, \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix} \right) \qquad (4)$$

est la matrice de Jacobi.

D é m o n s t r a t i o n. Calculons d'abord la première variation selon Lagrange de l'application $\mathcal{N}$. Par définition,

$$\delta\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot); h(\cdot)) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot) + \alpha h(\cdot)) - \mathcal{N}(\hat{x}(\cdot))}{\alpha}.$$

A gauche et à droite nous avons ici des éléments de l'espace $C\ ([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^m)$, i.e. des fonctions de $t \in [t_0,\ t_1]$. Pour t fixe, on a

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot)+\alpha h(\cdot))(t)-\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot))(t)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(t,\ \hat{x}(t)+\alpha h(t))-f(t,\ \hat{x}(t))}{\alpha} =$$

$$= f_x(t,\ \hat{x}(t))\,h(t) = \hat{f}_x(t)\,h(t). \qquad (5)$$

Pour nous convaincre que la convergence a lieu ici également dans le sens de l'espace $C\ ([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^m)$, i.e. qu'elle est uniforme, remarquons que pour un certain $a > 0$ le compact

$$\mathcal{K} = \{(t,\ x) \mid |\, x - \hat{x}(t)\,| \leqslant a, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

est contenu dans U et f_x est uniformément continu sur ce compact. Cela signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |\, t' - t''\,| < \delta, \quad |\, x' - x''\,| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\, f_x(t',\ x') - f_x(t'',\ x'')\,\| < \varepsilon.$$

Si $|\,\alpha\,| < \delta / \|\, h(\cdot)\,\|_C$, alors le théorème de la moyenne (2.2.3), implique

$$\left\| \frac{\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot)+\alpha h(\cdot))-\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot))}{\alpha} - \{f_x(t)\,h(t)\} \right\| =$$

$$= \max_{t\in[t_0,\ t_1]} \left\| \frac{f(t,\ \hat{x}(t)+\alpha h(t))-f(t,\ \hat{x}(t))-f_x(t,\ \hat{x}(t))\,\alpha h(t)}{\alpha} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[t_0,\ t_1]}\ \max_{\theta\in[0,\ 1]} \|f_x(t,\ \hat{x}(t)+\theta\alpha h(t)) - f_x(t,\ \hat{x}(t))\|\,|h(t)| \leqslant \varepsilon\, \|\, h\,\|_C. \qquad (6)$$

Par conséquent, la convergence de (5) est effectivement uniforme, et nous avons démontré l'existence de la première variation selon Lagrange

$$\delta\mathcal{N}(\hat{x}(\cdot),\ h(\cdot))(t) \equiv \hat{f}_x(t)\,h(t).$$

Puisque la première variation est donnée par un opérateur linéaire

$$\mathcal{N}'_G(\hat{x}(\cdot)) : C\ ([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^n) \to C\ ([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^m),$$

et c'est précisément $\mathcal{N}'_G(\hat{x}(\cdot))$ qui est l'opérateur de multiplication par la fonction matricielle $\hat{f}_x(t)$ et il est borné :

$$\|\, \mathcal{N}'_G(\hat{x}(\cdot))\| \leqslant \max_{t\in[t_0,\ t_1]} \|\, f_x(t,\ \hat{x}(t))\|, \qquad (7)$$

on voit que $\mathscr{N}(x(\cdot))$ est différentiable selon Gâteaux. Pour démontrer la continuité de la dérivée de Gâteaux, trouvons une estimation de la norme de la différence

$$\|\mathscr{N}'_G(x(\cdot))-\mathscr{N}'_G(\hat{x}(\cdot))\|=$$
$$=\sup_{\|h(\cdot)\|_C\leqslant 1}\|\mathscr{N}'_G(x(\cdot))[h(\cdot)]-\mathscr{N}'_G(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)]\|=$$
$$=\sup_{\|h(\cdot)\|_C\leqslant 1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|f_x(t,x(t))h(t)-f_x(t,\hat{x}(t))h(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{t\in[t_0,t_1]}\|f_x(t,x(t))-f_x(t,\hat{x}(t))\|.$$

A nouveau, à l'aide du compact $\mathscr{K}$ et de la continuité uniforme de f_x, vérifions la continuité de $\mathscr{N}'_G(x(\cdot))$ par rapport à $x(\cdot)\in\mathscr{U}$. En appliquant maintenant le corollaire 2 de 2.2.3, nous voyons que $\mathscr{N}(x(\cdot))$ possède en chaque point de l'ensemble $\mathscr{U}$ une dérivée de Fréchet et qu'il est strictement différentiable. En vertu de l'égalité $\mathscr{N}'_G=\mathscr{N}'$, la dérivée de Fréchet est continue dans $\mathscr{U}$. ■

Exercice 2. Démontrer que l'on a l'égalité dans (7).

Supposons maintenant que U est un ensemble ouvert dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^r$, la fonction $f(t,x,u): U\to\mathbf{R}^m$ ainsi que ses dérivées partielles f_x, f_u étant continues dans U. L'application $\mathscr{N}:\mathscr{U}\to C([t_0,t_1],\mathbf{R}^m)$ définie sur l'ensemble

$$\mathscr{U}=\{(x(\cdot),u(\cdot))\mid(t,x(t),u(t))\in U,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1\}\subset$$
$$\subset C^1([t_0,t_1],\mathbf{R}^n)\times C([t_0,t_1],\mathbf{R}^r)\qquad(8)$$

par l'égalité

$$\mathscr{N}(x(\cdot),u(\cdot))(t)\equiv f(t,x(t),u(t)),\qquad(9)$$

sera également appelée *opérateur de Nemytski*.

Proposition 2. *L'opérateur de Nemytski donné par les relations* (8) *est continûment différentiable sur l'ensemble* (9) *et l'on a*

$$\mathscr{N}'(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))[h(\cdot),v(\cdot)](t)=\hat{f}_x(t)h(t)+\hat{f}_u(t)v(t),\qquad(10)$$

où

$$\hat{f}_x(t)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f_i(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x_j},\quad i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,n\right),\ (11)$$

$$\hat{f}_u(t)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f_i(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial u_k},\quad i=1,\ldots,m,\quad k=1,\ldots,r\right).\ (12)$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme dans le cas précédent, l'application $\mathcal{N}$ possède des dérivées partielles

$$\mathcal{N}_x(\hat{x}(\cdot),\quad \hat{u}(\cdot))[h(\cdot)](t) = \hat{f}_x(t)\,h(t),$$

$$\mathcal{N}_u(\hat{x}(\cdot),\quad \hat{u}(\cdot))[v(\cdot)](t) = \hat{f}_u(t)\,v(t),$$

et les applications

$$\mathcal{N}_x : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n), \quad C([t_0, t_1], \mathbf{R}^m)),$$

$$\mathcal{N}_u : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^r), \quad C([t_0, t_1], \mathbf{R}^m))$$

sont continues dans $\mathcal{U}$. Il ne reste qu'à appliquer le théorème sur la différentielle totale (voir 2.2.4). ■

Supposons maintenant que U et $\mathcal{U}$ sont les mêmes que dans l'exemple précédent, la fonction $\varphi(t, x, u) : U \to \mathbf{R}^n$ et ses dérivées partielles φ_x, φ_u étant continues dans U. L'application $\Phi : \mathcal{U} \to C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ définie par l'égalité

$$\Phi(x(\cdot), u(\cdot))(t) = \dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{13}$$

sera appelée *opérateur de relation différentielle.*

P r o p o s i t i o n 3. *L'opérateur de relation différentielle défini par l'égalité* (13) *est continûment différentiable sur l'ensemble* (8) *et l'on a*

$$\Phi'(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))[h(\cdot), v(\cdot)](t) = \dot{h}(t) - \hat{\varphi}_x(t)\,h(t) - \hat{\varphi}_u(t)\,v(t), \tag{14}$$

où

$$\hat{\varphi}_x(t) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial\varphi_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n\right), \tag{15}$$

$$\hat{\varphi}_u(t) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial\varphi_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial u_k}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, r\right). \tag{16}$$

D é m o n s t r a t i o n. L'application Φ est la différence entre un opérateur linéaire continu $(x(\cdot), u(\cdot)) \mapsto \dot{x}(\cdot)$ et l'opérateur de Nemytski $\mathcal{N}(x(\cdot), u(\cdot))(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$. Par conséquent, l'assertion qu'il faut démontrer découle des propriétés générales des dérivées (voir 2.2.1) et de la proposition 2. ■

2.4.2. Fonctionnelle intégrale. Soit U un ensemble ouvert dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et supposons que la fonction $f(t, x, \dot{x}) : U \to \mathbf{R}^m$ et ses dérivées partielles f_x, $f_{\dot{x}}$ sont continues dans U. Donnons-nous l'application $\mathcal{I} : \mathcal{W} \to \mathbf{R}^m$ sur l'ensemble

$$\mathcal{W} = \{x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \mid (t, x(t), \dot{x}(t)) \in U, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \tag{1}$$

en posant

$$\mathcal{J}(\dot{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt. \tag{2}$$

P r o p o s i t i o n 1. *L'application intégrale* (2) *est continûment différentiable sur l'ensemble* (1) *et l'on a*

$$\mathcal{J}'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} \{\hat{f}_x(t)\, h(t) + \hat{f}_{\dot{x}}(t)\, \dot{h}(t)\}\, dt, \tag{3}$$

où

$$\hat{f}_x(t) \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad i=1, \ldots, m, \quad j=1, \ldots, n\right), \tag{4}$$

$$\hat{f}_{\dot{x}}(t) \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad i=1, \ldots, m, \quad j=1, \ldots, n\right). \tag{5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Représentons l'application (2) comme la composée

$$\mathcal{J} = I \circ \mathcal{N} \circ D,$$

où

$$D : C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \to C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n) \times C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$$

est un opérateur linéaire continu, défini par l'égalité

$$D(x(\cdot)) = (x(\cdot), \dot{x}(\cdot));$$

$$\mathcal{N} : \mathcal{U} \to C([t_0, t_1], \mathbf{R}^m)$$

est l'opérateur de Nemytski, défini par l'égalité (9) de 2.4.1 (pour $r = n$), et

$$I : C([t_0, t_1], \mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^m$$

est l'opérateur d'intégration

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, dt$$

lui aussi linéaire et continu. Tous ces opérateurs sont différentiables (voir 2.2.1 et la proposition 2 de 2.4.1), la dérivée de l'opérateur linéaire coïncidant avec celui-ci, tandis que la dérivée de l'opérateur de Nemytski est donnée par la formule (10) de 2.4.1. D'après le théorème de superposition, on a

$$\mathcal{J}'(\hat{x}(\cdot)) = I \circ \mathcal{N}'(D\hat{x}(\cdot)) \circ D, \tag{6}$$

i.e.

$$\mathcal{J}'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = I\{\mathcal{N}'(D\hat{x}(\cdot))[Dh(\cdot)]\} =$$

$$= I\{\mathcal{N}'(\hat{x}(\cdot), \dot{\hat{x}}(\cdot))[h(\cdot), \dot{h}(\cdot)]\} =$$

$$= I\{\hat{f}_x(t)\, h(t) + \hat{f}_{\dot{x}}(t)\, \dot{h}(t)\} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{\hat{f}_x(t)\, h(t) + \hat{f}_{\dot{x}}(t)\, \dot{h}(t)\}\, dt.$$

Ceci démontre la formule (3). La continuité de $\mathcal{J}'(x(\cdot))$ découle de la continuité de la dérivée de l'opérateur de Nemytski et de l'égalité (6). ■

Exercice. Trouver les normes des opérateurs D et I.

Dans les problèmes du calcul des variations classique et de commande optimale, on envisage également des fonctionnelles intégrales de la forme (2) à limites d'intégration variables t_0 et t_1. Pour les inclure dans le schéma général, nous procéderons de la manière suivante.

Supposons que les hypothèses concernant $f(t, x, \dot{x})$ sont les mêmes que précédemment et $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ est un intervalle fermé,

$$\mathcal{U} = \{(x(\cdot), t_0, t_1) \mid x(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n);\quad (t, x(t), \dot{x}(t)) \in U, \quad t \in \Delta; \quad t_0, t_1 \in \operatorname{int} \Delta\}. \tag{7}$$

Définissons l'application $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^m$ en posant

$$\mathcal{J}(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt. \tag{8}$$

Proposition 2. *L'application intégrale* (8) *est continûment différentiable sur l'ensemble* (7) *et l'on a*

$$\mathcal{J}'(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)[h(\cdot), \tau_0, \tau_1] = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{f}_x(t)\, h(t) + \hat{f}_{\dot{x}}(t)\, \dot{h}(t))\, dt + \hat{f}(\hat{t}_1)\, \tau_i \big|_{i=0}^{i=1}, \tag{9}$$

où $\hat{f}_x(t)$ *et* $\hat{f}_{\dot{x}}(t)$ *sont déterminés par les formules* (4) *et* (5), *tandis que*

$$\hat{f}(t) = f(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)). \tag{10}$$

Démonstration. Servons-nous du théorème sur la différentielle totale de 2.2.4. Les dérivées partielles existent en vertu de la proposition 1 et du théorème classique sur la dérivée de l'intégrale par rapport aux limites d'intégration inférieure et supérieure:

$$\mathcal{J}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)[h(\cdot)] = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \{\hat{f}_x(t)\, h(t) + \hat{f}_{\dot{x}}(t)\, \dot{h}(t)\}\, dt,$$

$$\mathcal{J}_{t_0}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)[\tau_0] = -\hat{f}(\hat{t}_0)\,\tau_0,$$

$$\mathcal{J}_{t_1}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)[\tau_1] = \hat{f}(\hat{t}_1)\,\tau_1.$$

Passons à la vérification de la continuité des dérivées partielles

A) $\|\mathcal{J}_{t_0}(x(\cdot),\ t_0,\ t_1) - \mathcal{J}_{t_0}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)\| =$

$$= \sup_{\|\tau_0\| \leqslant 1} \|f(t_0,\ x(t_0),\ \dot{x}(t_0))\,\tau_0 - f(\hat{t}_0,\ \hat{x}(\hat{t}_0),\ \dot{\hat{x}}(t_0))\,\tau_0\| \leqslant$$

$$\leqslant |f(t_0,\ x(t_0),\ \dot{x}(t_0)) - f(\hat{t}_0,\ \hat{x}(\hat{t}_0),\ \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0))|. \qquad (11)$$

En outre,

$$|x(t_0) - \hat{x}(\hat{t}_0)| \leqslant |x(t_0) - \hat{x}(t_0)| + |\hat{x}(t_0) - \hat{x}(\hat{t}_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\hat{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_{C^1} + |\hat{x}(t_0) - \hat{x}(\hat{t}_0)|, \qquad (12)$$

$$|\dot{x}(t_0) - \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)| \leqslant |\dot{x}(t_0) - \dot{\hat{x}}(t_0)| + |\dot{\hat{x}}(t_0) - \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\hat{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_{C^1} + |\dot{\hat{x}}(t_0) - \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)|. \qquad (13)$$

Par conséquent, lorsque $t_0 \to \hat{t}_0$ et $x(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ dans $C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$, on a $x(t_0) \to \hat{x}(\hat{t}_0)$, $\dot{x}(t_0) \to \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)$ et donc le deuxième membre de l'inégalité (11) tend vers zéro. Donc $\mathcal{J}_{t_0}(x(\cdot),\ t_0,\ t_1)$ dépend continûment de $(x(\cdot),\ t_0,\ t_1)$ (cette dérivée ne dépend point de t_1). La continuité de $\mathcal{J}_{t_1}(x(\cdot),\ t_0,\ t_1)$ se vérifie d'une manière analogue.

B) Choisissons un nombre $a > 0$ de sorte que le compact

$$\mathcal{K} = \{(t,\ x,\ u) \mid |x - \hat{x}(t)| \leqslant a,\quad |u - \dot{\hat{x}}(t)| \leqslant a,\ t \in \Delta\}$$

soit contenu dans U. Sur ce compact, les dérivées $f_x(t,\ x,\ \dot{x})$ et $f_{\dot{x}}(t,\ x,\ \dot{x})$ sont uniformément continues et bornées. Maintenant,

pour $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{C^1}\leqslant a$, nous avons :

$$\|\mathcal{I}_{x(\cdot)}(x(\cdot),\ t_0,\ t_1)-\mathcal{I}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)\|=$$

$$=\sup_{\|h(\cdot)\|_{C^1}\leqslant 1}\left|\int_{t_0}^{t_1}(f_xh+f_{\dot{x}}\dot{h})\,dt-\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}(\hat{f}_xh+\hat{f}_{\dot{x}}\dot{h})\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\|h(\cdot)\|_{C^1}\leqslant 1}\left\{\left|\int_{\hat{t}_1}^{t_1}\{f_xh+f_{\dot{x}}\dot{h}\}\,dt\right|+\left|\int_{t_0}^{\hat{t}_0}\{f_xh+f_{\dot{x}}\dot{h}\}\,dt\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\{(f_x-\hat{f}_x)\,h+(f_{\dot{x}}-\hat{f}_{\dot{x}})\,\dot{h}\}\,dt\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\mathcal{K}}\{\|f_x(t,\ x,\ u)\|+\|f_{\dot{x}}(t,\ x,\ u)\|\}\,(|t_1-\hat{t}_1|+|t_0-\hat{t}_0|)+$$

$$+\max_{[\hat{t}_0,\ \hat{t}_1]}\{\|f_x(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))-f_x(t,\ \hat{x}(t),\ \dot{\hat{x}}(t))\|+$$

$$+\|f_{\dot{x}}(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))-f_{\dot{x}}(t,\ \hat{x}(t),\ \dot{\hat{x}}(t))\|\}.$$

Le premier terme tend vers zéro pour $t_0\to\hat{t}_0$ et $t_1\to\hat{t}_1$. Le deuxième peut être estimé en utilisant la continuité uniforme, de même que nous l'avions fait dans la démonstration de la proposition 1 de 2.4.1, et il tend donc vers zéro lorsque $x(\cdot)\to\hat{x}(\cdot)$ dans l'espace $C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$.

En appliquant le théorème sur la différentielle totale, on obtient (9). ■

2.4.3. Opérateur des conditions aux limites. Supposons que la fonction $\psi(t_0,\ x_0,\ t_1,\ x_1): W\to\mathbf{R}^s$ est continûment différentiable sur l'ensemble ouvert $W\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ et soit

$$\mathcal{W}=\{(x(\cdot),\ t_0,\ t_1)\mid x(\cdot)\in C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n),\quad t_0,t_1\in\operatorname{int}\Delta,\quad (t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1))\in W\}.\tag{1}$$

L'application $\Psi:\mathcal{W}\to\mathbf{R}^s$ définie par l'égalité

$$\Psi(x(\cdot),\ t_0,\ t_1)=\psi(t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1)),\tag{2}$$

est appelée *opérateur des conditions aux limites.*

P r o p o s i t i o n. *L'opérateur des conditions aux limites* (2) *est continûment différentiable sur l'ensemble* (1) *et l'on a*

$$\Psi'(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)\,[h(\cdot),\ \tau_0,\ \tau_1]=$$

$$=\hat{\psi}_{t_0}\tau_0+\hat{\psi}_{x_0}[h(\hat{t}_0)+\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\,\tau_0]+\hat{\psi}_{t_1}\tau_1+\hat{\psi}_{x_1}[h(\hat{t}_1)+\dot{\hat{x}}(t_1)\,\hat{\tau}_1],\tag{3}$$

où

$$\hat{\psi}_{t_i} = \psi_{t_i}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \quad i = 0, 1, \tag{4}$$

$$\hat{\psi}_{x_i} = \psi_{x_i}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), t_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \quad i = 0, 1. \tag{5}$$

Démonstration. A) Considérons d'abord l'application la plus simple $\text{ev}: C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times \text{int}\,\Delta \to \mathbf{R}^n$ définie par l'égalité

$$\text{ev}(x(\cdot), t_0) = x(t_0)$$

(l'application d'évaluation). Relativement à $x(\cdot)$, cette application est linéaire, et donc

$$\text{ev}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0)[h(\cdot)] = h(\hat{t}_0).$$

La dérivée partielle relativement à t_0 est la dérivée ordinaire

$$\text{ev}_{t_0}(\hat{x}(\cdot), \quad \hat{t}_0)[\tau_0] = \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\,\tau_0.$$

Vérifions la continuité

$$\|\text{ev}_{x(\cdot)}(x(\cdot), t_0) - \text{ev}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0)\| =$$

$$= \sup_{\|h(\cdot)\|_{C^1} \leqslant 1} \|h(t_0) - h(\hat{t}_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|h(\cdot)\|_{C^1} \leqslant 1} \ \sup_{\theta \in [t_0, \hat{t}_0]} \|\dot{h}(\theta)\|\,|t_0 - \hat{t}_0| \leqslant |t_0 - \hat{t}_0| \to 0$$

pour $t_0 \to \hat{t}_0$. On a ensuite

$$\|\text{ev}_{t_0}(x(\cdot), t_0) - \text{ev}_{t_0}(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0)\| =$$

$$= \sup_{|\tau_0| \leqslant 1} |\dot{x}(t_0)\,\tau_0 - \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\,\tau_0| = |\dot{x}(t_0) - \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)| \to 0,$$

lorsque $t_0 \to \hat{t}_0$ et $x(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ dans l'espace $C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, comme nous l'avons montré pendant la démonstration de la proposition 2 de 2.4.2 (inégalités (12) et (13)). D'après le théorème sur la différentielle totale (voir 2.2.4),

$$\text{ev}(\hat{x}(\cdot), \quad \hat{t}_0)'[h(\cdot), \tau_0] = h(\hat{t}_0) + \dot{\hat{x}}(\hat{t})\,\tau_0.$$

On vérifie de manière analogue que l'application $(x(\cdot), t_1) \to x(t_1)$ est également continûment différentiable.

B) En faisant appel au théorème de superposition, on vérifie que l'application (2) est différentiable et l'égalité (3) est vraie. ■

Exercice 1. Supposons que l'application $\text{ev}: C^1([0, 1]) \times (0, 1) \to \mathbf{R}$ est définie par la formule $\text{ev}(x(\cdot), t_0) = x(t_0)$. Démontrer que:

a) pour l'existence de la deuxième variation $\delta^2 \operatorname{ev}(x(\cdot), t_0)$ il faut et il suffit que $\ddot{x}(t_0)$ existe et que

$$\delta^2 \operatorname{ev}(x(\cdot), t_0)[h(\cdot), \tau] = 2h(t_0)\tau + \ddot{x}(t_0)\tau^2;$$

b) l'application ev ne possède pas de deuxième dérivée de Fréchet, bien que dans le cas où $\ddot{x}(t_0)$ existe sa première dérivée de Fréchet soit différentiable selon Gâteaux.

Indication. $\dot{h}(t_0 + \tau) - \dot{h}(t_0) \neq o((\|h\|^2 + \tau^2)^{1/2})$.

§ 2.5. Renseignements nécessaires provenant de la théorie des équations différentielles ordinaires

Comme nous avons déjà remarqué dans 2.1.8, les équations différentielles $\dot{x} = \varphi(t, x, u(t))$ considérées dans les problèmes de commande optimale ont leur caractère propre. Puisque nous admettons les commandes discontinues $u(\cdot)$, le deuxième membre ne vérifie pas nécessairement les hypothèses des théorèmes usuels des cours d'équations différentielles. En outre, les renseignements concernant les solutions ne sont pas toujours exposés dans ces cours sous une forme commode pour nous. Par conséquent, pour que notre exposition soit complète et aussi pour illustrer les possibilités d'application des théorèmes généraux démontrés aux §§ 2.3,2.4, nous donnons dans ce paragraphe la démonstration des théorèmes fondamentaux: l'existence, l'unicité et la différentiabilité des solutions, ainsi que quelques assertions spéciales qui se rapportent aux systèmes linéaires. Une partie des énoncés est donnée sous une forme un peu plus générale que celle qui est ordinairement nécessaire. Le plus souvent, nous avons affaire aux commandes continues par morceaux $u(\cdot)$, or même dans ce cas il est commode de parler de « mesurabilité », d'« intégrabilité », etc.

La fonction $x(\cdot)$ est appelée *solution de l'équation différentielle*

$$x = F(t, x),$$

si elle est absolument continue (voir 2.1.8) et vérifie l'équation presque partout.

Sous une forme équivalente, $x(\cdot)$ doit être la solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds.$$

2.5.1. Hypothèses principales. Ici et par la suite nous allons supposer que G est un ensemble ouvert dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et que la fonction $F: G \to \mathbf{R}^n$ vérifie les trois conditions suivantes:

A) Pour tout x la fonction $t \mapsto F(t, x)$ définie sur la section $G_x = \{t \mid (t, x) \in G\}$ est mesurable et intégrable sur tout intervalle fermé fini contenu dans G_x.

B) Pour tout t, la fonction $x \mapsto F(t, x)$ définie sur la section $G_t = \{x \mid (t, x) \in G\}$ est différentiable (au moins dans le sens de Gâteaux).

C) Pour tout compact $\mathscr{K} \subset G$, il existe une fonction localement intégrable $k(\cdot)$ telle que

$$\| F_x(t, x) \| \leqslant k(t), \quad \forall (t, x) \in \mathscr{K}. \tag{1}$$

(Une fonction est dite *localement intégrable* si elle est intégrable sur tout segment fini.)

Un exemple typique est donné par la fonction $F(t, x) = \varphi(t, x, u(t))$, où $\varphi(t, x, u)$ et $\varphi_x(t, x, u)$ sont continues sur $G \times \mathscr{U}$, alors que $u: \mathbf{R} \to \mathscr{U}$ est continue par morceaux. Les conditions A) et B) sont évidentes ici, tandis que $k(t)$ peut être posée égale au maximum de $\| F_x(t, x) \|$ sur $\mathscr{K}$. Un autre exemple $F(t, x) = A(t)x$, où $A(\cdot)$ est une fonction matricielle mesurable et localement intégrable

$$A: \mathbf{R} \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n).$$

R e m a r q u e. Les conditions A) à C) sont plus restreintes que les conditions de Carathéodory bien connues [4], mais elles s'accordent mieux, d'une part, avec nos besoins (l'étude de l'équation $\dot{x} = \varphi(t, x, u(t))$ à commande discontinue $u(\cdot)$, mais telle que la dérivée φ_x existe) et, d'autre part, avec nos possibilités (l'appareil du calcul différentiel du § 2.2).

L e m m e 1. *Pour tout compact $\mathscr{K} \subset G$, il existe une fonction $\varkappa(\cdot)$ localement intégrable telle que*

$$| F(t, x) | \leqslant \varkappa(t), \quad \forall (t, x) \in \mathscr{K}. \tag{2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Puisque $\mathscr{K}$ est un compact, il existe des $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathscr{K}$ le « cylindre »

$$C_{t_0x_0} = \{(t, x) \mid | t - t_0 | \leqslant \delta, \quad | x - x_0 | \leqslant \varepsilon\}$$

est contenu dans G. Pour ce cylindre, d'après C), trouvons la fonction localement intégrable $k_{t_0x_0}(t)$.

Utilisant de nouveau la compacité, recouvrons $\mathscr{K}$ par un nombre fini de cylindres: $\mathscr{K} \subset \bigcap_{i=1}^{N} C_{t_ix_i}$.

La fonction

$$\varkappa(t) = \sum_{i=1}^{N} [|F(t, x_i)| + k_{t_ix_i}(t) \cdot \varepsilon] \chi_{[t_i-\delta,\, t_i+\delta]}(t)$$

est celle que l'on cherche (ici $\chi_{[\alpha, \beta]}(\cdot)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$; $|F(t, x_i)|$ est intégrable sur $[t_i - \delta, t_i + \delta]$ d'après A)). En effet

$$(t, x) \in \mathcal{K} \Rightarrow \exists i, \quad (t, x) \in C_{t_i x_i} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |F(t, x)| \leqslant |F(t, x_i)| + |F(t, x) - F(t, x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant |F(t, x)| + \sup_{c \in [x, x_i]} \|F_x(t, c)\| \varepsilon \leqslant \varkappa(t)$$

(le segment $[(t, x), (t, x_i)]$ est contenu dans $C_{t_i x_i}$, et le théorème de la moyenne de 2.2.3 est applicable).

L e m m e 2. *Si la fonction* $x: \Delta \to \mathbf{R}^n$ *est continue sur l'intervalle fermé* Δ *et son graphique* $\{(t, x(t)) \mid t \in \Delta\}$ *est situé dans l'ensemble ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, *tandis que la fonction* $F: G \to \mathbf{R}^n$ *vérifie les conditions* A) *à* C), *alors la fonction* $t \mapsto f(t) = F(t, x(t))$ *est mesurable et intégrable sur* Δ.

D é m o n s t r a t i o n. Pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a

$$\mathcal{K} = \{(t, x) \mid |x - x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in \Delta\} \subset G;$$

supposons que $k(\cdot)$ est la fonction qui correspond à ce compact en vertu de la condition C). La fonction continue $x(\cdot)$ est la limite uniforme de fonctions en escalier $x_n(\cdot)$, et, sans restreindre la généralité, on peut supposer que les graphiques des $x_n(\cdot)$ sont situés dans $\mathcal{K}$.

Sur chaque intervalle où $x_n(\cdot)$ est constante, la fonction $t \mapsto f_n(t) = F(t, x_n(t))$ est mesurable et intégrable d'après la condition A), donc $f_n(\cdot)$ est mesurable et intégrable sur Δ. En se servant du théorème de la moyenne (voir 2.2.3) et (1), on obtient

$$|f_n(t) - f(t)| = |F(t, x_n(t)) - F(t, x(t))| \leqslant$$
$$\leqslant k(t) |x_n(t) - x(t)|,$$

d'où $f_n(t) \to f(t)$ pour tous les $t \in \Delta$, par conséquent, $f(\cdot)$ est mesurable, étant la limite de fonctions mesurables ([KF], p. 295). Enfin

$$|f(t)| \leqslant |f_n(t)| + k(t) |x_n(t) - x(t)|,$$

et donc $f(t)$ est intégrable.

2.5.2. Théorème local d'existence. *Supposons que sur un ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *la fonction* $F: G \to \mathbf{R}^n$ *vérifie les conditions* A) *à* C) *et supposons que le compact* $\mathcal{K}$ *est contenu dans* G.

Il existe alors des $\delta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que pour tout point* $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathcal{K}$ *et pour* (t_0, x_0) *vérifiant les inégalités*

$$|t_0 - \hat{t}| < \delta, \quad |x_0 - \hat{x}| < \varepsilon, \tag{1}$$

la solution $X(t, t_0, x_0)$ *du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

est définie sur le segment $[\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$ *et* X *est une fonction continue de ses variables.*

Démonstration. Appliquons à la situation considérée le principe des applications contractantes dans l'énoncé de 2.3.2. Le problème de Cauchy (2) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds, \tag{3}$$

et nous appliquerons le lemme de 2.3.2 à l'application

$$(t_0, x_0, x(\cdot)) \mapsto \Phi(t_0, x_0, x(\cdot)) = x_0 + \int_{t_0}^{(\cdot)} F(s, x(s))\, ds. \tag{4}$$

Choisissons γ et β de sorte que

$$\mathscr{K}_1 = \{(t, x) \mid |t - \hat{t}| \leqslant \gamma, \quad |x - \hat{x}| \leqslant \beta, \quad (\hat{t}, \hat{x}) \in \mathscr{K}\} \subset G,$$

et soient $k(\cdot)$ et $\varkappa(\cdot)$ les fonctions intégrables qui correspondent d'après C) et le lemme 1 de 2.5.1 à ce compact. Vérifions d'abord les hypothèses du lemme de 2.3.2. L'ensemble (1) sera ici l'espace topologique T, $U = T$, $Y = C([\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta], \mathbf{R}^n)$, où δ $(0 < \delta \leqslant \gamma)$ sera choisi plus tard ; $y_0(s) \equiv \hat{x}$,

$$V = \{(t_0, x_0, x(\cdot)) \mid |t_0 - \hat{t}| < \delta, \quad |x_0 - \hat{x}| < \varepsilon, \\ \| x(\cdot) - y_0(\cdot) \|_C < \beta\}. \tag{5}$$

Les constantes ε et θ vérifient $0 < \theta < 1$ et $0 < \varepsilon < \beta(1 - \theta)$.

La condition c) de 2.3.2 est vérifiée si, pour $t \in [\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$, on a

$$\left| x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \hat{x})\, ds - \hat{x} \right| < \beta(1 - \theta). \tag{6}$$

D'après le lemme 1 de 2.5.1, nous avons $|F(s, \hat{x})| \leqslant \varkappa(s)$ et, ayant choisi δ suffisamment petit, nous aurons

$$\int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} |F(s, \hat{x})|\, ds \leqslant \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} \varkappa(s)\, ds < \beta(1 - \theta) - \varepsilon, \tag{7}$$

d'où nous tirons (6), puisque

$$\left|x_0+\int_{t_0}^{t} F(s, \hat{x})\,ds-\hat{x}\right| \leqslant |x_0-\hat{x}|+\left|\int_{t_0}^{t} F(s, \hat{x})\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon+\int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} |F(s, \hat{x})|\,ds<\beta(1-\theta).$$

La condition a) de 2.3.2 signifie ici que l'application $(t_0, x_0, x(\cdot)) \mapsto (t_0, x_0, \Phi(t_0, x_0, x(\cdot)))$ envoie V dans V. Elle est vérifiée si

$$\left|x_0+\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds-\hat{x}\right|<\beta$$

pour $(t_0, x_0, x(\cdot)) \in V$ et $t \in [\hat{t}-\delta, \hat{t}+\delta]$. Estimons ici le premier membre en nous servant de (6), du théorème de la moyenne et de (1) (2.5.1):

$$\left|x_0+\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds-\hat{x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|x_0+\int_{t_0}^{t} F(s, \hat{x})\,ds-\hat{x}\right|+\left|\int_{t_0}^{t}\{F(s, x(s))-F(s, \hat{x})\}\,ds\right|<$$

$$<\beta(1-\theta)+\int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} k(s)|x(s)-\hat{x}|\,ds \leqslant \beta\left(1-\theta+\int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} k(s)\,ds\right) \leqslant \beta,$$

si l'inégalité

$$\int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} k(s)\,ds \leqslant \theta \tag{8}$$

est vérifiée, ce que nous pouvons atteindre en choisissant δ plus petit s'il le faut.

Enfin, puisque nous avons déjà vérifié la condition a), la condition b) de 2.3.2 est vérifiée si

$$\|\Phi(t_0, x_0, x(\cdot))-\Phi(t_0, x_0, y(\cdot))\| \leqslant \theta\,\|x(\cdot)-y(\cdot)\|$$

pour tous les $(t_0, x_0, x(\cdot)) \in V$ et $(t_0, x_0, y(\cdot)) \in V$. Mais

$$\| \Phi(t_0, x_0, x(\cdot)) - \Phi(t_0, x_0, y(\cdot)) \| =$$
$$= \max_t \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \right| =$$
$$= \max_t \left| \int_{t_0}^{t} \{F(s, x(s)) - F(s, y(s))\}\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} k(s)\, ds \, \| x(\cdot) - y(\cdot) \| \leqslant \theta \, \| x(\cdot) - y(\cdot) \|$$

d'après (8).

Ainsi le lemme de 2.3.2 peut être appliqué et, par conséquent, la suite $X_n(\cdot, t_0, x_0)$ définie par les égalités $X_0(\cdot, t_0, x_0) \equiv \hat{x}$ et

$$X_{n+1}(\cdot, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{(\cdot)} F(s, X_n(s, t_0, x_0))\, ds, \tag{9}$$

converge uniformément par rapport à (t_0, x_0) de (1) dans l'espace $C([\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta], \mathbf{R}^n)$, i.e. uniformément par rapport à $t \in [t - \delta, \hat{t} + \delta]$. Passant à la limite dans (9), nous voyons que

$$X(t, t_0, x_0) = \lim_{n \to \infty} X_n(t, t_0, x_0)$$

vérifie l'équation intégrale (3) et, par conséquent, est une solution du problème de Cauchy (2). Par récurrence on démontre facilement que les fonctions $X_n(t, t_0, x_0)$ sont continues, et, puisque la convergence est uniforme, il en découle que $X(t, t_0, x_0)$ est continue relativement à ses variables. ■

2.5.3. Théorème d'unicité.

Lemme (inégalité de Gronwall). *Supposons que les fonctions non négatives $\alpha(\cdot)$ et $\omega(\cdot)$ sont mesurables sur le segment Δ et le produit $\alpha(\cdot)\,\omega(\cdot)$ est intégrable sur Δ. Si pour certains $b > 0$ et $\tau \in \Delta$ et pour tous les $t \in \Delta$, on a l'inégalité*

$$\omega(t) \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \alpha(s)\, \omega(s)\, ds \right| + b, \tag{1}$$

alors pour tous les $t \in \Delta$ on a

$$\omega(t) \leqslant b e^{\left| \int_{\tau}^{t} \alpha(s) ds \right|}. \tag{2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que $t \geqslant \tau$. Par hypothèse

$$N = \int_{\Delta} \alpha(s)\, \omega(s)\, ds < \infty$$

et, d'après (1), on a

$$\omega(t) \leqslant N + b.$$

Par récurrence, nous voyons que (1) implique les inégalités

$$\omega(t) \leqslant b + b \int_{\tau}^{t} \alpha(s)\, ds + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b}{(m-1)!} \left[\int_{\tau}^{t} \alpha(s)\, ds \right]^{m-1} + \frac{b+N}{m!} \left[\int_{\tau}^{t} \alpha(s)\, ds \right]^{m}. \qquad (3)$$

En effet, pour $m = 0$, (3) est vérifié, et si (3) est valable pour un certain m, en substituant cette estimation dans (1) et en nous servant de l'égalité

$$\int_{\tau}^{t} \alpha(s) \left[\int_{\tau}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right]^{k} ds = \left. \frac{\left[\int_{\tau}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right]^{k+1}}{k+1} \right|_{s=\tau}^{s=t} = \frac{\left[\int_{\tau}^{t} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right]^{k+1}}{k+1},$$

nous voyons que (3) est valable pour $m + 1$. En passant à la limite dans (3) quand $m \to \infty$, nous obtenons (1).

Pour $t \leqslant \tau$ le raisonnement est analogue, il faut seulement changer partout de place les limites d'intégration. (Remarquons que la fonction $\alpha(\cdot)$ n'est pas nécessairement intégrable, de sorte que le deuxième membre de (2) peut être infini.) ■

T h é o r è m e d' u n i c i t é. *Supposons que la fonction* $F: G \to \mathbf{R}^n$ *vérifie les conditions* A) *à* C) *de* 2.5.1 *dans un ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$; Δ_i, $i = 1, 2$, *sont des intervalles dans* $\mathbf{R}$ *et* $x_i(\cdot): \Delta_i \to \mathbf{R}^n$ *sont deux solutions du problème de Cauchy* (2) *de* 2.5.2, *dont les graphiques sont contenus dans G. Alors* $x_1(t) \equiv x_2(t)$ *pour tous les* $t \in \Delta_1 \cap \Delta_2$.

D é m o n s t r a t i o n. L'ensemble $\Delta = \{t \mid x_1(t) = x_2(t)\}$ est évidemment fermé dans $\Delta_1 \cap \Delta_2$ et non vide, puisque $t_0 \in \Delta$. Il reste à vérifier que c'est un ensemble ouvert, alors l'assertion du théorème sera une conséquence du fait que l'intervalle $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est connexe.

Supposons que $\hat{t} \in \Delta$, de sorte que $x_1(\hat{t}) = x_2(\hat{t}) = \hat{x}$. Choisissons des $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ de manière à avoir

$$\mathscr{K} = \{(t, x) \mid |t - \hat{t}| \leqslant \gamma, \quad |x - \hat{x}| \leqslant \beta\} \subset G \text{ et } (t, x_i(t)) \in \mathscr{K}$$

pour $|t - \hat{t}| \leqslant \gamma$; la fonction $k(t)$ correspond à $\mathscr{K}$ en vertu de la condition C) de 2.5.1.

En appliquant le théorème de la moyenne (voir 2.2.3) et l'inégalité (1) de 2.5.1, nous trouvons

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leqslant \left|\int_{\hat{t}}^{t} [F(s, x_1(s))-F(s, x_2(s))]\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{\hat{t}}^{t} k(s)\,|x_1(s)-x_2(s)|\,ds\right|.$$

Maintenant, si l'on applique aux fonctions $\omega(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ sur $[\hat{t} - \gamma, \hat{t} + \gamma]$ le lemme que nous venons de démontrer ($\alpha(t) = k(t)$, $b = 0$), on obtient, d'après (2), $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

Par conséquent $(\hat{t} - \gamma, \hat{t} + \gamma) \subset \Delta$, et Δ est ouvert. ■

2.5.4. Equations différentielles linéaires. Dans ce sous-paragraphe Δ est un intervalle fermé de la droite numérique,

$$A: \Delta \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), \quad b: \Delta \to \mathbf{R}^n \text{ et } c: \Delta \to \mathbf{R}^{n*}$$

sont respectivement une fonction matricielle intégrable et deux fonctions vectorielles intégrables;

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{R}^{n*}.$$

Nous allons considérer les systèmes d'équations différentielles linéaires

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t) \tag{1}$$

et

$$\dot{p} = -pA(t) + c(t) \tag{2}$$

(parfois le système (2) est dit *adjoint* au système (1)). Il est bien connu que l'existence de la solution pour les systèmes linéaires peut être démontrée globalement, dans notre cas sur le segment Δ tout entier.

Lemme. *Si les fonctions* $A: \Delta \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $b: \Delta \to \mathbf{R}^n$ *et* $c: \Delta \to \mathbf{R}^{n*}$ *sont mesurables et intégrables sur le segment* Δ, *alors tout problème de Cauchy pour les équations* (1) *et* (2), *posé au moment* $t_0 \in \Delta$, *possède une solution unique et cette solution peut être prolongée au segment* Δ *tout entier.*

Démonstration. Puisque dans les deux cas tous les raisonnements sont analogues, nous nous limiterons à l'équation (1). Pour simplifier, prolongeons les fonctions $A(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sur $\mathbf{R}$ tout entier, en les prenant nulles en dehors de Δ. Alors la fonction

$$F(t, x) = A(t)x + b(t)$$

vérifiera les conditions A) à C) de 2.5.1 dans le domaine $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, on peut donc appliquer à l'équation différentielle (1) le théorème d'unicité de 2.5.3 et le théorème local d'existence de 2.5.2 en chaque

point $(\hat{t}, \hat{x})$, de sorte que la solution de l'équation (1) pour laquelle $x(\hat{t}) = \hat{x}$ est nécessairement unique et définie sur un certain intervalle fermé $[\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$.

Remarquons maintenant que si $|\hat{x}| \leqslant M$, on a

$$|F(t, \hat{x})| \leqslant \|A(t)\| M + |b(t)|, \quad \|F_x(t, \hat{x})\| = \|A(t)\|.$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème de 2.5.2; nous pouvons choisir arbitrairement les constantes γ, β, θ et ε, par exemple, en posant $\theta = 1/2$, $\beta = 4$, $\varepsilon = \gamma = 1$, alors les inégalités (7) et (8) de 2.5.2 qui déterminent δ se mettent sous la forme

$$\left.\begin{aligned} M \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} \|A(s)\|\,ds + \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} |b(s)|\,ds < 1, \\ \int_{\hat{t}-\delta}^{\hat{t}+\delta} \|A(s)\|\,ds \leqslant 1/2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$\|A(\cdot)\|$ et $|b(\cdot)|$ étant intégrables, nous pouvons choisir $\delta > 0$ si petit (et inférieur ou égal à $\gamma = 1$) que les inégalités (3) soient satisfaites pour tous les $\hat{t}$ ([KF], p. 294). Par conséquent, la solution de l'équation (1) pour laquelle $x(\hat{t}) = \hat{x}$ est définie sur le segment $[\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$ avec un δ garanti, qui est le même pour tout $\hat{t}$ et tout $\hat{x}$ tel que $|\hat{x}| \leqslant M$.

Supposons maintenant donnés $t_0 \in \Delta$ et x_0; cherchons la solution de l'équation (1), qui vérifie

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Posons

$$M = \left(|x_0| + \int_\Delta |b(s)|\,ds\right) e^{\int_\Delta \|A(s)\|\,ds} \tag{5}$$

Le problème de Cauchy (1), (4) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds,$$

d'où l'on tire

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \left|\int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s)\,ds\right| + \left|\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(|x_0| + \int_\Delta |b(s)|\,ds\right) + \left|\int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\,|x(s)|\,ds\right|. \tag{6}$$

La solution $x(\cdot)$ du problème (1), (4) est nécessairement définie sur le segment $\Delta_1 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. En appliquant sur ce segment le lemme de 2.5.3 à la fonction $\omega(t) = |x(t)|$ $(\alpha(t) = \|A(t)\|$, $b = |x_0| + \int_\Delta |b(s)|\, ds)$, nous obtenons l'inégalité

$$|x(t)| \leqslant \left(|x_0| + \int_\Delta |b(s)|\, ds\right) e^{\left|\int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\, ds\right|} \tag{7}$$

et, en particulier, $|x(t_0 \pm \delta)| \leqslant M$ d'après (5). Par conséquent, aux points $(t_0 \pm \delta, x(t_0 \pm \delta))$ on peut à nouveau se servir du théorème local d'existence et prolonger la solution $x(\cdot)$ au segment $\Delta_2 = [t_0 - 2\delta, \ t_0 + 2\delta]$.

Ensuite la procédure est répétée. L'inégalité (6) est vérifiée sur Δ_2 et donc on a (7) sur Δ_2 et $|x(t_0 \pm 2\delta)| \leqslant M$, etc. En un nombre fini d'étapes nous prolongeons la solution du problème de Cauchy (1), (4) au segment Δ tout entier. ■

Des formules explicites pour la solution des systèmes (1) et (2) s'obtiennent à l'aide de la matrice fondamentale des solutions du système homogène

$$\dot{x} = A(t)\, x. \tag{8}$$

D é f i n i t i o n. On appelle *matrice fondamentale* $\Omega(t, \tau)$ des solutions du système (8) la fonction matricielle $\Omega: \Delta \times \Delta \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ qui est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial \Omega(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\, \Omega(t, \tau), \tag{9}$$

$$\Omega(\tau, \tau) = E. \tag{10}$$

Autrement dit, chaque colonne de la matrice $\Omega(t, \tau)$ est une solution du système (8), et pour $t = \tau$, ces n colonnes se transforment dans la famille des vecteurs unités de la base standard de $\mathbf{R}^n$: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

T h é o r è m e. *Si la fonction matricielle $A(\cdot)$ est intégrable sur le segment Δ, alors la matrice fondamentale $\Omega(t, \tau)$ du système* (8) *existe, elle est continue sur le carré $\Delta \times \Delta$, et on a*:

1) $\Omega(t, s)\, \Omega(s, \tau) \equiv \Omega(t, \tau)$ *pour tous les* $t, s, \tau \in \Delta$; (11)

2) *pour chaque* t, $\Omega(t, \tau)$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$\frac{\partial \Omega(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Omega(t, \tau)\, A(\tau). \tag{12}$$

En outre:

3) *Si la fonction* $b: \Delta \to \mathbf{R}^n$ *est intégrable sur le segment* Δ *et* $x(\cdot)$ *est une solution du système* (1), *alors pour tous* $t, \tau \in \Delta$ *on a*

$$x(t) = \Omega(t, \tau)\, x(\tau) + \int_\tau^t \Omega(t, s)\, b(s)\, ds. \tag{13}$$

4) *Si la fonction* $c: \Delta \to \mathbf{R}^{n*}$ *est intégrable sur le segment* Δ *et* $p(\cdot)$ *est la solution du système* (2), *alors pour tous* $t, \tau \in \Delta$ *on a*

$$p(t) = p(\tau)\,\Omega(\tau, t) - \int_t^\tau c(s)\,\Omega(s, t)\,ds. \tag{14}$$

D é m o n s t r a t i o n. Par une substitution directe, en se servant de (9), on vérifie que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ les fonctions

$$x_1(t) = \Omega(t, s)\,\Omega(s, \tau)\,\xi \quad \text{et} \quad x_2(t) = \Omega(t, \tau)\,\xi$$

sont des solutions du système (8), et puisque, d'après (10),

$$x_1(s) = \Omega(s, s)\,\Omega(s, \tau)\xi = \Omega(s, \tau)\,\xi = x_2(s),$$

on peut conclure en utilisant le théorème d'unicité que

$$\Omega(t, s)\,\Omega(s, \tau)\,\xi = x_1(t) \equiv x_2(t) = \Omega(t, \tau)\,\xi.$$

Puisque ξ est arbitraire, on doit avoir (11). En posant $t = \tau$ dans (11), nous obtenons $\Omega(t, s)\,\Omega(s, t) = E$, d'où

$$\Omega(t, s) \equiv [\Omega(s, t)]^{-1}.$$

Si nous fixons s dans (11), nous pouvons représenter la fonction d'une paire de variables $\Omega(t, \tau)$ sous forme de produit de deux fonctions d'une seule variable, et puisqu'elles sont toutes deux continues, Ω sera continue relativement à (t, τ) sur $\Delta \times \Delta$. En particulier, cette fonction est bornée.

D'après la proposition 3 de 2.2.1, la fonction matricielle $f(A) = A^{-1}$ est continûment différentiable sur l'ensemble des matrices inversibles et

$$f'(A)[H] = -A^{-1} H A^{-1}. \tag{15}$$

L'ensemble $\mathcal{K} = \{A \mid A = \Omega(s, t),\ s, t \in \Delta\}$ est l'image du compact $\Delta \times \Delta$ par l'application continue $\Omega: \Delta \times \Delta \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, donc c'est un compact; la fonction f est bornée sur ce compact, $\| f(A) \| \leqslant M$ et vérifie les conditions de Lipschitz puisque

$$\| f(A) - f(B) \| = \| B^{-1} - A^{-1} \| = \| -B^{-1}(B - A)\,A^{-1} \| \leqslant \leqslant M^2 \| B - A \|.$$

D'après l'hypothèse 1 de 2.1.8 la fonction

$$\varphi(s) = \Omega(t, s) = \Omega(s, t)^{-1} = f(\Omega(s, t))$$

est absolument continue; en vertu de (15) et du théorème de superposition de 2.2.2., on a presque partout

$$\frac{\partial \Omega(t, s)}{\partial s} = -[\Omega(s, t)]^{-1} \frac{\partial \Omega(s, t)}{\partial s} [\Omega(s, t)]^{-1} = = -[\Omega(s, t)]^{-1} A(s)\,\Omega(s, t)\,[\Omega(s, t)]^{-1} = -\Omega(t, s)\,A(s),$$

ce qui démontre (12)

En représentant le deuxième membre de (13) sous la forme

$$\Omega(t, \tau)\left[x(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Omega(\tau, s)\, b(s)\, ds\right], \tag{16}$$

nous voyons que c'est une fonction absolument continue. En effet, $\Omega(\tau, s)\, b(s)$ est intégrable (comme fonction de s) sur Δ, or, l'intégrale d'une fonction intégrable est toujours absolument continue (voir 2.1.8). Par conséquent, l'expression entre crochets de (16) est absolument continue relativement à t. Il reste à remarquer que le produit de deux fonctions absolument continues est également absolument continu (proposition 1 de 2.1.8).

En prenant la dérivée de (16) compte tenu de (9) et (11), nous voyons que le deuxième membre de (13), de même que $x(\cdot)$, vérifie l'équation (1). Puisque ces fonctions coïncident pour $t = \tau$, elles coïncident pour tous les $t \in \Delta$ d'après le théorème d'unicité.

La relation (14) se démontre de manière analogue. ■

2.5.5. Théorème global sur l'existence et la dépendance continue de la solution des données initiales et des paramètres. Revenons à l'étude du problème de Cauchy

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

pour les équations différentielles dont les deuxièmes membres vérifient les conditions A) à C) de 2.5.1. En utilisant le théorème local d'existence et le théorème d'unicité, nous pourrons, comme on le fait dans les cours d'équations différentielles, prolonger la solution $X(\cdot, t_0, x_0)$ du problème de Cauchy (1), (2), à l'intervalle maximal (a, b) où cette solution existe. Alors il découle du théorème de 2.5.2 que, pour $t \downarrow a$ et pour $t \uparrow b$, cette solution doit sortir de tout compact $\mathscr{K} \subset G$, car, tant que $(t, x(t)) \in \mathscr{K}$, on a la garantie de pouvoir prolonger la solution à l'intervalle $(t - \delta, t + \delta)$, d'où l'on tire $a + \delta < t < b - \delta$, puisque l'intervalle (a, b) est maximal. Le théorème suivant nous montre dans quel sens $X(\cdot, t_0, x_0)$ est une fonction continue de (t_0, x_0).

Théorème 1. *Supposons que la fonction $F: G \to \mathbf{R}^n$ vérifie les conditions* A) *à* C) *de* 2.5.1 *sur l'ensemble ouvert $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et supposons que $\hat{x}: [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to \mathbf{R}^n$ est une solution de l'équation* (1) *dont le graphique $\Gamma = \{(t, \hat{x}(t)) \mid \hat{t}_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}_1\}$ est contenu dans G.*

Il existe alors un $\hat{\delta} > 0$ et un voisinage $\hat{G} \supset \Gamma$ tels que pour tous les $(t_0, x_0) \in \hat{G}$ la solution $X(\cdot, t_0, x_0)$ du problème de Cauchy (1), (2) *est définie sur le segment $\Delta = [\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}]$ et la fonction $(t, t_0,$*

$x_0) \mapsto X(t, t_0, x_0)$ est une fonction continue de ses variables sur $\Delta \times \hat{G}$. En particulier, pour $t_0 \to \tau$, $x_0 \to \hat{x}(\tau)$, on a $X(t, t_0, x_0) \to \hat{x}(t)$ uniformément par rapport à $t \in \Delta$.

Démonstration. A) En appliquant le théorème local d'existence aux points $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0))$ et $(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$, prolongeons la solution $\hat{x}(\cdot)$ à un intervalle fermé $\Delta = [\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}]$ de façon que le graphique de $\hat{x}(\cdot)$ soit toujours contenu dans G. Choisissons ensuite $\hat{\varepsilon}$ de manière que le compact

$$\mathscr{K} = \{(t, x) \mid |x - \hat{x}(t)| \leqslant \hat{\varepsilon}, \quad t \in \Delta\}$$

soit contenu dans G. Appliquons à $\mathscr{K}$ le théorème de 2.5.2 et trouvons un $\delta > 0$ tel que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathscr{K}$ la solution $X(\cdot, t_0, x_0)$ soit définie sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Enfin, supposons que $k(t)$ et $\varkappa(\cdot)$ sont des fonctions localement intégrables qui correspondent à $\mathscr{K}$ en vertu de la condition C) et du lemme 1 de 2.5.1. Désignons maintenant

$$\hat{G} = \{(t, x) \mid t \in (\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}), \quad |x - \hat{x}(t)| < \varepsilon\}$$

et montrons que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ce domaine possède les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème.

B) Supposons que deux solutions $x_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, de l'équation (1) sont définies sur l'intervalle fermé $[\beta, \gamma] \subset \Delta$ et $(t, x_i(t)) \in \in \mathscr{K}$, $\beta \leqslant t \leqslant \gamma$, de plus, soit $\tau \in [\beta, \gamma]$. En appliquant le théorème de la moyenne (voir 2.2.3) et l'inégalité (1) de 2.5.1, nous obtenons

$$|x_1(t) - x_2(t)| =$$

$$= \left| x_1(\tau) + \int_\tau^t F(s, x_1(s))\, ds - x_2(\tau) - \int_\tau^t F(s, x_2(s))\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_1(\tau) - x_2(\tau)| + \left| \int_\tau^t [F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))]\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_1(\tau) - x_2(\tau)| + \left| \int_\tau^t k(s) |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \right|. \quad (3)$$

En vertu du lemme de 2.5.3

$$\alpha(s) = k(s), \quad \omega(s) = |x_1(s) - x_2(s)|, \quad b = |x_1(\tau) - x_2(\tau)|,$$

on a donc

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(\tau) - x_2(\tau)| e^{\left| \int_\tau^t k(s) ds \right|}, \quad \beta \leqslant t \leqslant \gamma. \quad (4)$$

C) Choisissons maintenant un $\varepsilon > 0$ de manière à avoir

$$\varepsilon e^{\int_\Delta k(s)ds} \leqslant \hat{\varepsilon}, \tag{5}$$

et soit $(t_0, x_0) \in \hat{G}$. Puisque $\hat{G} \subset \mathscr{K}$, la solution $x(\cdot) = X(\cdot, t_0, x_0)$ est définie sur $[\beta, \gamma] = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap \Delta$. Montrons que cette solution restera dans $\mathscr{K}$ sur ce segment. En effet, supposons que

$$T = \sup \{t \mid t_0 \leqslant t \leqslant \min \{t_0 + \delta, \hat{t}_1 + \hat{\delta}\}; \quad (s, x(s)) \in \mathscr{K}, \quad \forall s \in [t_0, t]\}. \tag{6}$$

Sur le segment $[t_0, T]$, on peut appliquer aux solutions $x(\cdot)$ et $\hat{x}(\cdot)$ les raisonnements de la partie B) de la démonstration; en se servant de (4), on obtient alors

$$|x(T) - \hat{x}(T)| \leqslant |x_0 - \hat{x}(t_0)| e^{\int_{t_0}^{T} k(s)ds} < \varepsilon e^{\int_\Delta k(s)ds} \leqslant \hat{\varepsilon}.$$

Mais alors $(T, x(T)) \in \operatorname{int} \mathscr{K}$ et le point $(t, x(t))$ reste dans $\mathscr{K}$ également pour les $t > T$ proches de T, ce qui est en contradiction avec la définition (6). On raisonne d'une manière analogue pour $t \leqslant t_0$.

Puisque $(\beta, x(\beta)) \in \mathscr{K}$ et $(\gamma, x(\gamma)) \in \mathscr{K}$, la solution $x(\cdot)$ est définie sur le segment $[t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \cap \Delta$. On peut à nouveau appliquer à ce segment la même argumentation: elle montre que $(t, x(t))$ reste dans $\mathscr{K}$. En continuant ce procédé, nous voyons que $x(\cdot)$ est défini sur Δ.

D) D'après ce que nous venons de démontrer, toute solution $X(\cdot, t_0, x_0)$ reste dans $\mathscr{K}$ si $(t_0, x_0) \in \hat{G}$. Si l'on se rappelle de la fonction $\varkappa(\cdot)$, on obtient l'inégalité

$$|X(t_1, t_0, x_0) - X(t, t_0, x_0)| = \left| \int_t^{t_1} F(s, X(s, t_0, x_0))\, ds \right| \leqslant \left| \int_t^{t_1} \varkappa(s)\, ds \right|. \tag{7}$$

Choisissons maintenant deux solutions pour lesquelles $(t_0, x_0) \in \hat{G}$ et $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in \hat{G}$. Alors, en vertu de (4) et (7), on a l'inégalité

$$|X(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0) - X(t, t_0, x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |X(\tilde{t}, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0) - X(t, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0)| + |X(t, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0) - X(t, t_0, x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_t^{\tilde{t}} \varkappa(s)\, ds \right| + |\tilde{x}_0 - X(\tilde{t}_0, t_0, x_0)| e^{\left| \int_{\tilde{t}_0}^{t} k(s)ds \right|} \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_t^{\tilde{t}} \varkappa(s)\, ds \right| + \left\{ |\tilde{x}_0 - x_0| + \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \varkappa(s)\, ds \right| \right\} e^{\int_\Delta k(s)ds}, \tag{8}$$

qui tend évidemment vers zéro pour $\tilde{t} \to t$, $\tilde{t}_0 \to t_0$, $\tilde{x}_0 \to x_0$, ce qui démontre la continuité de $X(t, t_0, x_0)$. En posant dans (8) $\tilde{t} = t$, $\tilde{t}_0 = \tau$, $\tilde{x}_0 = \hat{x}(\tau)$ et en se rappelant que d'après le théorème d'unicité on a $X(t, \tau, \hat{x}(\tau)) \equiv \hat{x}(t)$, on obtient

$$|\hat{x}(t) - X(t, t_0, x_0)| \leqslant \left\{ |\hat{x}(\tau) - x_0| + \int_{t_0}^{\tau} \varkappa(s)\, ds \right\} e^{\int_{\Delta} k(s) ds},$$

d'où l'on voit que $X(t, t_0, x_0) \to \hat{x}(t)$ uniformément quand $x_0 \to \hat{x}(\tau)$, $t_0 \to \tau$. ■

Passons maintenant à la dépendance continue des solutions en fonction du paramètre. Supposons que nous avons une famille d'équations différentielles

$$\dot{x} = F_\alpha(t, x), \tag{9}$$

qui dépendent du paramètre $\alpha \in \mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}$ est un espace topologique.

Théorème 2. *Supposons que sur l'ensemble ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *les fonctions de la famille* $\{F_\alpha\colon G \to \mathbf{R}^n \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *vérifient pour chaque* $\alpha \in \mathfrak{A}$ *les conditions* A) *et* B) *de* 2.5.1 ; *soit* $\hat{x}\colon [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to \mathbf{R}^n$ *une solution de l'équation* (6) *pour* $\alpha = \hat{\alpha}$; *envisageons le graphique* $\Gamma = \{(t, \hat{x}(t)) \mid \hat{t}_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}_1\} \subset G$ *et supposons en outre que sont vérifiées les conditions suivantes*:

C′) *Pour tout compact* $\mathscr{K} \subset G$ *il existe des fonctions localement intégrables* $\varkappa(\cdot)$ *et* $k(\cdot)$ *telles que pour tous les* $(t, x) \in \mathscr{K}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ *on a les inégalités*

$$|F_\alpha(t, x)| \leqslant \varkappa(t), \quad \|F_{\alpha x}(t, x)\| \leqslant k(t). \tag{10}$$

$$\text{D)} \lim_{\alpha \to \hat{\alpha}} \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} |F_\alpha(s, \hat{x}(s)) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))|\, ds = 0. \tag{11}$$

Il existe alors un $\hat{\delta} > 0$, *un voisinage* $\hat{G} \supset \Gamma$ *dans* G *et un voisinage* $U \ni \hat{\alpha}$ *dans* $\mathfrak{A}$ *tels que pour* $(t_0, x_0) \in \hat{G}$, $\alpha \in U$ *la solution* $x_\alpha(t, t_0, x_0)$ *du problème de Cauchy* (9), (2), *est définie sur l'intervalle fermé* $\Delta = [\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}]$ *et quand* $t_0 \to \tau \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, $x_0 \to \hat{x}(\tau)$, $\alpha \to \hat{\alpha}$, *on a*

$$X_\alpha(t, t_0, x_0) \to \hat{x}(t)$$

uniformément par rapport à $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$.

La démonstration de ce théorème s'effectue suivant le même schéma que celle du théorème 1, avec des modifications mineures. Dans la partie A) nous prenons en considération le fait que le nombre δ dans le théorème local d'existence se détermine par les inégalités (7) et (8) de 2.5.2 et, en vertu de la condition C'), peut être choisi le même pour tous les $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Dans la partie B) nous remplaçons la solution $x_1(\cdot)$ par la solution $x_\alpha(\cdot)$ de l'équation (9) et la solution $x_2(\cdot)$ par $\hat{x}(\cdot)$. Lorsqu'on estime la différence, il faut prendre en considération que les deuxièmes membres des équations sont maintenant différents et donc

$$|x_\alpha(t)-\hat{x}(t)| \leqslant \leqslant |x_\alpha(\tau)-\hat{x}(\tau)| + \left|\int_\tau^t \{F_\alpha(s, \hat{x}(s)) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))\}\,ds\right| + \left|\int_\tau^t k(s)|x_\alpha(s)-\hat{x}(s)|\,ds\right|,$$

tandis que (4) est remplacé par l'inégalité

$$|x_\alpha(t)-\hat{x}(t)| \leqslant \left(|x_\alpha(\tau)-\hat{x}(\tau)| + \left|\int_\tau^t \{F_\alpha(s, \hat{x}(s)) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))\}\,ds\right|\right) e^{\left|\int_\tau^t k(s)\,ds\right|}. \qquad (4')$$

Dans l'inégalité (5) il faut remplacer ε par 2ε, tandis que $\hat{\delta}$ et U doivent être choisis en se servant des conditions C') et D) de manière à avoir les inégalités

$$\left|\int_\tau^t \{F_\alpha(s, \hat{x}(s)) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))\}\,ds\right| \leqslant \leqslant \int_{\hat{t}_0-\hat{\delta}}^{\hat{t}_1+\hat{\delta}} |F_\alpha(s, \hat{x}(s) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))|\,ds \leqslant 2\left(\int_{\hat{t}_0-\hat{\delta}}^{\hat{t}_0} + \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_1+\hat{\delta}} \varkappa(s)\,ds\right) + \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} |F_\alpha(s, \hat{x}(s)) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))|\,ds < \varepsilon. \qquad (12)$$

Alors le raisonnement de la partie C) (où (4) a été remplacé par (4')) reste valable simultanément pour tous les $\alpha \in U$.

Dans la partie D), il faut préciser l'inégalité (8) à cause du remplacement de (4) par (4'); nous obtenons alors

$$|X_\alpha(t, t_0, x_0) - \hat{x}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ |x_0 - \hat{x}(\tau)| + \left| \int_{t_0}^{\tau} \varkappa(s)\, ds \right| + \right.$$

$$\left. + \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} |F_\alpha(s, \hat{x}(s)) - F_{\hat{\alpha}}(s, \hat{x}(s))|\, ds \right\} e^{\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} k(s) ds}$$

et le reste est évident. ■

Corollaire. *Si l'on a toutes les hypothèses du théorème* 2, *la condition* D) *étant donnée sous la forme plus forte*:

D') *pour toute fonction* $\tilde{x}$: $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1] \to \mathbf{R}^n$ *dont le graphique est situé dans* G *et pour tout* $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\alpha \to \tilde{\alpha}} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} |F_\alpha(s, \tilde{x}(s)) - F_{\tilde{\alpha}}(s, \tilde{x}(s))|\, ds = 0,$$

alors la solution $x_\alpha(t, t_0, x_0)$ *du problème de Cauchy* (9), (2) *est une fonction continue de* (t, t_0, x_0, α) *sur* $\Delta \times \hat{G} \times U$.

Démonstration. Pour tous les $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in \hat{G}$ et $\tilde{\alpha} \in U$, le graphique de la solution $\tilde{x}(\cdot) = X_{\tilde{\alpha}}(\cdot, \tilde{t}_0, \tilde{x}_0) : \Delta \to \mathbf{R}^n$ est contenu dans G. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 2 en remplaçant $\hat{x}(\cdot)$ par $\tilde{x}(\cdot)$ dans ses hypothèses. ■

L'identité suivante est semblable à la propriété principale de la matrice fondamentale d'un système linéaire (voir la formule (11) du sous-paragraphe précédent):

$$X(t, \tau, X(\tau, t_0, x_0)) \equiv X(t, t_0, x_0). \tag{13}$$

Elle découle automatiquement du théorème d'unicité, puisque chacun des deux membres est une solution de l'équation (1) et pour $t = \tau$ les deux solutions sont égales. Nous recommandons au lecteur d'étudier la relation qui existe entre cette identité et le principe de Huygens (voir 1.1.3).

2.5.6. Théorème sur la dépendance différentiable des solutions en fonction des conditions initiales. Jusqu'ici notre exposé était basé sur les hypothèses relativement faibles A) à C) de 2.5.1. Pour aller plus loin et établir la différentiabilité des solutions du problème de Cauchy $X(t, t_0, x_0)$ relativement à la valeur initiale x_0, il sera

nécessaire de renforcer ces hypothèses. Nous aurons alors la possibilité d'appliquer le théorème classique des fonctions implicites. Dans la démonstration du théorème de ce sous-paragraphe, nous ne nous occuperons pas de l'existence de la solution $X(t, t_0, x_0)$ pour $(t_0, x_0) \in \hat{G}$ et de la possibilité de son prolongement à tous les $t \in \Delta$, puisque l'un aussi bien que l'autre découle du théorème 1 de 2.5.5. Toutefois il sera utile au lecteur de vérifier que ces deux faits découlent également du théorème des fonctions implicites et que l'on peut donc se passer de tout renvoi au sous-paragraphe précédent. (Des raisonnements analogues seront effectués en entier dans 2.5.7 où, pour des hypothèses encore plus fortes, nous démontrerons la différentiabilité relativement à t_0, le théorème des fonctions implicites étant appliqué sous une autre forme qu'ici.)

Théorème. *Supposons que sur l'ensemble ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *la fonction* $F: G \to \mathbf{R}^n$ *vérifie les conditions* A) *et* C) *de* 2.5.1 *et la condition suivante*:

B′) *Pour tout t la fonction* $x \mapsto F(t, x)$ *est continûment différentiable sur la section* $G_t = \{x \mid (t, x) \in G\}$.

Supposons que $\hat{x}: [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to \mathbf{R}^n$ *est une solution de l'équation* (1) *de* 2.5.5 *dont le graphique* $\Gamma = \{(t, \hat{x}(t)) \mid \hat{t}_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}_1\}$ *est contenu dans G et supposons que* $\hat{\delta}$, ε *et* $\hat{G}$ *sont les mêmes que dans le théorème* 1 *de* 2.5.5; *soit* $\Delta = [\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}]$.

Alors, pour tout $t_0 \in \Delta$ *fixe, l'application* $x_0 \mapsto X(\cdot, t_0, x_0)$ *de* $\overset{\circ}{B}(\hat{x}(t_0), \varepsilon)$ *dans* $C(\Delta, \mathbf{R}^n)$ *est continûment différentiable selon Fréchet et l'on a*

$$\frac{\partial X(t, t_0, x_0)}{\partial x_0} = \Omega(t, t_0), \tag{1}$$

où Ω *est la matrice fondamentale des solutions des équations en variations*

$$\dot{z} = F_x(t, X(t, t_0, x_0))\, z. \tag{2}$$

Démonstration. Supposons que le compact $\mathscr{K}$ et la fonction $k(t)$ sont les mêmes que dans le théorème 1 de 2.5.5. L'ensemble

$$\mathscr{G} = \{x(\cdot) \in C(\Delta, \mathbf{R}^n) \mid (t, x(t)) \in G,\ t \in \Delta\},$$

est évidemment ouvert dans $C(\Delta, \mathbf{R}^n)$. L'égalité

$$\mathscr{F}(x_0, x(\cdot))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds - x(t) \tag{3}$$

définit l'application $\mathscr{F}: \mathbf{R}^n \times \mathscr{G} \to C(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Il est évident que

$$\mathscr{F}(x_0, x(\cdot)) = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv X(t, t_0, x_0). \tag{4}$$

Supposons que $\bar{x}_0 \in \overset{\circ}{B}(\hat{x}(t_0), \varepsilon)$ est fixe et $\bar{x}(t) \equiv X(t, t_0, \bar{x}_0)$. Vérifions que dans un voisinage du point $(\bar{x}_0, \bar{x}(\cdot))$ on peut appliquer le théorème classique des fonctions implicites de 2.3.4. En effet, la fonction $\mathscr{F}_{x_0}(x_0, x(\cdot))[\xi_0] = \xi_0$ est évidemment continue. Calculons maintenant la dérivée de Gâteaux

$$\mathscr{F}_{x(\cdot)}(x_0, x(\cdot))[\xi(\cdot)](t) =$$
$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mathscr{F}(x_0, x(\cdot)+\alpha\xi(\cdot)) - \mathscr{F}(x_0, x(\cdot))}{\alpha}(t) =$$
$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{t_0}^{t} \frac{F(s, x(s)+\alpha\xi(s)) - F(s, x(s))}{\alpha}\, ds - \xi(t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} F_x(s, x(s))\,\xi(s)\, ds - \xi(t). \qquad (5)$$

Pour établir l'existence de la limite uniforme relativement à t, remarquons que d'après le théorème de la moyenne (voir 2.2.3), on a

$$\left| \int_{t_0}^{t} \frac{F(s, x(s)+\alpha\xi(s)) - F(s, x(s))}{\alpha}\, ds - \right.$$
$$\left. - \int_{t_0}^{t} F_x(s, x(s))\,\xi(s)\, ds \right| \leqslant \int_{\Delta} r_\alpha(s)\, ds,$$

où

$$r_\alpha(s) = \max_{c \in [x(s),\, x(s)+\alpha\xi(s)]} \| F_x(s, c) - F_x(s, x(s)) \| \, |\xi(s)|.$$

En vertu de la condition B'), $r_\alpha(s) \to 0$ pour tout s et $\alpha \downarrow 0$, tandis qu'en vertu de (1) de 2.5.1 on a $|r_\alpha(s)| \leqslant 2k(s)\, \|\xi\|$. D'après le théorème de Lebesgue sur la convergence bornée ([KF], p. 295) nous voyons que la limite (5) existe et est uniforme par rapport à t.

L'opérateur

$$\mathscr{F}_{x(\cdot)}(x_0, x(\cdot))[\xi(\cdot)](t) = \int_{t_0}^{t} F_x(s, x(s))\,\xi(s)\, ds$$

est borné

$$\| \mathscr{F}_{x(\cdot)}(x_0, x(\cdot))[\xi(\cdot)] \| \leqslant$$
$$\leqslant \max_t \left| \int_{t_0}^{t} \| F_x(s, x(s)) \| \, |\xi(s)|\, ds \right| \leqslant \int_{\Delta} k(s)\, ds\, \|\xi\|$$

et dépend continûment de $(x_0, x(\cdot))$ puisque

$$\|\mathcal{F}_{x(\cdot)}(\tilde{x}_0, \tilde{x}(\cdot))-\mathcal{F}_{x(\cdot)}(x_0, x(\cdot))\| =$$
$$= \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \sup_t \left| \int_{t_0}^t F_x(s, \tilde{x}(s))\,\xi(s)\,ds - \int_{t_0}^t F_x(s, x(s))\,\xi(s)\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Delta \|F_x(s, \tilde{x}(s)) - F_x(s, x(s))\|\,ds.$$

Pour $\|\tilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\| \to 0$, on a en vertu de B′)

$$\|F_x(s, \tilde{x}(s)) - F_x(s, x(s))\| \to 0, \quad \forall s \in \Delta,$$

et en appliquant à nouveau (1) de 2.5.1, on obtient

$$\|F_x(s, \tilde{x}(s)) - F_x(s, x(s))\| \leqslant 2k(s),$$

de sorte que le théorème de Lebesgue est applicable. En nous appuyant sur le corollaire 2 de 2.2.3, nous établissons que la dérivée de Fréchet $\mathcal{F}_{x(\cdot)}$ existe et est continue.

Supposons que $\eta(\cdot) \in C(\Delta, \mathbf{R}^n)$ est arbitraire. En vertu de (5),

$$\mathcal{F}_{x(\cdot)}(x_0, x(\cdot))[\xi(\cdot)] = \eta(\cdot) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^t F_x(s, x(s))\,\xi(s)\,ds - \xi(t) = \eta(t); \tag{6}$$

pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que cette équation possède une solution unique. En substituant $\xi(t) + \eta(t) = \zeta(t)$, nous l'amenons à l'équation intégrale

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t F_x(s, x(s))\,[\zeta(s) - \eta(s)]\,ds,$$

qui à son tour est équivalente à l'équation différentielle linéaire

$$\dot{\zeta}(t) = F_x(t, x(t))\,\zeta(t) - F_x(t, x(t))\,\eta(t); \quad \zeta(t_0) = 0. \tag{7}$$

Il reste à appliquer le lemme de 2.5.4. D'après le théorème de Banach (voir 2.1.5), $\mathcal{F}_{x(\cdot)}^{-1}$ est borné.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application $\varphi\colon U \to C(\Delta, \mathbf{R}^n)$ continûment différentiable dans un voisinage $U \ni \bar{x}_0$ et telle que $\mathcal{F}(x_0, \varphi(x_0)) \equiv 0$. En vertu de (4), $\varphi(x_0)(t) \equiv X(t, t_0, x_0)$ et l'application $x_0 \mapsto X(t, \bar{t}_0, x_0)$ est effectivement différentiable selon Fréchet au point $\bar{x}_0$. D'après le même théorème des fonctions implicites,

$$\frac{\partial X(t, t_0, x_0)}{\partial x_0}\xi_0 = \varphi'(x_0)[\xi_0](t) = -(\mathcal{F}_{x(\cdot)}^{-1} \circ \mathcal{F}_{x_0}[\xi_0])(t) = \xi(t)$$

et, comme nous l'avons déjà prouvé, $\xi(t)$ est la solution de l'équation intégrale (6) qui se met sous la forme

$$\int_{t_0}^{t} F_x(s, x(s))\,\xi(s)\,ds - \xi(t) = -\xi_0.$$

Par conséquent

$$\dot{\xi} = F_x(s, x(s))\,\xi, \quad \xi(t_0) = \xi_0,$$

et, d'après le théorème de 2.5.4, on a $\xi(t) = \Omega(t, t_0)\,\xi_0$. Donc

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) = \Omega(t, t_0). \blacksquare$$

2.5.7. Théorème classique sur la dépendance différentiable des solutions en fonction des données initiales. Dans ce sous-paragraphe, nous envisageons à nouveau le problème de Cauchy

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

mais maintenant dans la situation classique, lorsque $F(t, x)$ et sa dérivée partielle $F_x(t, x)$ sont continues dans G. Pour commodité de lecture, la démonstration du théorème énoncé ci-dessous sera effectuée indépendamment des démonstrations des théorèmes de 2.5.5 et 2.5.6. Les renvois au théorème local d'existence (2.5.2) et le théorème d'unicité (2.5.3) peuvent être remplacés par des renvois à un manuel quelconque d'équations différentielles.

Théorème. *Supposons que la fonction* $F\colon G \to \mathbf{R}^n$ *ainsi que sa dérivée partielle* F_x *sont continues sur l'ensemble ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *et supposons que* $\hat{x}\colon [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to \mathbf{R}^n$ *est la solution de l'équation* (1) *dont le graphique* $\Gamma = \{(t, \hat{x}(t)) \mid \hat{t}_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}_1\}$ *est contenu dans* G.

Il existe alors un $\hat{\delta} > 0$ *et un voisinage* $\hat{G} \supset \Gamma$ *tels que pour tous* $(t_0, x_0) \in \hat{G}$ *la solution* $X(t, t_0, x_0)$ *du problème de Cauchy* (1), (2) *est définie sur* $\Delta = [\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}]$, *est une fonction continûment différentiable de ces variables dans le domaine* $(\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}) \times \times \hat{G}$ *et l'on a*

$$X(t, \tau, \hat{x}(\tau)) = \hat{x}(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, \tau, \hat{x}(\tau)) = F(t, \hat{x}(t)), \tag{4}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t_0}(t,\ t_0,\ \hat{x}(\tau))|_{t_0=\tau} = -\Omega(t,\ \tau)\,F(\tau,\ \hat{x}(\tau)), \tag{5}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(t,\ \tau,\ x_0)|_{x_0=\hat{x}(\tau)} = \Omega(t,\ \tau), \tag{6}$$

où $\Omega(t,\ \tau)$ *est la matrice fondamentale des solutions du système d'équations en variations*

$$\dot{z} = F_x(t,\ \hat{x}(t))\,z.$$

D é m o n s t r a t i o n. A) Ayant appliqué le théorème local d'existence aux points $(\hat{t}_0,\ \hat{x}(\hat{t}_0))$ et $(\hat{t}_1,\ \hat{x}(\hat{t}_1))$, prolongeons $\hat{x}(\cdot)$ à l'intervalle fermé $\Delta = [\hat{t}_0 - \delta,\ \hat{t}_1 + \delta]$ de façon que le graphique $\{(t,\ \hat{x}(t))\,|\,t \in \Delta\}$ soit toujours contenu dans G. Choisissons ensuite un $\varepsilon > 0$ de sorte que

$$\mathscr{K} = \{(t,\ x)\,|\,t \in \Delta,\ |x - \hat{x}(t)| \leqslant \varepsilon\} \subset G.$$

Sur le compact $\mathscr{K}$, les fonctions $F(t,\ x)$ et $F_x(t,\ x)$ sont uniformément continues.

B) Maintenant, dans le domaine

$$\mathscr{G} = \{(x(\cdot),\ t_0,\ x_0)\,|\ |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon,\ \forall t \in \Delta;\quad t_0 \in \operatorname{int}\Delta,\quad x_0 \in \mathbf{R}^n\} \subset C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n,$$

définissons la fonction $\mathscr{F}\colon \mathscr{G} \to C(\Delta,\ \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$ en posant

$$\mathscr{F}(x(\cdot),\ t_0,\ x_0)(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} - F(t,\ x(t)) \\ x(t_0) - x_0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Il est évident que l'égalité $\mathscr{F}(x(\cdot),\ t_0,\ x_0) = 0$ est équivalente au problème de Cauchy (1), (2). En particulier, d'après l'hypothèse du théorème, $\mathscr{F}(\hat{x}(\cdot),\ \tau,\ \hat{x}(\tau)) = 0$.

La fonction $\mathscr{F}$ est continûment différentiable dans le domaine $\mathscr{G}$.

En effet, (7) contient les applications linéaires $x(\cdot) \mapsto dx(\cdot)/dt$, $x_0 \mapsto -x_0$, l'opérateur des conditions aux limites $(x(\cdot),\ t_0) \mapsto x(t_0)$ et l'opérateur de Nemytski $\{x(t)\} \mapsto \{F(t,\ x(t))\}$, qui sont continûment différentiables en vertu des sous-paragraphes 2.4.1, 2.4.3. On a alors

$$\mathscr{F}_{x(\cdot)}(x(\cdot),\ t_0,\ x_0)[\xi(\cdot)] = \begin{pmatrix} \dfrac{d\xi}{dt} - F_x(t,\ x(t))\,\xi \\ \xi(t_0) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathscr{F}_{t_0}(x(\cdot),\ t_0,\ x_0)[\alpha] = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{x}(t_0)\,\alpha \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathcal{F}_{x_0}(x(\cdot),\ t_0,\ x_0)[\xi_0]=\begin{pmatrix}0\\ -\xi_0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

C) Soit $\hat{x}=\hat{x}(\hat{t})$, de sorte que $(\hat{t},\ \hat{x})\in\Gamma$. Vérifions si l'opérateur $\mathcal{F}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t},\ \hat{x})$ est inversible. L'égalité

$$\mathcal{F}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{t},\ \hat{x})[\xi(\cdot)]=\begin{pmatrix}\zeta(\cdot)\\ \gamma\end{pmatrix}\in C(\Delta,\ \mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^n$$

est équivalente au problème de Cauchy

$$\dot{\xi}-F_x(t,\ \hat{x}(t))\,\xi=\zeta(t),\quad \xi(\hat{t})=\gamma, \tag{11}$$

qui, d'après le théorème de 2.5.4, possède la solution

$$\xi(t)=\Omega(t,\ \hat{t})\,\gamma+\int_{\hat{t}}^{t}\Omega(t,\ s)\,\zeta(s)\,ds.$$

Ainsi $\mathcal{F}_{x(\cdot)}$ applique l'espace de Banach $C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$ sur tout l'espace de Banach $C(\Delta,\ \mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^n$. Puisque pour $\zeta(\cdot)=0$ et $\gamma=0$, le problème (11) ne possède que la solution triviale et donc $\mathcal{F}_{x(\cdot)}$ est bijectif. D'après le théorème de Banach (voir 2.1.5), l'opérateur $\mathcal{F}_{x(\cdot)}^{-1}$ existe et il est borné.

D) D'après le théorème classique des fonctions implicites (2.3.4), il existe un $\delta>0$ et une application continûment différentiable

$$\Phi:\ \{(t_0,\ x_0)\mid |t_0-\hat{t}|<\delta,\ |x_0-\hat{x}|<\delta\}\to C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$$

tels que

$$\mathcal{F}(\Phi(t_0,\ x_0),\ t_0,\ x_0)\equiv 0.$$

Désignons

$$X(t,\ t_0,\ x_0)=\Phi(t_0,\ x_0)(t).$$

Alors $X(t,\ t_0,\ x_0)$ est la solution du problème de Cauchy (1), (2) et l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial t}=F(t,\ X(t,\ t_0,\ x_0)), \tag{12}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t_0}=\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}(t_0,\ x_0)(t), \tag{13}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}(t_0,\ x_0)(t). \tag{14}$$

Si $(\tilde{t}_0,\ \tilde{x}_0)\to(t_0,\ x_0)$, alors $\Phi(\tilde{t}_0,\ \tilde{x}_0)\to\Phi(t_0,\ x_0)$ dans $C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$, i. e. $X(t,\ \tilde{t}_0,\ \tilde{x}_0)\to X(t,\ t_0,\ x_0)$ uniformément sur Δ. D'où l'on déduit la continuité de $X(t,\ t_0,\ x_0)$ relativement à l'ensemble de ces arguments. Le même raisonnement et les formules (12) à (14)

montrent que les dérivées de la fonction $X(t, t_0, x_0)$ sont également continues.

E) Les raisonnements précédents étaient applicables aux conditions initiales (t_0, x_0) situées dans un δ-voisinage du point $(\hat{t}, \hat{x}) \in \Gamma$. Ce point était arbitraire, et l'on peut donc recouvrir tout le graphique Γ par de tels voisinages. Si $X^{(1)}(t, t_0, x_0)$ et $X^{(2)}(t, t_0, x_0)$ sont définies dans deux de ces voisinages qui possèdent un point commun (t_0, x_0), alors

$$X^{(1)}(t_0, t_0, x_0) = x_0 = X^{(2)}(t_0, t_0, x_0)$$

et, d'après le théorème d'unicité de 2.5.3,

$$X^{(1)}(t, t_0, x_0) = X^{(2)}(t, t_0, x_0), \ \forall t \in \Delta.$$

Par conséquent, $X(t, t_0, x_0)$ est bien définie pour tout (t_0, x_0) appartenant à un certain voisinage de Γ, c'est donc une fonction continûment différentiable dans ce voisinage.

F) Il ne reste qu'à obtenir les formules (3) à (6). L'égalité (3) s'obtient du théorème d'unicité, alors (4) est une conséquence de (12). D'après le théorème des fonctions implicites,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t_0, x_0) = -\mathscr{F}^{-1}_{x(\cdot)} \circ \mathscr{F}_{t_0},$$

et donc (13) et (9) nous donnent

$$\frac{\partial X}{\partial t_0}(t, \tau, \hat{x}(\tau))[\alpha] = -\mathscr{F}^{-1}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot), \tau, \hat{x}(\tau)) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\hat{x}}(\tau)\alpha \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\frac{\partial X}{\partial t_0}(t, \tau, \hat{x}(\tau))$ est une solution du problème de Cauchy (11) relativement à t avec $\zeta = 0$ et $\gamma = -\dot{\hat{x}}(\tau) = -F(\tau, \hat{x}(\tau))$; on a donc (5).

D'une manière analogue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}(t_0, x_0) = -\mathscr{F}^{-1}_{x(\cdot)} \circ \mathscr{F}_{x_0},$$

et on obtient donc de (14) et (10)

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(t, \tau, \hat{x}(\tau))[\gamma] = -\mathscr{F}^{-1}_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot), \tau, \hat{x}(\tau)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\frac{\partial X}{\partial x_0}(t, \tau, \hat{x}(\tau))$ est une solution du problème de Cauchy (11) relativement à t avec $\zeta = 0$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(t, \tau, \hat{x}(\tau))[\gamma] = \Omega(t, \tau)\gamma,$$

ce qui est équivalent à (6). ■

§ 2.6*. Eléments d'analyse convexe

L'analyse convexe est la branche des mathématiques qui étudie les ensembles et les fonctions convexes. Le rôle de ces notions a déjà été exhibé dans 1.3.3 (théorème de Kuhn-Tucker) et, vu que dans la majorité des travaux contemporains sur les problèmes d'extrémum la convexité joue un rôle important, nous donnons ici, en outre des notions élémentaires, une esquisse de la théorie de dualité (théorème de Fenchel-Moreau) et envisageons les plus simples propriétés de la subdifférentielle, notion qui généralise au cas des fonctions convexes la notion de différentielle. Dans les §§ 3.3, 3.4, 4.3, nous montrerons comment ces notions sont appliquées. L'exposition du présent paragraphe se base sur les sous-paragraphes 2.1.3 et 2.1.4.

2.6.1. Principales définitions. Soit X un espace vectoriel réel.

Définition 1. a) L'ensemble $C \subset X$ est appelé *convexe* s'il contient, avec chaque paire de ses points x_1 et x_2, tout le segment

$$[x_1, x_2] = \{x \mid x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

b) L'ensemble $A \subset X$ est une *variété affine* s'il contient, avec chaque paire de ses points x_1 et x_2 toute la droite

$$\{x \mid x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \quad \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

c) L'ensemble $K \subset X$ est un *cône* (à sommet à l'origine), s'il contient, avec chacun de ses points x_0, toute la demi-droite

$$\{\alpha x_0 \mid \alpha > 0\}.$$

L'ensemble vide est, par définition, un ensemble convexe, une variété affine et un cône. L'ensemble de tous les ensembles convexes de X est désigné par $\mathfrak{B}(X)$.

La proposition suivante découle immédiatement de la définition 1.

Proposition 1. a) *L'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles convexes (respectivement variétés affines ou cônes) est elle-même un ensemble convexe (respectivement une variété affine ou un cône).*

b) *L'image $f(A)$ et l'image inverse $f^{-1}(B)$ d'ensembles convexes (variétés affines, cônes) $A \subset X$, $B \subset Y$ pour une application linéaire $f: X \to Y$ est un ensemble convexe (une variété affine, un cône).*

c) *Toute translation $C + \xi$ d'un ensemble convexe C (d'une variété affine) donne un ensemble convexe (une variété affine).*

d) *Un cône K est un ensemble convexe si et seulement si*

$$x_1, x_2 \in K \Rightarrow (x_1 + x_2) \in K.$$

e) *Une variété affine A est un sous-espace vectoriel de X si et seulement si $0 \in A$.*

Exercice 1. Démontrer que toute variété affine s'obtient par translation d'un sous-espace vectoriel.

Définition 2. a) L'intersection de tous les ensembles convexes C qui contiennent l'ensemble donné M est appelée *enveloppe convexe* de l'ensemble M et notée conv M;

$$\operatorname{conv} M = \bigcap_{C \supset M} C, \quad C \in \mathfrak{B}(M). \tag{1}$$

b) Si dans (1) on remplace les ensembles convexes par tous les cônes convexes $K \supset M$ (les variétés affines $A \supset M$, les sous-espaces vectoriels $L \supset M$), alors l'intersection s'appelle *enveloppe conique* (respectivement *affine* ou *linéaire*) de M, on la désigne par cone M (aff M, lin M).

Définition 3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de X. L'élément

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{2}$$

est appelé *combinaison linéaire*, *affine*, *conique* ou *convexe* des éléments $x_1, \ldots, x_n$ si dans (2) on a respectivement:

pour la combinaison linéaire: les λ_i sont arbitraires,

pour la combinaison affine: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

pour la combinaison conique : $\lambda_i \geqslant 0$,

pour la combinaison convexe : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$.

On démontre par récurrence que si les $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à un ensemble convexe C (à un cône convexe K, à une variété affine A ou à un sous-espace vectoriel L), alors leur combinaison convexe (conique, linéaire ou affine) appartient respectivement à C, K, A ou L.

Proposition 2. a) *L'enveloppe convexe (conique, affine ou linéaire) de l'ensemble M consiste de toutes les combinaisons convexes (coniques, affines ou linéaires) des éléments de M.*

b) *L'ensemble M est convexe (est un cône convexe, une variété affine ou un sous-espace vectoriel) si et seulement s'il coïncide avec son enveloppe convexe (conique, affine ou linéaire).*

La démonstration sera effectuée pour un ensemble convexe M, les autres cas sont similaires. Désignons par $\widetilde{M}$ l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des points de M. L'ensemble $\widetilde{M}$ est contenu dans M et il est convexe, puisque

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{i1} x_{i1}, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{i2} x_{i2}, \quad \alpha_{ij} \geqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ij} = 1, \quad j = 1, 2,$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$ implique

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2 = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha\alpha_{i1}x_{i1} + \sum_{i=1}^{m_2} (1-\alpha)\,\alpha_{i2}x_{i2},$$

et cette dernière somme est une combinaison convexe des points $x_{11}, \ldots, x_{m_1 1}, x_{12}, \ldots, x_{m_2 2}$. Par conséquent, conv $M \subset \widetilde{M}$ (car conv M est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant M). D'autre part, comme nous l'avons remarqué plus haut, chaque point de $\widetilde{M}$ est contenu dans tout ensemble convexe qui contient M et donc $\widetilde{M} \subset$ conv M.

Si M est convexe, on peut prendre $C = M$ dans (1) et alors, évidemment, conv $M = M$. Réciproquement, si conv $M = M$, M est convexe par définition de l'enveloppe convexe et en vertu de la proposition 1 a). ■

E x e r c i c e 2. Démontrer que la somme arithmétique

$$M_1 + \ldots + M_n = \left\{x \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad x_i \in M, \quad i = 1, \ldots, n\right\}$$

d'un nombre fini d'ensembles convexes (de cônes, de variétés affines, de sous-espaces vectoriels) possède la même propriété.

E x e m p l e s. 1) Les ensembles convexes non vides de la droite sont les ensembles constitués par un seul point et les intervalles de toutes sortes (intervalles fermés et ouverts, demi-intervalles, demi-droites ouvertes et fermées et la droite tout entière).

2) Tout sous-espace vectoriel ou variété affine est un ensemble convexe.

E x e r c i c e 3. Démontrer ces assertions.

3) On appelle *polyèdre convexe* l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un cas particulier très important est le *simplexe de dimension n*, i.e. l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement indépendants (aucun d'eux n'est une combinaison affine des autres).

E x e r c i c e 4. Démontrer que l'enveloppe convexe de trois points de $\mathbf{R}^2$ non situés sur une même droite (le simplexe de dimension 2) est le triangle à sommets en ces points. Qu'obtiendra-t-on si les points sont sur une même droite?

Dans un espace de dimension finie, on peut renforcer la proposition 2. Nous appellerons l'assertion correspondante *théorème de Carathéodory* quoique, strictement parlant, ce titre ne devrait se rapporter qu'à la partie où il s'agit de l'enveloppe convexe.

T h é o r è m e d e C a r a t h é o d o r y. *Supposons que* $n = \dim(\mathrm{lin}\, A) < \infty$. *Chaque point qui appartient à l'enveloppe con-*

vexe (conique, affine ou linéaire) de l'ensemble A est une combinaison convexe (conique, affine ou linéaire) d'au plus s points $x_1, \ldots, x_s$ de A.

Pour les enveloppes convexe et affine, $s = n + 1$, et les points $x_1, \ldots, x_s$ peuvent être supposés affinement indépendants.

Pour les enveloppes conique et linéaire, $s = n$, et les points $x_1, \ldots$ $\ldots, x_s$ peuvent être supposés linéairement indépendants.

Démonstration. A) Nous nous limiterons au cas le plus difficile de l'enveloppe convexe, pour indiquer ensuite quelles sont les modifications à introduire dans la démonstration des trois autres cas.

D'après la proposition 2 a), chaque $x \in \operatorname{conv} A$ se met sous la forme

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \quad \lambda_k > 0,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad x_i \in A \tag{3}$$

(dans la définition de la combinaison convexe, on a $\lambda_i \geqslant 0$, mais il est clair que l'on peut omettre les $\lambda_i = 0$).

Montrons que si les $x_1, \ldots, x_k$ sont affinement dépendants, le nombre de points dans cette famille peut être rendu plus petit, tout en conservant une représentation de la forme (3). En effet, si les points $x_1, \ldots, x_k$ sont affinement dépendants, alors l'un d'eux est la combinaison affine des autres; sans perte de généralité on peut écrire

$$x_k = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_{k-1} x_{k-1}, \quad \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i = 1.$$

Posons encore $\mu_k = -1$, on a $\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$. Soit maintenant

$$\alpha = \min \left\{ -\frac{\lambda_i}{\mu_i} \,|\, \mu_i < 0 \right\}.$$

Alors

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \alpha\mu_i) x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i x_i,$$

où tous les λ'_i sont non négatifs d'après le choix de α et au moins un d'entre eux est nul. Eliminant de la suite $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ceux des x_i pour lesquels $\lambda'_i = 0$, nous obtenons une représentation de la forme (3), avec un plus petit nombre de points $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda'_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \right.$ $\left. + \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1\right)$.

Désignons maintenant par $s(x)$ le plus petit nombre d'éléments de la suite $\{x_1, \ldots, x_k\}$ pour lequel la représentation (3) est possible (tout ensemble non vide d'entiers naturels possède un plus petit élément). Le raisonnement que nous venons d'effectuer montre que les points de la suite $\{x_1, \ldots, x_{s(x)}\}$ doivent être affinement indépendants. Il ne reste qu'à remarquer que dans l'espace à n dimensions tout ensemble de $n+2$ points $\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}$ est affinement dépendant. En effet, les points $x_i - x_{n+2}$, $i = 1, \ldots, n+1$, doivent être linéairement dépendants et si l'on pose, par exemple

$$x_{n+1} - x_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{n+2}),$$

on obtient

$$x_{n+1} = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Puisque $1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on voit que x_{n+1} est une combinaison affine des autres points.

B) Pour le cas de l'enveloppe affine, dans le raisonnement ci-dessus il faut omettre tout ce qui concerne les inégalités $\lambda_i > 0$, $\lambda_i' \geqslant 0$ et on peut poser $\alpha = -\lambda_i/\mu_i$ pour tout i tel que $\mu_i \neq 0$.

Dans les deux autres cas, les combinaisons affines sont remplacées par des combinaisons linéaires et le nombre de points linéairement indépendants ne peut être supérieur à n. Pour l'enveloppe conique, on conserve le raisonnement avec les inégalités; pour l'enveloppe linéaire on peut l'omettre. ■

Passons à la description des fonctions convexes. Ici, comme dans la suite du présent paragraphe, nous entendrons par fonction toute application $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, où $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est la droite augmentée [1]).

---

[1]) Les opérations arithmétiques et les inégalités auxquelles participent les nombres impropres $+\infty$ et $-\infty$ se définissent de la manière suivante (ici $a \in \mathbf{R}$ est quelconque et $p > 0$):

$$\begin{array}{rlll} (+\infty) + (+\infty) = +\infty, & (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty, & +\infty > a, \\ \pm\infty + a = \pm\infty, & (-\infty)(\pm\infty) = \mp\infty, & -\infty < a, \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty, & (\pm\infty)\cdot p = \pm\infty, & +\infty > -\infty, \\ -(+\infty) = -\infty, & (\pm\infty)\cdot 0 = 0, & \\ -(-\infty) = +\infty, & (\pm\infty)\cdot(-p) = \mp\infty; & \end{array}$$

les expressions $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ sont déclarées dénuées de sens; on ne définit pas non plus la division par les nombres impropres.

A chaque fonction on peut faire correspondre deux ensembles

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\},$$

$$\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R} \mid \alpha \geqslant f(x), \quad x \in \operatorname{dom} f\},$$

que l'on appelle respectivement *ensemble dominé* et *épigraphe de la fonction f.*

Exercice 5. Démontrer que l'ensemble $C \subset X \times \mathbf{R}$ est l'épigraphe d'une certaine fonction $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\forall x$, $\{\alpha \mid (\alpha, x) \in C\}$ est $\varnothing$, $\mathbf{R}$ ou $[a, +\infty)$, $\exists a$.

Définition 4. La fonction f, pour laquelle $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$ et partout $f(x) > -\infty$, est dite *propre*, les autres fonctions sont appelées *impropres*. La fonction $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ sur l'espace vectoriel X est dite *convexe*, si $\operatorname{epi} f$ est un ensemble convexe dans $X \times \mathbf{R}$. L'ensemble de toutes les fonctions convexes sur X est désigné par $\mathscr{V}(X)$.

On déduit immédiatement de cette définition la

Proposition 3. a) *Pour qu'une fonction propre f soit convexe, il est nécessaire et suffisant que pour tous points* $x_i \in \operatorname{dom} f$ *et tous les* $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ *vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ *on ait l'inégalité de Jenssen*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_i). \tag{4}$$

b) *La somme* $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ *d'un nombre fini et la borne supérieure* $\bigvee_\alpha f_\alpha(x) = \sup\limits_\alpha \{f_\alpha(x)\}$ *d'une famille quelconque de fonctions convexes sont convexes.*

Exemples. 1) Fonctions convexes sur la droite. Soit $f_0(x)\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, la dérivée $f_0'(x)$ étant définie et non décroissante sur l'intervalle ouvert $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbf{R}$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in (\alpha, \beta), \\ +\infty, & x \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Pour cette fonction $\operatorname{dom} f = (\alpha, \beta)$. Vérifions qu'elle est convexe. Un point quelconque du segment qui joint les points $(x_i, z_i) \in \operatorname{epi} f$, $i = 1, 2$, est de la forme $(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2)$, $\alpha \in [0, 1]$. Appliquons la formule de Lagrange

$$\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2 - f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) =$$
$$= \alpha f'(c_1)(x_1 - (\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)) +$$

$$+ (1 - \alpha) f'(c_2)(x_2 - (\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)) =$$
$$= \alpha (1 - \alpha)(f'(c_1) - f'(c_2))(x_1 - x_2) \geqslant 0,$$

puisque $x_1 \leqslant c_1 \leqslant \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \leqslant c_2 \leqslant x_2$ et la dérivée est non décroissante par hypothèse. Par conséquent, $(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2) \in \text{epi } f$, et f est convexe. ■

Exercice 6. Supposons que la fonction convexe $f: \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ est finie sur l'intervalle ouvert $I = (\alpha, \beta)$. Démontrer que f est continue sur I et possède en chaque point $x \in I$ des dérivées à droite et à gauche $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ qui sont non décroissantes sur I et coïncident partout, sauf dans un ensemble de points au plus dénombrable.

2) Supposons que sur l'ensemble ouvert convexe U de l'espace normé X la fonction f_0 est de classe C^2 (voir 2.2.5) et sa différentielle seconde $d^2 f_0 = f_0''(x)[\xi, \xi]$ est non négative. Comme dans l'exemple précédent, posons

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in U, \\ +\infty, & x \notin U. \end{cases}$$

La restriction de cette fonction à toute droite de X possède les mêmes propriétés que les fonctions envisagées dans l'exemple précédent (démontrez-le !). Par conséquent, f est convexe (pour vérifier la convexité de epi f, il suffit de se limiter à toutes les sections de cet ensemble par des plans verticaux de dimension 2 dans $X \times \mathbf{R}$).

Ces exemples nous donnent un grand nombre de fonctions convexes concrètes. Telles seront sur $\mathbf{R}$ les fonctions e^x, $ax^2 + bx + c$ pour $a \geqslant 0$, $-\ln x$ (prolongée par la valeur $+\infty$ pour $x \leqslant 0$), etc. Dans l'espace euclidien, la fonction quadratique $f(x) = (Ax \mid x) + (b \mid x) + c$, où A est un opérateur symétrique défini positif, est convexe.

3) *Indicatrice.* C'est ainsi que l'on appelle la fonction

$$\delta A(x) = \begin{cases} +\infty, & x \notin A, \\ 0, & x \in A. \end{cases}$$

Il est clair que $\delta A(x) \in \mathscr{F}(X)$ si et seulement si $A \in \mathfrak{B}(X)$.

4) *Fonction de Minkowski* (voir 2.1.3).

L'inégalité de Jenssen (4) est la source de nombreuses inégalités que l'on emploie dans diverses branches des mathématiques. En particulier, si on l'applique (en posant $\alpha_i = 1/n$) aux fonctions

$$f_1(x) = \begin{cases} -\ln x, & x > 0, \\ +\infty, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ +\infty, & x < 0, \end{cases}$$

on obtient dans le premier cas l'inégalité bien connue de Cauchy entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, et dans le deuxième, l'inégalité sur l'entropie de la distribution $(p_1, \ldots, p_n)$ importante en théorie des probabilités, où $p_i = x_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geqslant 0$,

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \leqslant \ln n.$$

2.6.2. Ensembles et fonctions convexes dans les espaces vectoriels topologiques. Supposons maintenant que X est un espace vectoriel topologique localement convexe ([KF], chapitre III, § 5). Il est bien connu que dans ce cas l'espace dual X^*, qui consiste de toutes les fonctionnelles linéaires continues, est suffisamment riche (voir le même livre, chapitre IV, §§ 1-2), ce qui nous donne un grand nombre d'ensembles et de fonctions convexes.

Les ensembles convexes les plus simples dans X sont les hyperplans et les demi-espaces (ici $x^* \in X^*$)

$$H(x^*, \alpha) = \{x \mid \langle x^*, x\rangle = \alpha\} \quad \textit{hyperplan},$$

$$\left.\begin{array}{l} H_+(x^*, \alpha) = \{x \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant \alpha\} \\ H_-(x^*, \alpha) = \{x \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant \alpha\} \end{array}\right\} \textit{demi-espaces fermés},$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathring{H}_-(x^*, \alpha) = \{x \mid \langle x^*, x\rangle < \alpha\} \\ \mathring{H}_-(x^*, \alpha) = \{x \mid \langle x^*, x\rangle > \alpha\} \end{array}\right\} \textit{demi-espaces ouverts}.$$

E x e r c i c e 1. Vérifier que ces ensembles sont effectivement convexes.

Ensuite, appelons *polyèdre convexe* l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés (notons que cette intersection n'est pas nécessairement un ensemble borné).

E x e r c i c e 2. Démontrer que dans $\mathbf{R}^n$ tout polyèdre convexe dans le sens de 2.6.1 est un polyèdre convexe dans le sens de la définition précédente et que chaque polyèdre convexe borné est un polyèdre convexe.

Faisons maintenant une liste des propriétés topologiques des ensembles convexes qui nous sera nécessaire par la suite (pour les définitions des termes topologiques, voir [KF]).

P r o p o s i t i o n 1. *Soit* A *un ensemble convexe*; *alors*:

a) *tous les points du demi-intervalle* $[x_1, x_2)$, *où* $x_1 \in \operatorname{int} A$, $x_2 \in A$, *appartiennent à* $\operatorname{int} A$;

b) *l'intérieur* $\operatorname{int} A$ *et l'adhérence* $\bar{A}$ *de l'ensemble* A *sont convexes*; *si* $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, *alors* $\bar{A} = \overline{\operatorname{int} A}$.

D é m o n s t r a t i o n. a) Soit $V \subset A$ un voisinage convexe du point x_1. Un point arbitraire $x \in [x_1, x_2)$ est de la forme $x =$

$= \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, $0 < \alpha \leqslant 1$, et $\alpha V + (1 - \alpha) x_2$ est son voisinage contenu dans A, i.e. $x \in \operatorname{int} A$.

Il découle de l'assertion a) que $A \subset \overline{\operatorname{int} A}$, lorsque $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, d'où $\bar{A} \subset \overline{\operatorname{int} A}$. L'inclusion inverse est évidente.

b) Si $x_i \in \operatorname{int} A$, $i = 1, 2$, alors, en vertu de a), on a $[x_1, x_2] \in \operatorname{int} A$, i.e. $\operatorname{int} A$ est convexe. Supposons maintenant que $x_i \in \bar{A}$, $i = 1, 2$. Prenons un voisinage convexe quelconque du zéro de V. Par définition de l'adhérence, on peut trouver des points $x_i' \in (x_i + V) \cap A$, $i = 1, 2$. Pour tout point $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in [x_1, x_2]$, posons $x' = \alpha x_1' + (1 - \alpha) x_2'$. Alors $x' \in A$ et $x' \in \alpha (x_1 + V) + (1 - \alpha)(x_2 + V) = x + V$, i.e. chaque voisinage du point x contient des points de A, d'où l'on tire $x \in \bar{A}$ et le fait que $\bar{A}$ est convexe. ■

D é f i n i t i o n 1. L'intersection de tous les ensembles fermés convexes qui contiennent l'ensemble A est appelée *adhérence convexe* de l'ensemble A ; on la note $\overline{\operatorname{conv}} A$.

Il est clair que $\overline{\operatorname{conv}} A$ est convexe et fermé.

P r o p o s i t i o n 2. a) $\overline{\operatorname{conv}} A = A \Leftrightarrow$ *l'ensemble A est convexe et fermé ;*

b) $\overline{\operatorname{conv}} A$ *coïncide avec l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui contiennent A ;*

c) $\overline{\operatorname{conv}} A = \overline{\operatorname{conv}} \bar{A}$.

D é m o n s t r a t i o n. La première assertion découle immédiatement de la définition. L'inclusion $\operatorname{conv} A \subset \overline{\operatorname{conv}} A$ est également évidente (un ensemble convexe quelconque contenant A n'est pas nécessairement fermé), et donc $\overline{\operatorname{conv} A} \subset \overline{\operatorname{conv}} A$. D'autre part, $\overline{\operatorname{conv}} \bar{A}$, étant un ensemble convexe (proposition 1b)), fermé et contenant A, doit par définition contenir également $\overline{\operatorname{conv}} A$, de sorte que $\overline{\operatorname{conv}} \bar{A} = \overline{\operatorname{conv}} A$.

Désignons maintenant par B l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui contiennent A. Alors $\overline{\operatorname{conv}} A \subset B$ (un ensemble fermé convexe arbitraire contenant A n'est pas nécessairement un demi-espace).

Supposons que le point x_0 n'appartient pas à $\overline{\operatorname{conv}} A$. D'après le deuxième théorème de séparabilité (voir 2.1.4), il existe une fonctionnelle linéaire $x^* \in X^*$ qui sépare strictement x_0 et $\overline{\operatorname{conv}} A$

$$\langle x^*, x_0 \rangle > \sup_{x \in \overline{\operatorname{conv}} A} \langle x^*, x \rangle = \alpha.$$

On a donc $x_0 \notin H_+(x^*, \alpha) \supset \overline{\operatorname{conv}} A \supset A$ et, par conséquent, $x_0 \notin B$. Ainsi $\overline{\operatorname{conv}} A = B$. ■

14—0237

Exercice 3. Dans l'espace hilbertien l_2 envisageons l'ellipsoïde de dimension infinie

$$B = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} (x_n/a_n)^2 \leqslant 1 \right\}$$

à demi-axes a_n.

a) Démontrer que l'ensemble B est convexe et fermé.

b) Trouver des conditions (imposées sur a_n) pour lesquelles $\operatorname{int} B \neq \varnothing$.

c) Supposons que $\operatorname{int} B \neq \varnothing$, le point $y = (y_1, y_2, \ldots)$ étant situé sur la frontière de l'ellipsoïde, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n/a_n)^2 = 1$. Démontrer que l'on peut construire un hyperplan passant par y de manière que B soit situé d'un seul de ses côtés.

d) L'assertion précédente est-elle toujours vraie si $\operatorname{int} B = \varnothing$?

De même que les ensembles convexes les plus simples sont les demi-espaces, les fonctions convexes les plus simples sont les *fonctions affines*

$$a(x) = \langle x^*, x \rangle - b, \quad x^* \in X, \quad b \in \mathbf{R}.$$

Exercice 4. Démontrer que $a(\cdot)$ est convexe; trouver epi a.

Les propositions 1 et 2 possèdent ici des variantes analogues. C'est à leur énoncé que nous passons.

Définition 2. Soit $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$. La fonction $\bar{f}$ définie par la condition $\operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$ est appelée *adhérence* de la fonction f; si $f = \bar{f}$ on dit que la fonction est *fermée*. La fonction $\overline{\operatorname{conv}} f$ définie par la condition $\operatorname{epi} (\overline{\operatorname{conv}} f) = \overline{\operatorname{conv}} (\operatorname{epi} f)$ est appelée *adhérence convexe* de la fonction f.

Exercice 5. Vérifier que $\overline{\operatorname{epi} f}$ et $\overline{\operatorname{conv}} f$ sont les épigraphes de certaines fonctions (voir l'exercice 5 de 2.6.1).

Il est clair que $\overline{\operatorname{conv}} f = f \Leftrightarrow f$ est convexe et fermée.

Rappelons également qu'une fonction $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ est dite *semi-continue inférieurement au point* x_0 si $\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$ et tout simplement *semi-continue inférieurement* si cette inégalité est vérifiée pour tout x_0.

Exercice 6. Démontrer que $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement si et seulement si, pour tout $c \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\mathscr{L}_c f = \{x \mid f(x) \leqslant c\}$ est fermé dans X.

Proposition 3. a) *Pour qu'une fonction propre soit fermée il faut et il suffit qu'elle soit semi-continue inférieurement.*

b) *Pour qu'une fonction convexe f soit continue sur* $\operatorname{int} \operatorname{dom} f$, *il suffit que f soit bornée d'en haut dans un voisinage U d'un certain point $\bar{x}$ et finie au point $\bar{x}$.*

De plus f est propre, int dom $f \neq \varnothing$,

$$\operatorname{int} \operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R} \mid x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f, \quad \alpha > f(x)\} \neq \varnothing$$

et

$$f(x) = \overline{(\operatorname{conv} f)}(x), \quad \forall x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f.$$

D'après l'exercice 6, il faut vérifier que l'ensemble $\mathcal{L}_c f$ est fermé.

D é m o n s t r a t i o n. A) Soit f une fonction fermée. Alors epi f est un ensemble fermé dans $X \times \mathbf{R}$. L'hyperplan $H = \{(x, \alpha) \mid \alpha = c\}$ est également fermé. Par conséquent, il en est de même pour l'ensemble $\mathcal{L}_c f = \{x \mid f(x) \leqslant c\}$, car $\operatorname{epi} f \cap H = \{(x, c) \mid x \in \mathcal{L}_c f\}$ et l'application $x \mapsto (x, c)$ est un homéomorphisme.

Supposons au contraire que tous les $\mathcal{L}_c f$ sont fermés et $(x_0, \alpha_0) \notin \operatorname{epi} f$. Alors $f(x_0) > \alpha_0$ et, par conséquent, $f(x_0) > \alpha_0 + \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et $x_0 \notin \mathcal{L}_{\alpha_0+\varepsilon} f$. Puisque $\mathcal{L}_{\alpha_0+\varepsilon} f$ est fermé, il existe un voisinage $V \ni x_0$ tel que $V \cap \mathcal{L}_{\alpha_0+\varepsilon} f = \varnothing$, i.e. $f(x) > \alpha_0 + \varepsilon$, $x \in V$. L'ensemble ouvert $\{(x, \alpha) \mid x \in V, \alpha < \alpha_0 + \varepsilon\}$ contient (x_0, α_0) et n'a pas de points communs avec epi f. Par conséquent, le complément de epi f est ouvert, tandis que l'ensemble epi f lui-même est fermé.

B) L e m m e. *Soient X un espace localement convexe, V un voisinage convexe du point $\bar{x}$ dans X, f une fonction convexe sur X qui prend au point $\bar{x} \in V$ une valeur finie ($f(\bar{x}) \neq -\infty$) étant bornée d'en haut dans V. Alors f est continue au point $\bar{x}$.*

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. En effectuant la translation $x \mapsto x + \bar{x}$ et en soustrayant la constante $f(\bar{x})$ de f, nous pouvons réduire le lemme au cas où $\bar{x} = 0$, $0 \in V$, $f(0) = 0$, $\sup\limits_{x \in V} f(x) \leqslant C$. Alors V peut être considéré comme étant un voisinage symétrique de zéro (autrement nous aurions considéré $W = V \cap (-V)$). Supposons que $0 < \alpha < 1$ et $x \in \alpha V$. Alors $x/\alpha \in V$ et, f étant convexe, nous avons

$$f(x) = f((1 - \alpha) 0 + \alpha x/\alpha) \leqslant (1 - \alpha) f(0) + \alpha f(x/\alpha) \leqslant \alpha C.$$

D'autre part, $-x/\alpha \in V$, vu la symétrie de V, et en utilisant l'égalité $0 = x/(1 + \alpha) + \alpha/(1 + \alpha)(-x/\alpha)$ et la convexité de f, nous obtenons

$$0 = f(0) = f(x/(1 + \alpha) + \alpha/(1 + \alpha)(-x/\alpha)) \leqslant$$
$$\leqslant 1/(1 + \alpha) f(x) + \alpha/(1 + \alpha) f(-x/\alpha),$$

donc $f(x) \geqslant -\alpha f(-x/\alpha) \geqslant -\alpha C$.

Ainsi, si $x \in \alpha V$, alors $|f(x)| \leqslant \alpha C$, i.e. f est continue au point zéro. ■

C o r o l l a i r e. *Dans les hypothèses du lemme*, int dom $f \neq \varnothing$.

C) Revenons à la démonstration de la partie b) de la proposition 3. En vertu du lemme et de son corollaire, f est continue dans $\bar{x}$ et int dom $f \neq \varnothing$.

Supposons que $f(y) = -\infty$ en un certain point y, i.e. pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ le point (y, α) appartient à epi f. Puisque epi f est convexe, on a

$$((1-\lambda)\bar{x} + \lambda y, \quad (1-\lambda) f(\bar{x}) + \lambda\alpha) \in \text{epi } f,$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, d'où l'on tire $f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda y) = -\infty$, ce qui est en contradiction avec la continuité de f en $\bar{x}$ si l'on prend $\lambda \downarrow 0$. Ainsi $f(y) > -\infty$ partout, i.e. f est propre.

Supposons maintenant que $y \in \text{int dom } f$. Trouvons un $\rho > 1$ de manière à avoir $z = \bar{x} + \rho(y - \bar{x}) \in \text{int dom } f$ (ce qui est possible, car l'intersection de l'ouvert int dom f avec la droite qui passe par $\bar{x}$ et y est un intervalle ouvert de cette droite). L'homothétie G de centre z et de rapport $(\rho - 1)/\rho$ transforme $\bar{x}$ dans y et le voisinage V dans un voisinage V' du point y. Alors, si $\zeta \in G(V) = V'$, on a $\zeta = (\rho - 1)/\rho\tilde{x} + z/\rho$, $\tilde{x} \in V$ et

$$f(\zeta) \leqslant \frac{\rho-1}{\rho} f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho} f(z) \leqslant \frac{\rho-1}{\rho} C + \frac{1}{\rho} f(z),$$

par conséquent f est continue au point y d'après le lemme, i.e. f est continue sur int dom f.

Si $(x_0, \alpha_0) \in \text{int epi } f$, alors, par définition, on peut trouver un voisinage W du point x_0 et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{(x, \alpha) \mid x \in W, \quad |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\} \subset \text{epi } f,$$

d'où $x_0 \in \text{int dom } f$ et $\alpha_0 > f(x_0)$. L'inclusion inverse

$$\{(x, \alpha) \mid x \in \text{int dom } f, \ \alpha > f(x)\} \subset \text{int epi } f$$

est évidente; en particulier int epi $f \neq \varnothing$.

Puisque f est convexe, conv (epi f) = epi f. En se rappelant la définition 2 et la proposition 2 c), on peut écrire

$$\text{epi } (\overline{\text{conv}} f) = \overline{\text{conv}} (\text{epi } f) = \overline{\text{conv } (\text{epi } f)} = \overline{\text{epi } (f)} \supset \text{epi } (f).$$

Par conséquent, on a toujours $(\overline{\text{conv}} f)(x) \leqslant f(x)$. Si f est continue au point x (ou au moins semi-continue inférieurement), tandis que $f(x) > \alpha$, on a cette même inégalité dans tout un voisinage du point x, de sorte que $(x, \alpha) \notin \overline{\text{epi } f} = \text{epi } (\overline{\text{conv}} f)$ et $(\overline{\text{conv}} f)(x) > \alpha$. Par conséquent, $(\overline{\text{conv}} f)(x) = f(x)$. En particulier, dans les hypothèses de la partie b) de l'assertion que nous démontrons, cette égalité est valable pour tout $x \in \text{int (dom } f)$. ■

E x e r c i c e 7. Supposons que f est convexe sur X et $f(\bar{x}) = -\infty$ en un certain point $\bar{x} \in \text{int dom } f$. Alors $f(x) \equiv -\infty$, $\forall x \in \text{int dom } f$.

D é f i n i t i o n 3. La fonction affine $a(x) = \langle x^*, x\rangle - b$ est appelée *fonction d'appui* pour la fonction f si

a) $a(x) \leqslant f(x)$ pour tous les x;

b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un x tel que $a(x) > f(x) - \varepsilon$. Autrement dit,

$$b = \sup_x \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}. \tag{1}$$

Théorème de Minkowski. *Une fonction propre f est convexe et fermée si et seulement si elle est la borne supérieure de l'ensemble de toutes ses fonctions d'appui affines.*

Démonstration. 1) « Si ». Une fonction affine est toujours convexe et fermée puisque son épigraphe est un demi-espace fermé. En outre, pour toute famille de fonctions $\{f_\alpha\}$, on a

$$\operatorname{epi}\{\sup_\alpha f_\alpha\} = \{(x, z) \mid z \geqslant \sup_\alpha f_\alpha(x)\} =$$
$$= \bigcap_\alpha \{(x, z) \mid z \geqslant f_\alpha(x)\} = \bigcap_\alpha \operatorname{epi} f_\alpha, \tag{2}$$

et si tous les f_α sont convexes et fermées, alors les epi f_α sont des ensembles convexes fermés dont l'intersection a la même propriété.

2) « Seulement si ». Par hypothèse, $B = \operatorname{epi} f$ est un ensemble fermé convexe non vide dans $X \times \mathbf{R}$. Conformément à la proposition 2, B est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent. Toute fonctionnelle linéaire continue sur $X \times \mathbf{R}$ étant de la forme $\langle x^*, x\rangle + \lambda z$, $x^* \in X^*$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (voir 2.1.2), le demi-espace fermé est défini par l'inégalité

$$\langle x^*, x\rangle + \lambda z \leqslant b. \tag{3}$$

Puisque $B = \operatorname{epi} f$ est non vide et contient avec chacun de ses points (x_0, z_0) tous les points (x_0, z), $z > z_0$, B peut être contenu dans le demi-espace (3) seulement si $\lambda \leqslant 0$. Pour $\lambda = 0$, le demi-espace (3) sera dit *vertical*. Il est évident que

$$\operatorname{epi} f = \{(x, z) \mid f(x) \leqslant z\} \subset \{(x, z) \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant b\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{dom} f \subset \{x \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant b\} = H_+(x^*, b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{epi} f \subset H_+(x^*, b) \times \mathbf{R}.$$

Pour $\lambda < 0$, tous les termes de l'inégalité (3) peuvent être divisés par $|\lambda|$, de sorte que l'on peut supposer que $\lambda = -1$ et que le demi-espace (3) coïncide avec l'épigraphe de la fonction affine $a(x) = \langle x^*, x\rangle - b$. Mais

$$B = \operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} a \Leftrightarrow f(x) \geqslant a(x), \quad \forall x.$$

Donc

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{a \leqslant f} \operatorname{epi} a \cap \bigcap_{\operatorname{dom} f \subset H_+(x^*, b)} [H_+(x^*, b) \times \mathbf{R}]. \tag{4}$$

Remarquons maintenant qu'au moins une fonction affine $a_0 \leqslant f$ existe (dans le cas contraire epi f contiendrait avec chaque point

(x_0, z_0) tous les points (x_0, z), $z \in \mathbf{R}$, d'où $f(x_0) = -\infty$, quoique f est propre). Mais

$$\text{epi } a_0 \cap H_+(x^*, b) \times \mathbf{R} = \{(x, z) \mid a_0(x) \leqslant z, \langle x^*, x\rangle \leqslant b\} = \\ = \bigcap_{\lambda \geqslant 0} \{(x, z) \mid a_0(x) + \lambda(\langle x^*, x\rangle - b) \leqslant z\} = \\ = \bigcap_{\lambda \geqslant 0} \text{epi}\,\{a_0(x) + \lambda(\langle x^*, x\rangle - b)\},$$

et si $a_0(x) \leqslant f(x)$ et $\text{dom } f \subset H_+(x^*, b)$, on a

$$f(x) < +\infty \Rightarrow \langle x^*, x\rangle - b \leqslant 0 \Rightarrow a_0(x) + \lambda(\langle x^*, x\rangle - b) \leqslant \\ \leqslant f(x).$$

Par conséquent, $\text{epi } a_0 \cap [H_+(x^*, b) \times \mathbf{R}] \supset \bigcap_{a \leqslant f} \text{epi } a$, de sorte que l'on peut se débarrasser de tous les demi-espaces verticaux $H_+(x^*, b) \times \mathbf{R}$ dans (4). Ainsi

$$\text{epi } f = \bigcap_{a \leqslant f} \text{epi } a,$$

et, d'après (2),

$$f(x) = \sup\,\{a(x) \mid a(x) \quad \text{est affine et} \quad \leqslant f(x)\}. \tag{5}$$

Il reste à remarquer que l'on peut se limiter dans (5) aux fonctions d'appui pour f, puisque la borne supérieure ne changera pas si, parmi toutes les fonctions $a(x) = \langle x^*, x\rangle - b \leqslant f(x)$ (avec le même x^*), on choisit celle pour laquelle b est déterminée par l'égalité (1), i.e. la fonction d'appui. ■

Exercice 8. Si $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ est convexe et fermée et $f(\bar{x}) = -\infty$, alors $f(x) \equiv -\infty$, $\forall x \in \text{dom } f$.

Pour les fonctions différentiables, nous pouvons nous servir de l'assertion suivante.

Proposition 4. *Si la fonction f est convexe et différentiable selon Gâteaux au point x_0, alors la fonction $a(x) = \langle f'_G(x_0), x - x_0\rangle + f(x_0)$ est sa fonction d'appui.*

Démonstration. La condition b) de la définition 3 découle de l'égalité $a(x_0) = f(x_0)$. Supposons que $f(x_1) < a(x_1)$ pour un certain x_1. Alors $f(x_1) < a(x_1) - \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et donc, pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$f(x_0 + \alpha(x_1 - x_0)) = f((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant \\ \leqslant (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1) < (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha(a(x_1) - \varepsilon) = \\ = (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha(f(x_0) + \langle f'_G(x_0), x_1 - x_0\rangle - \varepsilon) = \\ = f(x_0) + \alpha\langle f'_G(x_0), x_1 - x_0\rangle - \alpha\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\langle f'_G(x_0),\ x_1-x_0\rangle = \lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{f(x_0+\alpha(x_1-x_0))-f(x_0)}{\alpha} \leqslant \langle f'_G(x_0),\ x_1-x_0\rangle-\varepsilon,$$

ce qui est une contradiction. Nous avons donc également la condition a). ■

Supposons maintenant que la fonction $f: X \to \mathbf{R}$ est différentiable selon Gâteaux en chaque point $x_0 \in X$. Constituons sa fonction de Weierstrass (cf. 1.4.4):

$$\mathscr{E}(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - \langle f'_G(x_0), x - x_0\rangle.$$

P r o p o s i t i o n 5. *Pour que f soit convexe, il est nécessaire et suffisant d'avoir l'inégalité $\mathscr{E}(x_0, x) \geqslant 0$, $\forall x, x_0$.*

D é m o n s t r a t i o n. a) Si f est convexe, alors $\mathscr{E}(x_0, x) \geqslant \geqslant 0$, $\forall x\ \ x_0$, d'après la proposition 4 que nous venons de démontrer.

b) Soit $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Les inégalités $\mathscr{E}(x_0, x_1) \geqslant 0$, $\mathscr{E}(x_0, x_2) \geqslant 0$ signifient que les points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2\ f(x_2))$ sont situés dans les demi-espaces $\{(x, z) \mid z \geqslant f(x_0) + +, \langle f'_G(x_0), x - x_0\rangle\}$. Par conséquent, le segment qui les joint es t situé dans ce même demi-espace, de sorte que

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geqslant$$
$$\geqslant f(x_0) + \langle f'(x_0), \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - x_0\rangle = f(x_0). \quad ■$$

Ainsi les conditions de Weierstrass de 1.4.4 vérifiées pour tous les points $(t, x, \dot{x})$ sont équivalentes à la convexité du lagrangien $L(t, x, \dot{x})$ relativement à $\dot{x}$.

2.6.3. Transformation de Legendre-Young-Fenchel. Théorème de Fenchel-Moreau. Supposons toujours que X est un espace vectoriel topologique localement convexe et X^* est l'espace dual. Choisissons maintenant une fonction arbitraire $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ et étudions plus en détail l'ensemble de ses fonctions d'appui. Il est alors naturel de supposer que la fonction f est propre, puisque, en vertu de la définition, $f(x) \geqslant a(x) > -\infty$ partout où f possède au moins une fonction d'appui, tandis que le cas $f(x) \equiv +\infty$ est trivial: toute fonction affine est une fonction d'appui.

D é f i n i t i o n. La fonction sur X^* définie par l'égalité

$$f^*(p) = \sup_{x\in X}\{\langle p, x\rangle - f(x)\} \tag{1}$$

est dite *fonction adjointe à f* ou *transformée de Young-Fenchel de f* (ou parfois *transformée de Legendre de f*), tandis que la fonction

$$f^{**}(x) = \sup_{p\in X^*}\{\langle p, x\rangle - f^*(p)\} \tag{2}$$

est la *deuxième fonction adjointe de f*.

Il découle de l'égalité (1) de 2.6.2 que l'ensemble des fonctions d'appui pour f est en bijection avec l'ensemble de tous les $p \in X^*$ pour lesquels $f^*(p)$ est finie:

$$(p,\ f^*(p) \neq \pm\infty) \leftrightarrow a_p(x) = \langle p, x\rangle - f^*(p). \tag{3}$$

R e m a r q u e. Malgré la symétrie apparente des formules (1) et (2), $f^{**} \neq (f^*)^*$. C'est que $(f^*)^*$, par définition, doit être envisagée sur $(X^*)^*$, et non sur X. Ce n'est que sur les espaces réflexifs que l'on peut identifier $(f^*)^*$ et f^{**} de manière naturelle.

P r o p o s i t i o n 1. 1) *Les fonctions f^* et f^{**} sont convexes et fermées.*

2) *Pour tous $x \in X$ et $p \in X^*$ on a l'inégalité de Young*:

$$f(x) + f^*(p) \geqslant \langle p, x\rangle. \tag{4}$$

3) $f^{**}(x) \leqslant f(x),\ \forall x.$

4) *Si $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f^*(p) \geqslant g^*(p)$ et $f^{**}(x) \leqslant g^{**}(x)$.*

D é m o n s t r a t i o n. 1) On voit à partir de (1) et (2) que les deux fonctions s'obtiennent comme bornes supérieures d'un certain ensemble de fonctions affines, de sorte que leurs épigraphes sont (en vertu de la formule (2) de 2.6.2) l'intersection de demi-espaces fermés; ils sont donc convexes et fermés.

2) Il découle de (1) que pour tous $x \in X$ et $p \in X^*$ on doit avoir $f^*(p) \geqslant \langle p, x\rangle - f(x)$, ce qui est équivalent à (4).

3) D'après ce que nous avons déjà démontré, $f(x) \geqslant \langle p, x\rangle - f^*(p)$, d'où

$$f(x) \geqslant \sup_p \{\langle p, x\rangle - f^*(p)\} = f^{**}(x).$$

4) C'est une conséquence évidente des définitions. ■

E x e m p l e s. 1) Soit $f(x) = \langle x_0^*, x\rangle - b$ une fonction affine. Une telle fonction ne possède qu'une seule fonction d'appui: elle-même. Par conséquent

$$f^*(p) = \sup_x \{\langle p, x\rangle - \langle x_0^*, x\rangle + b\} = \begin{cases} +\infty, & p \neq x_0^*, \\ b, & p = x_0^*, \end{cases} \tag{5}$$

et

$$f^{**}(x) = \sup_p \{\langle p, x\rangle - f^*(p)\} = \langle x_0^*, x\rangle - b = f(x). \tag{6}$$

2) Supposons que, de même que dans l'exemple 1 de 2.6.1,

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & \alpha < x < \beta, \\ +\infty, & x \notin (\alpha, \beta), \end{cases}$$

la fonction $f_0'(x)$ étant continue et croissante sur (α, β). Posons

$$A = \lim_{x\to\alpha+0} f_0'(x), \quad B = \lim_{x\to\beta-0} f_0'(x).$$

Pour tout $p \in (A, B)$ l'égalité $p = f_0'(x_0)$ est vérifiée pour un certain $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Puisque $f(x)$ est une fonction convexe, on voit que (proposition 4 de 2.6.2)

$$a(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = px - (px_0 - f(x_0))$$

est une fonction d'appui et donc les égalités

$$f^*(p) = px_0 - f_0(x_0),\ p = f_0'(x_0) \tag{7}$$

définissent $f^*(p)$ paramétriquement dans (A, B) (la fonction f^* définie par les égalités (7) est appelée *transformée de Legendre de la fonction f_0* en analyse classique).

Exercices.

1. Que peut-on dire dans cet exemple au sujet de $f^*(p)$ lorsque $p \notin (A, B)$?
2. Pour les fonctions f sur R suivantes, indiquer dom f, epi f; vérifier si elles sont convexes et fermées; calculer f^* et f^{**}:

a) $ax^2+bx+c,\quad a \geqslant 0,$ b) $|x|+|x-a|,$

c) $||x|-1|,$ d) $\delta[\alpha, \beta](x) = \begin{cases} 0, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ \infty, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$

e) $\begin{cases} -\sqrt{1+x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ +\infty, & |x| > 1, \end{cases}$ f) $\begin{cases} +\sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ +\infty, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$

g) $e^x,$ h) $\begin{cases} -\operatorname{Log} x, & x > 0, \\ +\infty, & x \leqslant 0, \end{cases}$

i) $\begin{cases} x \operatorname{Log} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ +\infty, & x < 0, \end{cases}$ j) $\begin{cases} x \operatorname{Log} x, & x > 0, \\ +\infty, & x \leqslant 0, \end{cases}$

k) $\begin{cases} \dfrac{x^a}{a}, & x \geqslant 0, \\ +\infty, & x < 0 \end{cases} \quad (a \geqslant 1),$ l) $\begin{cases} \dfrac{x^a}{a}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a \geqslant 1),$

m) $|x|^a/a \quad (a \geqslant 1).$

3) L'exemple suivant nous servira par la suite dans le § 3.3.

Proposition 2. *Supposons que la fonction* $f\colon \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}$ *est définie par l'égalité* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_s) = \max\{x_1, \ldots, x_s\}$.
Alors

$$f^*(p) = f^*(p_1, \ldots, p_s) = \begin{cases} 0 \ \textit{si} \ p_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{s} p_i = 1, \\ +\infty \ \textit{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Démonstration. Puisque f est le maximum d'un nombre fini de fonctions linéaires (donc convexes et continues), sa convexité et sa continuité sont évidentes.

Si $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$, on a $\langle p, x\rangle \leqslant \max\{x_1, \ldots, x_s\}$, et par

là même

$$f^*(p)=\sup_x \{\langle p, x\rangle - \max\{x_1, \ldots, x_s\}\}=0.$$

D'autre part, si $f^*(p) < +\infty$, on a nécessairement $f^*(p) = 0$, puisque les fonctions $x \mapsto \langle p, x\rangle$ et $x \mapsto \max\{x_1, \ldots, x_s\}$ sont homogènes, i.e. pour ces p on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{s} p_i x_i - \max\{x_1, \ldots, x_s\} \leqslant 0, \quad \forall x.$$

En substituant $x_j = 0$, $j \neq i$, $x_i = \xi$, dans cette inégalité, on obtient $p_i\xi \leqslant \max\{\xi, 0\}$, d'où $p_i \geqslant 0$. En posant $x_i = a$, $i = 1, \ldots, s$, dans cette même inégalité, on obtient

$$a\sum_{i=1}^{s} p_i \leqslant a, \quad \forall a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} p_i = 1. \ \blacksquare$$

4) Fonction adjointe à la norme dans un espace normé.

Proposition 3. *Soit X un espace normé et $N(x) = \| x \|$. Alors N^* coïncide avec l'indicatrice δB^* de la boule unité de l'espace dual X^*, tandis que $N^{**}(x) = N(x)$.*

Démonstration. Si $\| p \| > 1$, on a $\langle p, x_0\rangle > \| x_0 \|$ pour un certain x_0, et donc

$$f^*(p)=\sup_x \{\langle p, x\rangle - \| x \|\} \geqslant \sup_{\alpha \geqslant 0} \{\langle p, \alpha x_0\rangle - \alpha \| x_0 \|\} = +\infty.$$

Mais si $\| p \| \leqslant 1$, alors $\langle p, x\rangle \leqslant \| x \|$ et

$$f^*(p)=\sup_x (\langle p, x\rangle - \| x \|) = 0.$$

En outre

$$f^{**}(x) = \sup_p \{\langle p, x\rangle - f^*(p)\} = \sup_{\|p\| \leqslant 1} \{\langle p, x\rangle\} = \| x \| = N(x). \ \blacksquare$$

5) Soit $X = \mathbf{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Alors, comme on voit facilement,

$$f^*(p) = \begin{cases} 0, & p = 0, \\ +\infty, & p \neq 0, \end{cases} \qquad f^{**}(x) \equiv 0,$$

de sorte que l'égalité $f^{**}(x) = f(x)$ que nous avons observée dans les exemples 1) et 4) n'est pas satisfaite ici.

Le théorème suivant, des plus importants en analyse convexe, montre que la coïncidence de f et f^{**} est loin d'être un fait du hasard.

Théorème de Fenchel-Moreau. *Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe et $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction partout supérieure à $-\infty$. Alors*

a) $f^{**}(x) \equiv f(x)$ *si et seulement si* f *est convexe et fermée.*

b) $f^{**}(x) = \sup\{a(x) \mid a(x)$ *est affine et* $\leqslant f(x)\}$.

c) *S'il existe au moins une fonction affine* $a(x) \leqslant f(x)$ *(conditions équivalentes* $f^*(p) \not\equiv +\infty$ *ou* $f^{**}(x) > -\infty$ *partout), alors* $f^{**}(x)$ *est la plus grande des fonctions convexes fermées non supérieures à* $f(x)$, *i.e.* $f^{**} = \overline{\operatorname{conv}} f$.

d) $(f^{**})^* = f^*$.

D é m o n s t r a t i o n. A) « Seulement si » découle de 1) de la proposition 1. Supposons maintenant que $a(x) \leqslant f(x)$ est une fonction affine. Dans l'exemple 1) nous avons établi que $a^{**}(x) = a(x)$. En nous servant à nouveau de la proposition 1, nous obtenons

$$a(x) = a^{**}(x) \leqslant f^{**}(x) \leqslant f(x),$$

et donc

$$\sup\{a(x) \mid a(x) \text{ est affine et } \leqslant f(x)\} \leqslant f^{**}(x) \leqslant f(x). \quad (8)$$

D'où résulte tout d'abord le « si » de a) car dans le cas où f est convexe et fermée, les deux membres de (8) coïncident (pour f propre: d'après le théorème de Minkowski, et dans le cas de $f \equiv +\infty$, le premier membre est aussi égal à $+\infty$). Ainsi a) est démontré.

B) Pour une fonction f arbitraire, trois cas sont possibles. S'il n'existe pas de fonction affine $a(x) \leqslant f(x)$, alors $f^*(p) = \sup_x \{\langle p, x\rangle - f(x)\} = +\infty$ pour tous les p et donc $f^{**}(x) = -\infty$. Mais dans ce cas, le premier membre de (8) est aussi égal à $-\infty$ ($\sup \varnothing = -\infty$ par définition), i.e. b) est vérifié.

Si une fonction affine $a(x) \leqslant f(x)$ existe, alors il découle de (8) que $f^{**}(x) > -\infty$ partout. Il reste deux possibilités. Si $f^{**}(x) \equiv +\infty$, alors $f(x) \equiv +\infty$ et les deux fonctions sont égales au premier membre de (8), puisque la fonction affine peut ici être arbitraire. Dans le cas où f^{**} est propre on a, d'après le théorème de Minkowski,

$$f^{**}(x) = \sup\{a(x) \mid a(x) \text{ est une fonction d'appui pour } f^{**}(x)\}.$$

En comparant avec (8) nous trouvons que

$$\sup\{a(x) \mid a(x) \text{ est affine et } \leqslant f(x)\} \leqslant f^{**}(x) =$$
$$= \sup\{a(x) \mid a(x) \text{ est une fonction d'appui pour } f^{**}(x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{a(x) \mid a(x) \text{ est affine et } \leqslant f(x)\}.$$

Ainsi dans ces cas b) est également vérifié.

C) Supposons maintenant qu'il existe une fonction affine $a(x) \leqslant f(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$ est une fonction convexe fermée arbitraire. Posons

$$h(x) = \sup\{g(x), f^{**}(x)\}.$$

Cette fonction est fermée, convexe et on a partout $f(x) \geqslant h(x) > -\infty$. Par conséquent,

$$h(x) = h^{**}(x) \leqslant f^{**}(x) \leqslant h(x),$$

donc $h(x) = f^{**}(x)$ et $g(x) \leqslant f^{**}(x)$, ce qui démontre c).

D) Puisque $f^{**}(x) \leqslant f(x)$, on a $(f^{**})^*(p) \geqslant f^*(p)$. D'autre part, d'après l'inégalité de Young $f(x) \geqslant a(x) = \langle p, x\rangle - f^*(p)$, d'où l'on tire pour $f^*(p)$ finie en vertu de (8):

$$f^{**}(x) \geqslant a(x) \quad \text{et} \quad (f^{**})^*(p) =$$
$$= \sup_x (\langle p, x\rangle - f^{**}(x)) \leqslant \sup_x (\langle p, x\rangle - a(x)) = f^*(p).$$

Le cas $f^*(p) = +\infty$ est trivial et, pour $f^*(p) = -\infty$, nous obtenons

$$f(x) = f^{**}(x) \equiv +\infty \quad \text{et} \quad (f^{**})^*(p) = -\infty = f^*(p). \quad ■$$

Exercice 3. Supposons que f est convexe et bornée d'en haut dans un voisinage d'un certain point. Alors $f^{**}(x) = f(x)$, $\forall x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

2.6.4. Subdifférentielle. Théorème de Moreau-Rockafellar. Théorème de Doubovitski-Milioutine. Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe et f une fonction sur X, $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$.

Définition. On appelle *subdifférentielle de f* au point x_0 le sous-ensemble de X^* constitué de tous les éléments $x^* \in X^*$ pour lesquels on a l'inégalité

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0\rangle, \ \forall x \in X. \tag{1}$$

On désigne la subdifférentielle de la fonction f au point x_0 par $\partial f(x_0)$.

Ainsi $\partial f(x_0)$ est l'ensemble des « coefficients angulaires » des fonctions affines $a(x) = \langle x^*, x\rangle - b$ qui sont des *fonctions d'appui de f au point* x_0, i.e. sont telles que la borne supérieure dans la formule (1) de 2.6.2 est atteinte au point x_0:

$$b = \langle x^*, x_0\rangle - f(x_0). \tag{2}$$

Proposition 1. *La subdifférentielle $\partial f(x_0)$ est un ensemble convexe (éventuellement vide) de X^*.*

Démonstration. Soit $x_i^* \in \partial f(x_0)$, $i = 1, 2$, alors, par définition, $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x_1^*, x - x_0\rangle$, $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x_2^*, x - x_0\rangle$. En multipliant la première inégalité par α et la deuxième par $(1 - \alpha)$, où $\alpha \in [0, 1]$, et en prenant la somme, on obtient

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle \alpha x_1^* + (1 - \alpha) x_2^*, x - x_0\rangle, \ \forall x. \quad ■$$

Exemples. 1) Subdifférentielles de certaines fonctions sur la droite et sur le plan. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que

a) $f_1(x) = |x|, \ (x \in \mathbf{R}) \Rightarrow \partial f_1(x) = \begin{cases} [-1, 1], & x = 0, \\ \operatorname{sign} x, & x \neq 0. \end{cases}$

b) $f_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x \in \mathbf{R}^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial f_2(x) = \begin{cases} \{y \mid \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leqslant 1\}, & x = 0, \\ \dfrac{x}{|x|} = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right), & x \neq 0. \end{cases}$$

c) $f_3(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$, $(x \in \mathbf{R}^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial f_3(x) = \begin{cases} \{y \mid |y_1| + |y_2| \leqslant 1\}, \; x = 0, \\ (\operatorname{sign} x_1, 0), \quad |x_1| > |x_2|, \\ (0, \operatorname{sign} x_2), \quad |x_2| > |x_1|, \\ \operatorname{conv}((\operatorname{sign} x_1, 0), (0, \operatorname{sign} x_2)), \; |x_1| = |x_2| = z, \; z \neq 0. \end{cases}$$

2) Subdifférentielle de la norme dans un espace normé.

Proposition 2. *Soient X un espace normé, X^* l'espace dual, $N(x) = \|x\|$. Alors*

$$\partial N(x) = \begin{cases} B^*, \text{ où } B^* \text{ est la boule unité dans l'espace dual si } x = 0, \\ \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| = 1, \; \langle x^*, x\rangle = \|x\|\} \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Comme nous l'avons vu auparavant (relation (3) de 2.6.3), l'ensemble des fonctions d'appui de f se trouve en bijection avec l'ensemble $\{x^* \in X^*, f^*(x^*) \neq \pm\infty\}$ et l'on a

$$a_{x^*}(x) = \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*).$$

D'après la proposition 2 de 2.6.3,

$$N^*(x^*) = \delta B^*(x^*) = \begin{cases} 0, & \|x^*\| \leqslant 1, \\ +\infty, & \|x^*\| > 1, \end{cases}$$

de façon que les fonctions $\langle x^*, x\rangle$, $\|x^*\| \leqslant 1$ sont des fonctions d'appui pour N. L'égalité (2) se transforme en

$$0 = \langle x^*, x_0\rangle - \|x_0\|, \tag{3}$$

de sorte que toute fonction $x \to \langle x^*, x\rangle$, $\|x^*\| \leqslant 1$ est une fonction d'appui pour N au point $x_0 = 0$ et $\partial N(0) = B^*$. Dans le cas où $x_0 \neq 0$, l'ensemble $x^* \in B^*$ des points vérifiant (3) coïncide avec celui qui est indiqué dans l'énoncé. ■

Dans les exemples envisagés ci-dessus, la subdifférentielle existait en chaque point. Il va de soi que pour les fonctions non convexes (par exemple pour $-|x|$) elle peut n'exister en aucun point. Toutefois, les fonctions convexes, elles aussi, peuvent ne pas posséder de subdifférentielles, même dans les points du domaine effectif.

Voici l'exemple le plus simple:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

Aux points $x_1 = +1$ et $x_2 = -1$, la subdifférentielle est vide. Une condition suffisante pour l'existence de la subdifférentielle sera obtenue plus loin (voir le corollaire du théorème de Moreau-Rockafellar).

Le théorème suivant en analyse convexe joue le rôle analogue à celui joué en analyse classique par la propriété de linéarité d'une différentielle.

Théorème de Moreau-Rockafellar. *Soient f_i, $i = 1, \ldots, n$, des fonctions propres convexes sur X. Alors*

$$\partial \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i\Big)(x) \supseteq \sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x). \tag{4}$$

Si en un certain point $\bar{x}$ toutes les fonctions, sauf peut-être une seule, sont continues et cette dernière est finie au point $\bar{x}$, alors on a l'égalité suivante en tout point x

$$\partial \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i\Big)(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x). \tag{5}$$

Démonstration. Limitons-nous à $n = 2$; le cas d'un plus grand nombre de termes se démontre facilement par récurrence. L'inclusion $df_1(x) + \partial f_2(x) \subset \partial(f_1 + f_2)(x)$ découle immédiatement de la définition de la subdifférentielle.

Soit $x_0^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 = 0$, $x_0^* = 0$, $f_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. En effet, si ces relations ne sont pas satisfaites, alors, à la place de f_1 et f_2, on peut considérer les fonctions

$$g_1(x) = f_1(x_0 + x) - f_1(x_0) - \langle x_0^*, x\rangle,$$
$$g_2(x) = f_2(x_0 + x) - f_2(x_0).$$

Ainsi, supposons que $0 \in \partial(f_1 + f_2)(0)$. D'après (1), cela signifie que

$$\min_x (f_1(x) + f_2(x)) = f_1(0) + f_2(0) = 0.$$

Soit $\bar{x}$ le point où f_1 est continue et f_2 finie. Considérons deux ensembles convexes

$$C_1 = \{(x, \alpha) \mid \alpha > f_1(x),\ x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f_1\} = \operatorname{int} \operatorname{epi} f_1,$$
$$C_2 = \{(x, \alpha) \mid -\alpha \geqslant f_2(x)\}.$$

Il est clair que les ensembles C_1 et C_2 sont convexes, non vides $((\bar{x}, -f_2(\bar{x})) \in C_2$, C_1 est ouvert et différent de $\varnothing$ d'après la proposition 3 b) de (2.6.2): la fonction f_1, continue au point $\bar{x}$, doit être bornée dans un voisinage de ce point) et $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. En effet, si $(\alpha_1, x_1) \in C_1 \cap C_2$, on a $f_1(x_1) < \alpha \leqslant -f_2(x_1)$, i.e.

$$0 = \min_x (f_1(x) + f_2(x)) \leqslant f_1(x_1) + f_2(x_1) < 0,$$

ce qui est impossible. D'après le premier théorème de séparabilité (voir 2.1.4), C_1 peut être séparé de C_2 par une fonctionnelle linéaire non nulle (x_1^*, β):

$$\inf_{(x, \alpha) \in C_2} (\langle x_1^*, x\rangle + \beta\alpha) \geqslant \sup_{(x, \alpha) \in C_1} (\langle x_1^*, x\rangle + \beta\alpha). \tag{6}$$

Il est clair que $\beta \leqslant 0$, car autrement la borne supérieure serait égale à $+\infty$. Si l'on suppose que $\beta = 0$, on obtient

$$\sup_{x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f_1} \langle x_1^*, x\rangle \leqslant \inf_{x \in \operatorname{dom} f_2} \langle x_1^*, x\rangle.$$

Mais le maximum d'une fonction linéaire ne peut être atteint en un point intérieur, donc

$$\langle x_1^*, \bar{x}\rangle < \sup_{x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f_1} \langle x_1^*, x\rangle \leqslant \inf_{x \in \operatorname{dom} f_2} \langle x_1^*, x\rangle \leqslant \langle x_1^*, \bar{x}\rangle.$$

Cette contradiction montre que $\beta \neq 0$. Par conséquent, on peut diviser tous les termes de (6) par $|\beta|$, alors, en désignant $\tilde{x}_1^* = |\beta|^{-1} x_1^*$ et en nous servant du fait que $\operatorname{epi} f_1 \subseteq \overline{\operatorname{int} \operatorname{epi} f_1} = \overline{C}_1$ (proposition 1, 2.6.2), nous obtenons

$$\sup_x \{\langle \tilde{x}_1^*, x\rangle - f_1(x)\} = \sup_{\substack{x \in \operatorname{dom} f_1 \\ \alpha \geqslant f_1(x)}} \{\langle \tilde{x}_1^*, x\rangle - \alpha\} =$$

$$= \sup_{(x, \alpha) \in C_1} \{\langle \tilde{x}_1^*, x\rangle - \alpha\} \leqslant \inf_{(x, \alpha) \in C_2} \{\langle \tilde{x}_1^*, x\rangle - \alpha\} =$$

$$= \inf_x \{\langle \tilde{x}_1^*, x\rangle + f_2(x)\}.$$

Pour $x = 0$, les valeurs de la fonction entre accolades coïncident et sont nulles ($f_1(0) = f_2(0) = 0$). Par conséquent,

$$f_1(x) - f_1(0) \geqslant \langle \tilde{x}_1^*, x\rangle, \quad f_2(x) - f_2(0) \geqslant \langle -\tilde{x}_1^*, x\rangle,$$

i.e.

$$\tilde{x}_1^* \in \partial f_1(0), \quad -\tilde{x}_1^* \in \partial f_2(0)$$

et

$$0 \in \partial f_1(0) + \partial f_2(0). \quad \blacksquare$$

C o r o l l a i r e 1. *Soit f une fonction convexe continue au point x_0. Alors $\partial f(x_0) \neq \varnothing$.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons la fonction

$$f + \delta\{x_0\} = \begin{cases} f(x_0), & x = x_0, \\ \infty, & x \neq x_0. \end{cases}$$

Les fonctions f et $\delta\,\{x_0\}$ vérifient les hypothèses du théorème de Moreau-Rockafellar. L'égalité

$$X^* = \partial\,(f + \delta\,\{x_0\})\,(x_0) = \partial f\,(x_0) + \partial\delta\,\{x_0\}\,(x_0) = \partial f\,(x_0) + X^*$$

signifie que $\partial f\,(x_0) \neq \varnothing$. ■

En fait, la subdifférentielle $\partial f\,(x_0)$ d'une fonction convexe continue au point x_0 est un ensemble convexe compact dans la topologie $*$-faible.

Soit K un cône (voir 2.6.1). Le cône K^* constitué de tous les éléments x^* vérifiant $\langle x^*, x\rangle \geqslant 0$, $\forall x \in K$, est appelé *cône dual de* K. Si $0 \in K$, il découle immédiatement de la définition (1) que l'on a l'égalité $\partial\delta K\,(0) = -K^*$.

C o r o l l a i r e 2. *Soient* $K_1, \ldots, K_n$ *des cônes ouverts convexes à intersection non vide. Alors*

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\Big)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

En effet, ajoutons à K_i l'origine des coordonnées et envisageons les fonctions δK_i. En leur appliquant le théorème de Moreau-Rockafellar (au point $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i$, différent de zéro, toutes les δK_i sont continues), nous obtenons

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\Big)^* = -\partial\delta\Big(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\Big)(0) = -\partial\Big(\sum_{i=1}^{n} \delta K_i\Big)(0) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \partial\delta K_i\,(0) = \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

C o r o l l a i r e 3. T h é o r è m e d e D o u b o v i t s k i - M i l i o u t i n e s u r l ' i n t e r s e c t i o n d e s c ô n e s. *Pour que les cônes convexes* $K_1, \ldots, K_n, K_{n+1}$, *parmi lesquels les* $n \geqslant 1$ *premiers sont ouverts et non vides, ne se coupent pas, il est nécessaire et suffisant qu'il existe des fonctionnelles* $x_i^* \in K_i^*$, $i = 1, \ldots, n+1$, *qui ne s'annulent pas simultanément et telles que* $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^* = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. N é c e s s i t é. Sans perte de généralité, on peut supposer que $K = \bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$. Alors K est un cône ouvert qui ne se coupe pas avec K_{n+1} par hypothèse. D'après le premier théorème de séparabilité, on peut séparer K et K_{n+1} par une fonctionnelle linéaire non nulle $y^* \in X^*$:

$$\inf_{x \in K} \langle y^*, x\rangle \geqslant \sup_{x \in K_{n+1}} \langle y^*, x\rangle.$$

La dernière relation signifie que $y^* \in K^*$ et, puisque $(-1)\,y^* \in K_{n+1}^*$ (le point $x = 0$ est un point limite aussi bien pour K que pour K_{n+1}),

on peut, en se servant du corollaire 2, décomposer y^* en une somme

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^*, \quad x_i^* \in K_i^*, \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$

désignant $(-1)\,y^*$ par x_{n+1}^*, on obtient alors ce qu'il fallait.

S u f f i s a n c e. Supposons que les $x_i^* \in K_i^*$ ne s'annulent pas simultanément et $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^* = 0$. Soit

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} K_i, \quad x \neq 0, \text{ et } x_{i_0}^* \neq 0, \quad 1 \leqslant i_0 \leqslant n.$$

Alors $x \in \operatorname{int} K_{i_0} \Rightarrow \langle x_{i_0}^*, x \rangle > 0$ et donc $0 = \left\langle \sum x_i^*, x \right\rangle > 0$. Cette contradiction démontre le théorème. ■

T h é o r è m e d e D o u b o v i t s k i - M i l i o u t i n e s u r l a s u b d i f f é r e n t i e l l e d ' u n m a x i m u m. *Soient* $f_1, \ldots, f_n$ *des fonctions convexes sur un espace topologique localement convexe* X, *continues au point* x_0; $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$; $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ *une famille d'indices tels que*

$$f_i(x_0) \begin{cases} = f(x_0) \text{ pour } i \in I, \\ < f(x_0) \text{ pour } i \notin I. \end{cases}$$

Alors

$$\partial f(x_0) = \operatorname{conv}\{\partial f_{i_1}(x_0) \cup \ldots \cup \partial f_{i_s}(x_0)\} =$$
$$= \left\{x^* \mid x^* = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k x_k^*, \quad x_k^* \in \partial f_{i_k}(x_0), \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1} \lambda_k = 1\right\}.$$

D é m o n s t r a t i o n. A) Si $i \in I$ et $x^* \in \partial f_i(x_0)$, alors

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_i(x_0) \geqslant f_i(x) - f_i(x_0) \geqslant$$
$$\geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle \Rightarrow x^* \in \partial f(x_0) \Rightarrow \partial f(x_0) \supset \bigcup_{i \in I} \partial f_i(x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \partial f(x_0) \supset \operatorname{conv}\{\bigcup_{i \in I} \partial f_i(x_0)\},$$

la dernière implication étant une conséquence de la convexité de $\partial f(x_0)$ (proposition 1).

L'inclusion inverse sera démontrée par récurrence sur le nombre des fonctions. Pour $n = 1$, l'assertion est évidente; par la suite nous supposerons que pour $n - 1$ fonctions elle est satisfaite.

B) L e m m e. *Si la fonction* $f(x)$ *est convexe et l'inégalité*

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0 \tag{7}$$

est vérifiée dans un certain ensemble ouvert convexe V *et l'on a* $\varphi(\bar{x}) = 0$ *pour un certain point* $\bar{x} \in V$, *alors* $x^* \in \partial f(x_0)$.

D é m o n s t r a t i o n. Montrons que l'inégalité (7) est satisfaite pour tous les x; l'assertion du lemme en découle d'après la définition de la subdifférentielle.

Supposons que $\tilde{x}$ est arbitraire. La fonction φ est convexe en même temps que f et, si $\varphi(\tilde{x}) < 0$, on a pour tout $\alpha \in (0, 1)$

$$\varphi((1-\alpha)\bar{x}+\alpha\tilde{x}) \leqslant (1-\alpha)\varphi(\bar{x})+\alpha\varphi(\tilde{x}) = \alpha\varphi(\tilde{x}) < 0.$$

Pour α suffisamment petit, le point $(1-\alpha)\bar{x}+\alpha\tilde{x}$ appartient à V, et nous avons abouti à une contradiction. Ainsi $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tous les x. ■

C) Soit $x^* \in \partial f(x_0)$. Montrons qu'alors tout x_0 est une solution du problème de programmation linéaire suivant

$$\varphi_0(x) = f_{i_1}(x) - f(x_0) - \langle x^*, x - x_0\rangle \to \inf, \tag{8}$$

$$\varphi_i(x) = f_i(x) - f(x_0) - \langle x^*, x - x_0\rangle \leqslant 0, \quad i \neq i_1, \tag{9}$$

ou bien l'assertion du théorème est valable. En effet, si la première affirmation n'a pas lieu, alors, pour un certain $\bar{x}$,

$$\varphi_0(\bar{x}) < 0 = \varphi_0(x_0), \quad \varphi_i(\bar{x}) \leqslant 0, \quad i \neq i_1. \tag{10}$$

D'après la convexité, les mêmes inégalités seront satisfaites pour $\alpha \in (0, 1)$ lorsque $x_\alpha = (1-\alpha)\bar{x} + \alpha x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi_0$ (proposition 1 de 2.6.2; $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi_0$, puisque φ_0 y est continue). Par conséquent, on peut supposer que $\bar{x} \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi_0$ et, en ce point, φ_0 est continue (proposition 3 de 2.6.3).

Par continuité, l'inégalité $\varphi_0(x) < 0$ reste valable dans un certain voisinage convexe $V \ni \bar{x}$, i.e.

$$f_{i_1}(x) - f(x_0) < \langle x^*, x - x_0\rangle, \quad x \in V. \tag{11}$$

Rappelons-nous maintenant que $x^* \in \partial f(x_0)$, donc on doit avoir l'inégalité

$$\max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0\rangle.$$

En la comparant avec l'inégalité (11), nous voyons que pour $x \in V$ on a l'inégalité

$$\varphi(x) = \max\{f_i(x) \mid i \neq i_1\} - f(x_0) - \langle x^*, x - x_0\rangle \geqslant 0. \tag{12}$$

En même temps, en vertu de (10),

$$\varphi(\bar{x}) = \max\{f_i(\bar{x}) \mid i \neq i_1\} - f(x_0) - \langle x^*, \bar{x} - x_0\rangle \leqslant 0,$$

de sorte que $\varphi(\bar{x}) = 0$ et, d'après le lemme, $x^* \in \partial\tilde{f}(x_0)$, où

$$\tilde{f}(x) = \max\{f_i(x) \mid i \neq i_1\}.$$

Puisque $\tilde{f}$ est constituée de $(n - 1)$ fonctions, on a par hypothèse de récurrence

$$x^* \in \operatorname{conv}\{\bigcup_{k \geqslant 2} \partial f_{i_k}(x_0)\} \subset \operatorname{conv}\{\bigcup_{k \geqslant 1} \partial f_{i_k}(x_0)\}.$$

D) Si nous savons que x_0 est la solution du problème (8)-(9), nous pouvons nous servir du théorème de Kuhn-Tucker (voir 1.3.3); il faut ici faire appel à la remarque qui suit la démonstration de ce théorème: quoique d'après la proposition 3 de 2.6.2 nos fonctions sont continues sur int dom, elles peuvent prendre la valeur $+\infty$ en dehors de cet ensemble.

En vertu du théorème de Kuhn-Tucker, il existe des multiplicateurs de Lagrange λ_0, $\lambda_i \geqslant 0$, $i \neq i_1$, qui ne s'annulent pas simultanément et pour lesquels x_0 est un point de minimum de la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x; \lambda) = \lambda_0 \varphi_0(x) + \sum_{i \neq i_1} \lambda_i \varphi_i(x).$$

En outre, on doit avoir la condition de non-rigidité complémentaire en vertu de laquelle $\lambda_i = 0$ si $\varphi_i(x_0) = f_i(x_0) - f(x_0) \neq 0$, i.e. pour $i \notin I$. En changeant le numéro de λ_0 de manière à en obtenir λ_{i_1} et à obtenir φ_{i_1} à la place de φ_0, nous pouvons écrire

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i(x),$$

et, puisque les multiplicateurs de Lagrange sont définis à un facteur positif près, on peut supposer que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Nous avons maintenant

$$\mathcal{L}(x, \lambda) \geqslant \mathcal{L}(x_0, \lambda) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) - (\sum_{i \in I} \lambda_i) f(x_0) -$$

$$-(\sum_{i \in I} \lambda_i) \langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow x^* \in \partial (\sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\cdot))(x_0).$$

En appliquant le théorème de Moreau-Rockafellar et en tenant compte de l'égalité suivante qui découle immédiatement de la définition de la subdifférentielle

$$\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$$

et qui est valable pour $\lambda > 0$, nous voyons que

$$x^* = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*, \quad x_i^* \in \partial f_i(x_0), \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

CHAPITRE III

PRINCIPE DE LAGRANGE POUR LES PROBLÈMES DIFFÉRENTIABLES À CONTRAINTES

Le but principal de ce chapitre est la démonstration du principe de Lagrange pour les problèmes différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités, ainsi que la recherche des conditions nécessaires d'extrémum pour les problèmes de ce type. Les résultats généraux de ce chapitre seront ensuite appliqués, dans le chapitre IV, aux problèmes du calcul des variations classique et aux problèmes de commande optimale. Puisqu'une partie de ces questions, à un niveau élémentaire, a été déjà exposée dans le chapitre I, nous recommandons au lecteur de consulter parallèlement les endroits correspondants des §§ 1.3, 1.4.

§ 3.1. Problèmes élémentaires

3.1.1. Problèmes élémentaires sans contraintes. Soient: X un espace topologique, U un voisinage dans X et $f\colon U \to \mathbf{R}$. Le problème

$$f(x) \to \text{extr} \tag{$\mathfrak{z}$}$$

est appelé problème élémentaire sans contraintes (il est sous-entendu ici et par la suite qu'il s'agit de problème d'extrémum). Dans le cas où X est un espace vectoriel normé et f possède telle ou telle propriété de différentiabilité, le problème ($\mathfrak{z}$) est appelé *problème différentiable élémentaire*; si X est un espace vectoriel topologique et f est une fonction convexe, alors le problème ($\mathfrak{z}$) de minimum est appelé *problème convexe élémentaire*.

La définition d'un extrémum local pour le problème ($\mathfrak{z}$) a été donnée dans 1.2.1. Si $\hat{x}$ fournit un minimum local (maximum, extrémum) au problème ($\mathfrak{z}$), nous écrivons brièvement

$$\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z} \ (\hat{x} \in \text{loc max } \mathfrak{z},\ \hat{x} \in \text{loc extr } \mathfrak{z}).$$

Les définitions des divers termes qui se rapportent à la notion de différentiabilité sont données dans § 2.2.

Nous commençons par le cas le plus simple: le cas unidimensionnel où $X = \mathbf{R}$.

L e m m e. *Supposons que la fonction* $f: U \to \mathbf{R}$ *est définie sur un certain intervalle ouvert* $U \subseteq \mathbf{R}$ *contenant le point* $\hat{x}$.

a) *Si* f *possède au point* $\hat{x}$ *des dérivées à droite et à gauche et* $\hat{x} \in \in \text{loc min } \mathfrak{z}$ $(\text{loc max } \mathfrak{z})$, *alors*

$$f'(\hat{x}+0) \geqslant 0, \quad f'(\hat{x}-0) \leqslant 0 \; (f'(\hat{x}+0) \leqslant 0, \quad f'(\hat{x}-0) \geqslant 0). \tag{1}$$

Lorsqu'on a les inégalités strictes dans (1), $\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z}$ $(\text{loc max } \mathfrak{z})$.

Supposons en outre que la fonction f *est* k *fois différentiable au point* $\hat{x}$.

b) *Si* $\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z}$ $(\text{loc max } \mathfrak{z})$, *alors ou bien* $f^{(i)}(\hat{x}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *ou bien il existe un* s, $1 \leqslant s \leqslant [k/2]$, *tel que*

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2s-1)}(\hat{x}) = 0, \; f^{(2s)}(\hat{x}) > 0 \quad (f^{(2s)}(\hat{x}) < 0). \tag{2}$$

c) *S'il existe un* s, $1 \leqslant s \leqslant [k/2]$, *tel que l'on a les relations* (2), *alors* $\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z}$ $(\text{loc max } \mathfrak{z})$.

L'assertion b) pour $k = 1$ ($\hat{x} \in \text{loc extr } \mathfrak{z} \Rightarrow f'(\hat{x}) = 0$) est bien connue en analyse : c'est le *théorème de Fermat*. Nous avons démontré ce théorème dans 1.4.1.

D é m o n s t r a t i o n. L'assertion a) découle immédiatement des définitions de la dérivée unilatère et de l'extrémum local. L'assertion b) pour $k = 1$ (le théorème de Fermat) découle de a) si on prend en considération le fait que l'existence de la dérivée implique les égalités $f'(\hat{x}) = f'(\hat{x}+0) = f'(\hat{x}-0)$. Supposons en outre que $k > 1$ et, pour fixer les idées, supposons qu'il s'agit d'un minimum. D'après la formule de Taylor, on a

$$f(\hat{x}+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(\hat{x})}{j!} h^k + o(h^k). \tag{3}$$

Soit $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(m-1)}(\hat{x}) = 0$, $1 < m \leqslant k$, $f^{(m)}(\hat{x}) \neq 0$. Un des deux cas suivants est possible : m est impair et m est pair. Dans le premier cas, supposons que $\varphi(\xi) = f(\hat{x} + \sqrt[m]{\xi})$, $\xi \in \mathbf{R}$. Il découle alors de (3) que $\varphi \in D^1(0)$ et $\varphi'(0) = f^{(m)}(\hat{x})/m! \neq 0$, tandis que le théorème de Fermat affirme que l'on doit avoir $\varphi'(0) = 0$. La contradiction obtenue montre que m doit être pair. Mais alors, en posant $\psi(\xi) = f(\hat{x} + \sqrt[m]{\xi})$, $\xi \geqslant 0$, on obtient de (1) $\psi'(+0) = f^{(m)}(\hat{x})/m! > > 0$, ce qui démontre l'assertion b). L'assertion c) découle immédiatement de la formule de Taylor

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f^{(2s)}(x)\, h^{2s}/(2s)! + o(h^{2s}),$$

qui montre que l'inégalité $f^{(2s)}(\hat{x}) > 0$ entraîne $\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z}$, mais si $f^{(2s)}(\hat{x}) < 0$, alors $\hat{x} \in \text{loc max } \mathfrak{z}$. ■

Les assertions suivantes sont des conséquences presque immédiates des définitions.

Théorème 1 (condition nécessaire d'extrémum du premier ordre). *Supposons que X dans* ($\mathfrak{z}$) *est un espace vectoriel normé et que la fonction f a une dérivée dans la direction h au point $\hat{x} \in U$.*

Si $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$ ($\hat{x} \in \operatorname{loc\,max} \mathfrak{z}$), *alors*

$$f'(\hat{x};\ h) \geqslant 0 \quad (f'(\hat{x};\ h) \leqslant 0). \tag{4}$$

Corollaire 1. *Supposons que f possède une première variation (une première variation selon Lagrange) au point $\hat{x}$. Si* $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$ ($\hat{x} \in \operatorname{loc\,max} \mathfrak{z}$), *alors*

$$\delta_+ f(\hat{x},\ h) \geqslant 0, \quad \forall h \in X \quad (\delta_+ f(\hat{x},\ h) \leqslant 0, \quad \forall h \in X)$$
$$(\delta f(\hat{x},\ h) = 0, \quad \forall h \in X). \tag{5}$$

Corollaire 2. *Supposons que f possède une dérivée dans le sens de Fréchet (Gâteaux) au point $\hat{x}$. Alors, si* $\hat{x} \in \operatorname{loc\,extr} \mathfrak{z}$, *on a*

$$f'(\hat{x}) = 0 \quad (f'_G(\hat{x}) = 0). \tag{6}$$

L'assertion du corollaire 2 est également appelée théorème de Fermat. Les points $\hat{x}$ pour lesquels on a l'égalité (6) sont appelés points *stationnaires* du problème ($\mathfrak{z}$).

Théorème 2 (condition nécessaire d'extrémum du deuxième ordre). *Supposons que dans* ($\mathfrak{z}$) *X est un espace vectoriel normé et f possède une deuxième variation selon Lagrange au point $\hat{x} \in U$. Alors, si* $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$ ($\hat{x} \in \operatorname{loc\,max} \mathfrak{z}$), *on a les relations suivantes:*

$$\delta f(\hat{x},\ h) = 0, \quad \forall h \in X, \tag{7}$$

$$\delta^2 f(\hat{x},\ h) \geqslant 0, \quad \forall h \in X \quad (\delta^2 f(\hat{x},\ h) \leqslant 0, \quad \forall h \in X). \tag{8}$$

Démonstration. L'égalité (7) est contenue dans le corollaire 1. Les inégalités (8) découlent immédiatement de la définition de la deuxième variation selon Lagrange et de l'assertion b) du lemme. ■

Corollaire 3. *Supposons que f possède une dérivée seconde dans le sens de Fréchet au point $\hat{x}$. Alors, si* $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$ ($\hat{x} \in \operatorname{loc\,max} \mathfrak{z}$), *on a les relations suivantes*

$$f'(\hat{x}) = 0, \tag{9}$$

$$f''(\hat{x}) \geqslant 0 \quad (f''(\hat{x}) \leqslant 0). \tag{10}$$

(Ces inégalités signifient que la forme quadratique $d^2f = f''(\hat{x})[h, h]$ est non négative (non positive).)

D é m o n s t r a t i o n. D'après la formule de Taylor (voir 2.2.5),

$$\varphi(\alpha) = f(\hat{x} + \alpha h) = f(\hat{x}) + \alpha f'(\hat{x})[h] + \frac{\alpha^2}{2} f''(\hat{x})[h, h] + o(\alpha^2),$$

d'où l'on tire

$$\delta f(\hat{x}, h) = \varphi'(0) = f'(\hat{x})[h],$$

$$\delta^2 f(\hat{x}, h) = \varphi''(0) = f''(\hat{x})[h, h],$$

et il ne reste qu'à se servir de (7) et (8). ■

Le corollaire 2 affirme que les extrémums locaux sont des points stationnaires. Nous avons déjà mentionné dans 1.3.1 que la réciproque est fausse. Pour obtenir une condition suffisante, il faut faire appel aux dérivées d'ordres supérieurs, comme nous l'avons déjà fait dans le lemme.

T h é o r è m e 3 (c o n d i t i o n s u f f i s a n t e d'e x t r é m u m d e d e u x i è m e o r d r e). *Supposons que X dans* ($\mathfrak{z}$) *est un espace normé et f possède une dérivée seconde dans le sens de Fréchet. Alors, si les relations*

$$f'(\hat{x}) = 0, \tag{11}$$

$$f''(\hat{x})[h, h] \geqslant \alpha \| h \|^2, \quad \forall h \in X \quad (f''(\hat{x})[h, h] \leqslant -\alpha \|h\|^2, \quad \forall h \in X) \tag{12}$$

sont vérifiées pour un certain $\alpha > 0$, *il en découle que*

$$\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z} \quad (\hat{x} \in \text{loc max } \mathfrak{z}).$$

D é m o n s t r a t i o n. Si la première des inégalités (12) est vérifiée, alors, en appliquant à nouveau la formule de Taylor, on obtient

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + \frac{f''(\hat{x})}{2}[h, h] + o(\| h \|^2) \geqslant$$

$$\geqslant f(\hat{x}) + \frac{\alpha}{2} \| h \|^2 + o \| h \|^2) > f(\hat{x}),$$

si $h \neq 0$ et $\| h \|$ est suffisamment petit. Par conséquent, $\hat{x} \in \text{loc min } \mathfrak{z}$. Le cas du maximum s'envisage d'une manière analogue. ■

La condition (12) est appelée *condition de positivité* (*négativité*) *stricte* de la différentielle seconde de f.

R e m a r q u e s. 1. Dans le cas de dimension finie, lorsque $X = \mathbf{R}^n$, les assertions des théorèmes 1 à 3 sont bien connues d'après le cours d'analyse. Le théorème de Fermat signifie alors:

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \partial f(\hat{x})/\partial x_1 = \ldots = \partial f(\hat{x})/\partial x_n = 0. \qquad (13)$$

Il découle de la condition nécessaire de deuxième ordre que, dans le problème d'extrémum de dimension finie l'assertion $\hat{x} \in \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$ implique que la matrice $\left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)$ est définie non négative :

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \, \partial x_j} h_i h_j \geqslant 0, \quad \forall h \in \mathbf{R}^n. \qquad (14)$$

La condition de positivité de la matrice $\left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)$ garantit, comme on voit facilement, la positivité stricte de la différentielle seconde (et elle est donc une condition suffisante de minimum en un point stationnaire). Dans les espaces à dimension infinie ceci n'est plus vrai.

E x e m p l e. Soient $X = l_2$, $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} ((x_j^2/n^3) - x_j^4)$; alors que le point $\hat{x} = 0$ est stationnaire, $f'(0) = 0$, tandis que la différentielle seconde de f à l'origine est définie positive

$$f''(0)[h, h] = \sum_{j=1}^{\infty} h_j^2/n^3.$$

Toutefois, on a $0 \notin \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$ car, sur la suite $\{e_n/n\}_{n=1}^{\infty}$ (où e_i est le i-ième vecteur de base de l'espace l_2), la fonctionnelle f prend des valeurs négatives $f(e_n/n) = (1/n^5) - (1/n^4) < 0$, tandis que la suite elle-même tend vers zéro.

2. Dans le cas unidimensionnel, le lemme par lequel nous avons commencé ce sous-paragraphe donne une réponse, dans un certain sens exhaustive, à la question suivante: est-ce que le point donné d'une fonction f infiniment différentiable fournit un minimum local ou non, à savoir, à l'exclusion du cas trivial (lorsque toutes les dérivées au point zéro s'annulent), le lemme donne la réponse cherchée. Même pour les fonctions de deux variables une procédure aussi complète n'existe sans doute pas.

3. Les inégalités (12) imposent des contraintes importantes sur la structure de l'espace normé X. Si la première des inégalités est valable, la fonction symétrique bilinéaire $(\xi \mid \eta) = f''(\hat{x})[\xi, \eta]$ détermine sur X un produit scalaire, tandis que les inégalités

$$\| f''(\hat{x}) \| \, \| \xi \|^2 \geqslant (\xi \mid \xi) = f''(\hat{x})[\xi, \xi] \geqslant \alpha \| \xi \|^2$$

montrent que la norme engendrée par ce produit scalaire est équivalente à la norme donnée. Par conséquent, X est linéairement homéomorphe à un espace euclidien (préhilbertien). En particulier, les inégalités (12) ne peuvent se rencontrer dans les espaces C et C^1.

3.1.2. Problème élémentaire de programmation linéaire. Au 1.2.6 nous avons déjà écrit, dans ses traits communs, la classe des problèmes de programmation linéaire. Nous considérerons ici le problème le plus simple de cette classe. Il nous intéresse parce que son étude nous permettra d'introduire des conditions importantes d'extrémum, à savoir, les conditions *de correspondance* et *de concordance des signes*, et la condition de *non-rigidité complémentaire.*

Soit $X = \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}^{n*}$ un élément de l'espace dual, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Considérons le problème

$$ax \to \inf \ (\sup) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \inf \ (\sup) ; \qquad (\mathfrak{z})$$

$$x_i \gtreqless 0.$$

Ici, le symbole $\gtreqless$ signifie que dans la contrainte correspondante on a un des trois symboles $\geqslant$, $\leqslant$ ou $=$. Le problème ($\mathfrak{z}$) sera appelé *problème élémentaire de programmation linéaire.*

Nous dirons que la condition de *correspondance* des signes (pour les contraintes $x_i \gtreqless 0$) est remplie pour le vecteur a si $a_i \geqslant 0$ avec la contrainte $x_i \geqslant 0$, $a_i \leqslant 0$ avec la contrainte $x_i \leqslant 0$ et a_i est de signe quelconque lorsque la contrainte prend la forme d'égalité $x_i = 0$. Dans le cas où ces inégalités changent de sens, i.e. si $a_i \geqslant 0$ avec la contrainte $x_i \leqslant 0$, $a_i \leqslant 0$ avec la restriction $x_i \geqslant 0$ (et à nouveau a_i est de signe quelconque pour $x_i = 0$), nous dirons que la condition de *concordance* des signes est remplie. Dans le premier cas, nous écrirons $a_i \gtreqless 0$, dans le deuxième $a_i \lesseqgtr 0$.

Théorème (condition nécessaire et suffisante d'extrémum pour le problème élémentaire de programmation linéaire). *Pour que le point $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ donne un minimum (maximum) absolu au problème* ($\mathfrak{z}$), *il est nécessaire et suffisant que l'on ait les conditions suivantes:*

a) *la condition de correspondance (concordance) des signes*

$$a_i \gtreqless 0 \quad (a_i \lesseqgtr 0), \qquad (1)$$

b) *la condition de non-rigidité complémentaire*

$$a_i \hat{x}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Démonstration. Supposons que ($\mathfrak{z}$) est un problème de minimisation et que la i_0-ième contrainte est de la forme $x_{i_0} \geqslant 0$. Si l'on suppose que $a_{i_0} < 0$, alors la borne inférieure dans le problème ($\mathfrak{z}$) est égale à $-\infty$, car x_{i_0} peut prendre des valeurs positives aussi grandes que l'on veut. Par conséquent, la condition $a_{i_0} \geqslant 0$ est néces-

saire pour que la valeur du problème (l'inf cherché) soit finie. Si l'on admet maintenant que $a_{i_0}\hat{x}_{i_0} \neq 0$, alors d'après la condition $\hat{x}_{i_0} \geqslant 0$ et l'inégalité démontrée $a_{i_0} \geqslant 0$ on a en fait $a_{i_0}\hat{x}_{i_0} > 0$. Mais alors le point $\hat{x}$ ne sera pas une minimale du problème, car sur tout vecteur admissible $\tilde{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i_0-1}, 0, \hat{x}_{i_0+1}, \ldots, \hat{x}_n)$ on a $a\tilde{x} < a\hat{x}$. La suffisance des conditions (1), (2) est évidente. Si, pour préciser, ($\mathfrak{z}$) est toujours considéré comme un problème de minimisation et on a les conditions de correspondance des signes et de non-rigidité complémentaire, alors pour tout vecteur admissible $x \in \mathbf{R}^n$ nous obtenons $ax \geqslant 0$, alors que pour $\hat{x}$, d'après (2), on a $a\hat{x} = 0$. ∎

E x e r c i c e. Déduire le théorème démontré ci-dessus du théorème de Kuhn-Tucker.

3.1.3. Problème de Boltz. Soit Δ un intervalle fini et fermé de la droite réelle. Considérons l'espace de Banach

$$\Xi = C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

constitué des éléments $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$. Dans cet espace, envisageons le problème

$$\mathscr{B}(\xi) = \mathscr{B}(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \text{extr.} \qquad (\mathfrak{z})$$

Dans ($\mathfrak{z}$), les fonctions $(t, x, \dot{x}) \mapsto L(t, x, \dot{x})$ et $(t_0, x_0, t_1, x_1) \to \to l(t_0, x_0, t_1, x_1)$ sont définies dans des sous-ensembles ouverts V et W des espaces $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ respectivement et $t_0, t_1 \in \Delta$. Les deux fonctions seront supposées au moins continues. Le problème ($\mathfrak{z}$) est appelé *problème de Boltz à temps non fixe*, tandis que la fonctionnelle dans ($\mathfrak{z}$) est la *fonctionnelle de Boltz*. Dans 1.4.2, nous avons considéré un cas particulier où $n = 1$ (le cas $n > 1$ n'a été mentionné que brièvement) et les temps t_0 et t_1 étaient fixes.

L e m m e. *Supposons que les fonctions L et l, ainsi que leurs dérivées partielles L_x, $L_{\dot{x}}$, l_{t_i} et l_{x_i}, $i = 0, 1$, sont continues dans les domaines V et W respectivement. Alors la fonctionnelle $\mathscr{B}$ est continûment différentiable (selon Fréchet) sur le sous-ensemble ouvert suivant de l'espace* Ξ :

$$\mathcal{U} = \{\xi = (x(\cdot), t_0, t_1) \mid x(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n);$$
$$(t, x(t), \dot{x}(t)) \in V, \ t \in \Delta; \ (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \in W; \ t_0, t_1 \in \text{int}\, \Delta\},$$

et l'on a

$$\mathscr{B}'(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)[h(\cdot), \tau_0, \tau_1] = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_x(t) h(t) +$$

$$+ \hat{L}_{\dot{x}}(t) \dot{h}(t))\, dt + \hat{L}(\hat{t}_1)\tau_1 - \hat{L}(\hat{t}_0)\tau_0 + \hat{l}_{t_0}\tau_0 +$$

$$+ \hat{l}_{t_1}\tau_1 + \hat{l}_{x_0}(h(\hat{t}_0) + \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\tau_0) + \hat{l}_{x_1}(h(\hat{t}_1) + \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\tau_1), \qquad (1)$$

où

$$\hat{L}(t) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad \hat{L}_x(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)),$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t)), \dot{\hat{x}}(t)), \quad \hat{l}_{t_i} = l_{t_i}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)),$$

$$\hat{l}_{x_i} = l_{x_i}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \quad i = 0, 1.$$

D é m o n s t r a t i o n. La fonctionnelle $\mathscr{B}$ est la somme des fonctionnelles intégrale et terminale. Le fait qu'elles sont continûment différentiables a été démontré dans 2.4.2 et 2.4.3. (La fonctionnelle terminale $\xi \to l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ est un cas particulier de l'opérateur des conditions aux limites.) Pour obtenir (1), il n'y a qu'à se servir des formules (9) de 2.4.2 et (3) de 2.4.3. ■

En vertu de ce lemme, ($\mathfrak{z}$) est un problème différentiable élémentaire sans contraintes. Par conséquent, nous pouvons y appliquer les conditions nécessaires et suffisantes d'extrémum de 3.1.1. Si l'on déchiffre alors l'assertion du théorème de Fermat, on obtient le théorème suivant.

T h é o r è m e 1 (c o n d i t i o n n é c e s s a i r e d ' e x t r é m u m d e p r e m i e r o r d r e p o u r l e p r o b l è m e d e B o l t z). *Supposons que les hypothèses du lemme sont remplies. Si l'élément*

$$\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \in \Xi$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{U}$ *et fournit un minimum local au problème* ($\mathfrak{z}$), *alors*

1) *les conditions de stationnarité par rapport* $x(\cdot)$ *sont satisfaites:*

a) *on a l'équation d'Euler*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0, \qquad (2)$$

b) *la condition de transversalité par rapport à* x

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_i) = (-1)^i \hat{l}_{x_i}, \quad i = 0, 1; \qquad (3)$$

2) *les conditions de transversalité par rapport à t sont satisfaites*:

$$\hat{H}(\hat{t}_i) = (-1)^{i+1}\,\hat{l}_{t_i}, \quad i=0,\ 1, \tag{4}$$

où

$$\hat{H}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)\,\dot{\hat{x}}(t) - \hat{L}(t).$$

Nous avons déjà rencontré les relations (2) et (3) dans 1.4.2. Nous rencontrons ici pour la première fois les conditions de transversalité relativement à t, mais nous les retrouverons constamment au chapitre 4.

D é m o n s t r a t i o n. Nous avons déjà mentionné que le problème $\mathfrak{z}$ est un problème différentiable élémentaire ; le théorème de Fermat y est donc applicable (corollaire 2, 3.1.1) ; d'après celui-ci

$$\hat{\xi} \in \operatorname{loc\ extr} \mathfrak{z} \Rightarrow \mathscr{B}'(\hat{\xi}) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{B}'(\hat{\xi})[\eta] = 0,$$
$$\forall \eta = (h(\cdot),\ \tau_0,\ \tau_1) \in \Xi. \tag{5}$$

En faisant appel à (1), nous obtenons de (5)

$$0 = \mathscr{B}'(\hat{\xi})[\eta] =$$
$$= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_x(t)\,h(t) + \hat{L}_{\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t))\,dt + \alpha_0 h(\hat{t}_0) +$$
$$+ \alpha_1 h(\hat{t}_1) + \beta_0\tau_0 + \beta_1\tau_1, \tag{6}$$

où, pour simplifier, nous avons introduit les notations suivantes:

$$\alpha_i = \hat{l}_{x_i}, \quad \beta_i = \hat{l}_{t_i} + \hat{l}_{x_i}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_i) + (-1)^{i+1}\hat{L}(\hat{t}_i), \quad i=0,\ 1. \tag{7}$$

La relation $\mathscr{B}'(\hat{\xi})[\eta] = 0$ a bien lieu pour tout élément $\eta = (h(\cdot),\ \tau_0,\ \tau_1)$. Envisageons d'abord les éléments de la forme $\eta = (h(\cdot),\ 0,\ 0)$, $h \in C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$, $h(t_i) = 0$, $i = 1,\ 2$. Alors il découle de (6) que

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_x(t)\,h(t) + \hat{L}_{\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t))\,dt = 0 \tag{8}$$

pour toute fonction vectorielle $h(\cdot) \in C^1([\hat{t}_0,\ \hat{t}_1],\ \mathbf{R}^n)$ telle que $h(\hat{t}_0) = h(\hat{t}_1) = 0$. Mais nous avons déjà rencontré cette situation dans 1.4.1. D'après le lemme de Dubois-Raymond, qui y avait été démontré pour les fonctions scalaires, nous obtenons immédiatement la relation (2) (dans 1.4.2 le lemme de Dubois-Raymond avait été

démontré pour les fonctions scalaires, et ici il doit être appliqué à tour de rôle à chaque composante de la fonction vectorielle $h(\cdot)$; en posant $h_1(\cdot) = \ldots = h_{i-1}(\cdot) = h_{i+1}(\cdot) = \ldots = h_n(\cdot) = 0$, nous réduisons (8) à une relation scalaire analogue à une seule composante $h_i(\cdot)$ et obtenons la i-ième équation du système (2)). Nous démontrons alors en même temps le fait que $\hat{L}_{\dot{x}}(t)$ est continûment différentiable. Mais on peut alors effectuer, dans l'expression (6), une intégration par parties qui donne (si l'on se sert de (2))

$$0 = \mathscr{B}'(\hat{\xi})[\eta] = (\alpha_0 - \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0))\, h(t_0) + \\ + (\alpha_1 + \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1))\, h(t_1) + \beta_0\tau_0 + \beta_1\tau_1 \qquad (9)$$

pour des vecteurs $h(t_0)$, $h(t_1)$ et des nombres τ_0 et τ_1 arbitraires. D'où l'on tire immédiatement en se servant de (7) les relations (3) et 4). ■

Comme nous voyons, la démonstration du théorème est essentiellement la même que celle donnée au chapitre I. Sauf qu'alors nous avions calculé les dérivées par les moyens du bord, tandis qu'ici nous nous servons des théorèmes du calcul différentiel provenant des §§ 2.2 et 2.4.

3.1.4. Problème élémentaire de commande optimale. Soit $\mathfrak{U}$ un espace topologique et φ: $[t_0, t_1] \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$. Considérons le problème

$$f(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t, u(t))\, dt \to \inf \qquad (\mathfrak{z})$$

dans l'espace $KC([t_0, t_1], \mathfrak{U})$ des fonctions $u(\cdot)$: $[t_0, t_1] \to \mathfrak{U}$ continues par morceaux à valeurs dans $\mathfrak{U}$. La fonction φ sera supposée continue dans $[t_0, t_1] \times \mathfrak{U}$. Le problème ($\mathfrak{z}$) sera appelé *problème élémentaire de commande optimale.*

Théorème (condition nécessaire et suffisante de minimum pour le problème élémentaire de commande optimale). *Supposons que la fonction $u(\cdot)$ appartient à $KC([t_0, t_1], \mathfrak{U})$ et fournit un minimum absolu au problème ($\mathfrak{z}$). Alors, pour tout point de continuité de la fonction $\hat{u}(\cdot)$, on a la relation*

$$\min_{u \in \mathfrak{U}} f(t, u) = f(t, \hat{u}(t)). \qquad (1)$$

Démonstration. Supposons que la relation (1) n'est pas remplie et qu'il existe un point τ (de continuité de la fonction $\hat{u}(\cdot)$) et un élément $v \in \mathfrak{U}$ tels que $f(\tau, v) < f(\tau, \hat{u}(\tau))$. Les fonctions $t \mapsto f(t, v)$ et $t \mapsto f(t, \hat{u}(t))$ étant continues, il existe dans un voisinage du point τ un intervalle fermé $\Delta = [\tau - \delta, \tau + \delta]$ tel

que $f(t, v) < f(t, \hat{u}(t))$ pour $t \in \Delta$. Posons $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t)$ pour $t \notin \Delta$ et $\tilde{u}(t) = v$ pour $t \in \Delta$. Alors $f(\tilde{u}(\cdot)) < f(\hat{u}(\cdot))$, malgré la minimalité de $\hat{u}(\cdot)$.

3.1.5. Le principe de Lagrange pour les problèmes à égalités et à inégalités. Au chapitre I, nous avons plusieurs fois discuté le principe en vertu duquel on obtient les conditions nécessaires pour les problèmes à contraintes. Maintenant, après avoir distingué quelques problèmes « élémentaires », nous pouvons faire une sorte de résumé.

Les problèmes d'extrémum considérés ont été énoncés de manière à diviser les contraintes en deux groupes, dont le premier consistait d'égalités. En nous servant des contraintes de ce groupe, nous avons construit la fonction de Lagrange. Ensuite, nous avons posé mentalement le problème d'extrémum correspondant pour la fonction de Lagrange relativement au deuxième groupe de contraintes, celles qui n'avaient pas participé à la construction de la fonction de Lagrange. Il s'est alors avéré que le problème d'extrémum ainsi obtenu était soit un problème élémentaire, soit un problème qui engendrait des problèmes élémentaires « partiels », obtenus en fixant toutes les variables sauf une. Les conditions nécessaires pour les problèmes élémentaires obtenues dans leur ensemble nous donnaient justement la famille des conditions nécessaires d'extrémum cherchées. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que toutes les conditions nécessaires d'extrémum dont il s'agissait au chapitre I et toutes les conditions nécessaires dont on parlera au chapitre IV s'accordent avec la procédure décrite. La seule exception est donnée par les problèmes à inégalités, dans lesquels des conditions supplémentaires apparaissent. Ces problèmes seront étudiés en détail dans le paragraphe suivant, tandis qu'ici nous montrerons qu'ils peuvent eux aussi être inclus dans le cadre du « principe de Lagrange » que nous venons de décrire.

Supposons (pour fixer les idées) que nous avons un problème de minimisation

$$f_0(x) \to \inf; \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad (\mathfrak{z})$$

où, en outre des égalités, nous rencontrons également des inégalités (X et Y dans ($\mathfrak{z}$) sont des espaces vectoriels topologiques, $f_i: X \to \mathbf{R}$, $F: X \to Y$). En introduisant des nouvelles variables u_i, nous pouvons mettre le problème ($\mathfrak{z}$) sous la forme

$$f_0(x) \to \inf; \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) + u_i = 0,$$
$$u_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (\tilde{\mathfrak{z}})$$

Décomposons les contraintes en deux groupes, dont le premier consiste des égalités ($F(x) = 0$, $f_i(x) + u_i = 0$) et le deuxième des

contraintes de la forme $u_i \gtrless 0$. Pour le problème $(\widetilde{\mathfrak{z}})$, constituons la fonction de Lagrange, en laissant de côté les contraintes du deuxième groupe:

$$\widetilde{\mathscr{L}}(x, u, y^*, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i(x) + u_i) + \langle y^*, F(x)\rangle, \quad \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m),$$

et en fixant le signe du facteur λ_0 (pour le problème de minimum: $\lambda_0 \geqslant 0$, et de maximum: $\lambda_0 \leqslant 0$).

Dans le problème de minimisation de la fonction de Lagrange (pour les multiplicateurs fixes)

$$\widetilde{\mathscr{L}}(x, u, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \to \inf$$

il y a deux groupes de variables x et u. Si l'on fixe les variables $u = \hat{u}$, on obtient le problème élémentaire sans contraintes (différentiable, convexe, etc.); ici on peut écrire la condition nécessaire d'extrémum appropriée et, comme on voit facilement, $\hat{u}_i$ n'apparaissent pas dans cette condition. Mais si l'on fixe les variables $x = \hat{x}$, on obtient le problème élémentaire de programmation linéaire. Les conditions d'extrémum énoncées en accord avec 3.1.2 nous donnent la condition de *correspondance des signes* des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda}_i \gtrless 0 \tag{1}$$

et les conditions de *non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i \hat{u}_i = 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0. \tag{2}$$

Par la suite, nous allons nous servir à chaque fois de cette procédure, mais, si nous avons des contraintes sous forme d'inégalités, en construisant la fonction de Lagrange, nous l'écrirons tout de suite sous la forme brève

$$\mathscr{L}(x, y^*, \lambda, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$$

et c'est justement cette fonction que nous appellerons *fonction de Lagrange* du problème $(\mathfrak{z})$. Il faut seulement avoir en vue qu'à ces conditions d'extrémum relativement à x il faut ajouter les relations qui découlent de (1), (2), à savoir, les conditions de *concordance des signes*

$$f_i(x) \lessgtr 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_i \gtrless 0 \tag{1'}$$

et de *non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0.$$

Remarquons maintenant que le principe de Lagrange (ainsi que, par exemple, le théorème de Fermat pour le problème d'extrémum différentiable) donne seulement des conditions nécessaires d'extrémum, i.e. distingue l'ensemble des objets « suspects », mais ne démontre pas leur « culpabilité ». Par conséquent, pour obtenir une solution complète du problème, il faut avoir des conditions suffisantes d'extrémum, ou bien être sûr que la solution existe.

La première situation permet « d'effectuer l'expertise »: chacun des objets distingués par les conditions nécessaires doit être vérifié pour sa suffisance. Ayant trouvé parmi eux celui qui vérifie les conditions suffisantes, nous décidons que le problème est résolu.

Dans la deuxième situation, la solution cherchée (dont l'existence est connue à priori ou a été démontrée) doit faire partie des objets suspects qui vérifient les conditions nécessaires d'extrémum. En calculant pour chacun d'eux la valeur de la fonctionnelle, nous prenons pour solution celui pour lequel cette valeur est extrémale.

Il va de soi que l'on ne peut accorder une fois pour toutes la préférence à l'une des deux méthodes. Les conditions suffisantes ne coïncident généralement pas avec les conditions nécessaires, et, par conséquent, il peut rester des « suspects » dont la « culpabilité » n'a pas été établie (par exemple, les théorèmes de 3.1.1 ne donnent pas d'indication sur l'existence ou l'absence d'extrémum au point $\hat{x}$ pour une fonction « plate » $f(x)$, pour laquelle $f^{(k)}(\hat{x}) = 0$ pour tous les k). D'autre part, même si nous savons que la solution existe, il nous sera difficile de trouver la solution cherchée si les conditions nécessaires distinguent un ensemble infini (ou même très grand) d'objets suspects.

Dans la majorité des cas, l'existence de la solution s'établit en se servant de diverses modifications du théorème classique de Weierstrass, déjà mentionné dans 1.6.1 : l'existence est une conséquence de la compacité de l'ensemble des éléments admissibles et de la semi-continuité de la fonctionnelle.

D é f i n i t i o n. La fonction $f: X \to \mathbf{R}$, définie sur l'espace topologique X, est dite *semi-continue inférieurement au point* x_0 si $\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$; f est tout simplement *semi-continue inférieurement*, si elle est semi-continue inférieurement en chacun de ces points (comparer à 2.6.2).

T h é o r è m e d e W e i e r s t r a s s. *Toute fonction semi-continue inférieurement $f: X \to \mathbf{R}$ atteint son minimum sur tout sous-ensemble dénombrablement compact d'un espace topologique X.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $A \subset X$ est un sous-ensemble dénombrablement compact et S la valeur du problème

$$f(x) \to \inf, \quad x \in A, \tag{3}$$

i.e.

$$S = \inf_{x \in A} f(x).$$

D'après la définition de la borne inférieure, nous pouvons choisir une suite minimisante du problème (3), i.e. une suite de points $x_n \in A$ telle que $f(x_n) \to S$. D'après la définition de la compacité dénombrable, on peut choisir dans x_n une sous-suite x_{n_k} qui converge vers un certain point $\hat{x} \in A$. D'après la semi-continuité,

$$f(\hat{x}) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$$

et puisque, d'autre part, $f(x)$ ne peut être inférieure à la valeur du problème (3), $f(\hat{x}) = S$, i.e. $\hat{x}$ est un point de minimum. ■

Corollaire. *Supposons que f est semi-continue inférieurement sur l'espace topologique X. Si un certain ensemble de Lebesgue $\mathscr{L}_\alpha f = \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ de la fonction f est non vide et dénombrablement compact, alors f atteint son minimum sur X.*

§ 3.2. Principe de Lagrange pour les problèmes différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités

3.2.1. Enoncé du théorème. Considérons le problème d'extrémum

$$f_0(x) \to \text{extr}; \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \lesseqgtr 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Le symbole $f_i(x) \lesseqgtr 0$ signifie que la i-ième contrainte est soit de la forme $f_i(x) = 0$, soit $f_i(x) \leqslant 0$, soit $f_i(x) \geqslant 0$.

Les problèmes du type (1), où X et Y sont des espaces normés, f_i des fonctions différentiables sur X et F est une application différentiable de X dans Y, sont appelés *problèmes d'extrémum différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités.*

La *fonction de Lagrange* pour le problème (1) est la fonction

$$\mathscr{L}(x, y^*, \lambda, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle, \tag{2}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m*}$, $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, $y^* \in Y^*$ sont les *multiplicateurs de Lagrange.*

Théorème (méthode des multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes différentiables à égalités et inégalités). *Soient X et Y des espaces de Banach, U un ouvert dans X, $f_i\colon U \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, des fonctions et $F\colon U \to Y$ une application strictement différentiables au point $\hat{x}$.*

Si $\hat{x}$ *fournit un extrémum local au problème* (1) *et si*

l'image Im $F'(\hat{x})$ *est un sous-espace fermé de* Y, (3)

il existe des multiplicateurs de Lagrange $\hat{y}^*$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}_0$ *pour lesquels sont vérifiées*:

a) *la condition de stationnarité de la fonction de Lagrange relativement à* x:

$$\mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = 0; \tag{4}$$

b) *la condition de concordance des signes*: $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$ *s'il s'agit du problème de minimum*, $\hat{\lambda}_0 \leqslant 0$ *s'il s'agit du problème de maximum*

$$\hat{\lambda}_i \gtreqless 0, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{5}$$

c) *les conditions de non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Rappelons encore que la notation $\hat{\lambda}_i \gtreqless 0$ signifie que, dans les conditions du problème (1), si l'on a $f_i(x) \geqslant 0$, alors $\hat{\lambda}_i \leqslant 0$, si $f_i(x) \leqslant 0$, alors $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, et enfin, si $f_i(x) = 0$, alors $\hat{\lambda}_i$ peut être de signe arbitraire.

L'affirmation d'existence des multiplicateurs de Lagrange vérifiant l'ensemble des conditions a) à c) est en accord avec le principe général de l'élimination des contraintes: c'est justement ce principe qui a été discuté dans le dernier sous-paragraphe du paragraphe précédent. Par conséquent, le résultat énoncé sera également appelé *principe de Lagrange pour les problèmes différentiables à égalités et à inégalités.*

La démonstration du théorème général est fondée, d'une part, sur le théorème des fonctions implicites du § 2.3 et, d'autre part, sur le théorème de Kuhn-Tucker, i.e., en fin de compte, sur le théorème de séparabilité de dimension finie. Le théorème de Kuhn-Tucker a été démontré dans le § 1.3, et notre renvoi à ce théorème est essentiellement le seul renvoi important au premier chapitre dans cette partie du livre. La nécessité de faire appel au théorème de Kuhn-Tucker est liée au fait que des inégalités apparaissent dans (1), ce qui complique quelque peu la démonstration. Le cas où les inégalités sont absentes est tout à fait simple, mais en même temps instructif et intéressant. Nous le considérerons donc séparément, quoique, bien sûr, ce cas est une conséquence automatique du résultat général. Pendant la lecture du sous-paragraphe suivant, nous recommandons au lecteur de comparer parallèlement la variante de dimension infinie de la démonstration à celle de dimension finie que nous avons considérée dans 1.3.2.

3.2.2. La méthode des multiplicateurs pour les problèmes différentiables à égalités.

Théorème (le principe de Lagrange pour les problèmes différentiables à égalités).

a) *Soient* X *et* Y *des espaces de Banach,* U *un ouvert dans* X, $f\colon U \to \mathbf{R}$, $F\colon U \to Y$ *une fonction et une application strictement différentiables au point* $\hat{x}$.

Si le point $\hat{x}$ *est un point d'extrémum local pour le problème*

$$f(x) \to \text{extr}, \quad F(x) = 0 \tag{1}$$

et si l'image $\operatorname{Im} F'(x)$ *est un sous-espace fermé de* Y, *alors il existe des multiplicateurs de Lagrange* $\hat{\lambda}_0 \in \mathbf{R}$ *et* $\hat{y}^* \in Y^*$ *pour lesquels on a la condition de stationnarité de la fonction de Lagrange:*

$$\mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}_0) = 0 \Leftrightarrow \langle \hat{\lambda}_0 f'(\hat{x}), x\rangle + \langle \hat{y}^*, F'(\hat{x})[x]\rangle = 0, \quad \forall x. \tag{2}$$

b) *Si l'on a la condition de régularité pour l'application* F, *i.e. si* $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ *coïncide avec l'espace* Y *tout entier, alors le multiplicateur* $\hat{\lambda}_0$ *n'est pas nul.*

Nous effectuerons d'abord la démonstration pour le problème de minimum. Définissons l'application

$$\mathscr{F}(x) = (f(x) - f(\hat{x}), F(x)), \quad \mathscr{F}\colon U \to \mathbf{R} \times Y.$$

L'application $\mathscr{F}$ est de toute évidence strictement différentiable en $\hat{x}$ et $\mathscr{F}'(\hat{x}) = (f'(\hat{x}), F'(\hat{x}))$.

Deux cas sont possibles, suivant que l'image $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x})$ coïncide ou non avec l'espace $\mathbf{R} \times Y$.

A) Considérons d'abord le cas $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x}) \neq \mathbf{R} \times Y$. Appliquons à l'application $\mathscr{F}'(\hat{x})$ le lemme sur l'image fermée (2.1.6). L'image $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ est fermée par hypothèse, l'image $f'(\hat{x})$ $(\operatorname{Ker} F'(\hat{x}))$ est soit $\{0\}$, soit $\mathbf{R}$, i.e. est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}$. Par conséquent, d'après le lemme cité, l'image $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x})$ est fermée dans $\mathbf{R} \times Y$. Puisqu'elle ne coïncide pas avec $\mathbf{R} \times Y$, $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x})$ est un sous-espace fermé propre. D'après le lemme sur la non-trivialité de l'annulateur (2.1.4), il existe un nombre $\hat{\lambda}_0$ et un élément $\hat{y}^*$ (voir 2.1.2, où il s'agit de la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans le produit d'espaces) qui ne s'annulent pas simultanément $(|\hat{\lambda}_0| + \|\hat{y}^*\| \neq 0)$ et tels que

$$\langle \hat{\lambda}_0 f'(\hat{x}), x\rangle + \langle \hat{y}^*, F'(\hat{x})[x]\rangle = 0, \quad \forall x.$$

Mais cette relation coïncide avec (2).

B) Supposons maintenant que $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x}) = \mathbf{R} \times Y$. Alors nous pouvons appliquer le théorème sur l'existence de la fonction implicite (voir 2.3.1 à 2.3.3).

D'après ce théorème [1], il existe une constante $K > 0$, un voisinage $\mathcal{U}$ du point $(0, 0)$ dans l'espace $\mathbf{R} \times Y$ et une application $\varphi: \mathcal{U} \to X$ tels que

$$\mathscr{F}(\varphi(\alpha, y)) = (\alpha, y) \quad \text{et} \quad \|\varphi(\alpha, y) - \hat{x}\| \leqslant \leqslant K \|\mathscr{F}(\hat{x}) - (\alpha, y)\|. \tag{3}$$

Posons $x(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon, 0) = \varphi(z(\varepsilon))$. Alors on tire de (3)

$$\mathscr{F}(x(\varepsilon)) = z(\varepsilon) \Leftrightarrow f(x(\varepsilon)) - f(\hat{x}) = -\varepsilon, \quad F(x(\varepsilon)) = 0, \tag{4}$$

$$\|x(\varepsilon) - \hat{x}\| = \|\varphi(z(\varepsilon)) - \hat{x}\| \leqslant \leqslant K \|(0, 0) - (-\varepsilon, 0)\| = K|\varepsilon|. \tag{5}$$

Il découle de (4), (5) que $x(\varepsilon)$ est un élément admissible pour le problème (1) aussi proche que l'on veut de $\hat{x}$ et en même temps on a $f(x(\varepsilon)) < f(\hat{x})$, i.e. $\hat{x} \notin \operatorname{loc\,min}$ (1). Cette contradiction montre que l'égalité $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x}) = \mathbf{R} \times Y$ est impossible. L'assertion a) du théorème est donc démontrée.

C) Supposons que F est régulière au point $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}_0 = 0$. Alors $\hat{y}^* \neq 0$ et la relation (2) se met sous la forme $\langle y^*, F'(\hat{x})[x]\rangle = 0$, $\forall x$. Choisissons un élément $\tilde{y}$ de manière à avoir $\langle \hat{y}^*, \tilde{y}\rangle \neq 0$ (ce qui est possible, car $\hat{y}^* \neq 0$) et trouvons un élément $\tilde{x}$ tel que $F'(\hat{x})[\tilde{x}] = \tilde{y}$ ($\tilde{x}$ existe en vertu de la relation $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$). Alors $0 \neq \langle \hat{y}^*, \tilde{y}\rangle = \langle \hat{y}^*, F(\hat{x})[\tilde{x}]\rangle = 0$. Cette contradiction démontre la deuxième assertion du théorème. ■

R e m a r q u e. Nous avons effectué la démonstration selon le même schéma que celui qui fut employé pour établir la méthode des multiplicateurs de Lagrange en dimension finie (1.3.2) et elle s'est avérée aussi simple et brève.

[1] Il faut mettre en correspondance les notations du théorème 2.3.1 avec les notations du présent sous-paragraphe. X, l'espace topologique dans le théorème des fonctions implicites (f.i.), consiste ici du seul point $\{x_0\}$, Y (f.i.)$\Leftrightarrow X$, Z (f.i.)$\Leftrightarrow \mathbf{R} \times Y$, $\Psi(x, y) = \Psi(x_0, y)$ (f.i.)$\Leftrightarrow \mathscr{F}(x)$, Λ (f.i.)$\Leftrightarrow \mathscr{F}'(\hat{x})$, y_0 (f.i.)$\Leftrightarrow \hat{x}$, z_0 (f.i.)$\Leftrightarrow 0 \in \mathbf{R} \times Y$. La condition 1) du théorème est vérifiée trivialement, la condition 2) est vérifiée en vertu de la différentiabilité stricte de $\mathscr{F}$, car

$$\Psi(x_0, y') - \Psi(x_0, y'') - \Lambda(y' - y'') \Leftrightarrow \mathscr{F}(x') - \mathscr{F}(x'') - \mathscr{F}'(\hat{x})[x' - x''],$$

et enfin la condition 3) a lieu puisque $\operatorname{Im} \mathscr{F}'(\hat{x}) = \mathbf{R} \times Y$.

Il est vrai, une certaine préparation a été nécessaire : nous nous sommes servis de trois faits d'analyse fonctionnelle, à savoir, le théorème sur la non-trivialité de l'annulateur (i.e., en fin de compte, le théorème de Hahn-Banach), le lemme sur l'image fermée et le théorème des fonctions implicites. Pour terminer le théorème général — démontrer la méthode des multiplicateurs pour les problèmes à inégalités — il nous faudra, en plus de ces trois faits, également le théorème de Kuhn-Tucker qui est une conséquence directe du théorème de séparabilité en dimension finie (voir F) dans la démonstration du théorème dans 3.2.4). Il est remarquable qu'avec des moyens si limités, se rapportant aux structures mathématiques générales, nous avons obtenu un résultat dont l'une des conséquences directes, obtenue par des moyens auxiliaires également d'ordre général (le théorème de Riesz sur les fonctionnelles linéaires dans l'espace C et les théorèmes standards de la théorie des équations différentielles) nous donnera, dans le chapitre suivant, des résultats concrets importants : les conditions nécessaires d'extrémum pour les problèmes du calcul des variations classique et les problèmes de commande optimale.

3.2.3. Réduction du problème. Avant de commencer la démonstration du théorème énoncé dans 3.2.1, nous allons effectuer certaines transformations de ses hypothèses. D'abord, en remplaçant s'il le faut f_0 par $(-1) f_0$, *nous réduirons le problème à un problème de minimum.* Si, parmi les contraintes de la forme $f_i(x) \leqslant 0$ ou $f_i(x) \geqslant 0$, il y en a quelques-unes pour lesquelles $f_i(\hat{x}) < 0$ ou respectivement $f_i(\hat{x}) > 0$, nous les mettrons de côté, puisque du point de vue local elles ne sont pas essentielles, car elles sont vérifiées en tous les points d'un certain voisinage du point $\hat{x}$. En outre, si la relation (1) de 3.2.1 contient des inégalités $f_i(x) \geqslant 0$, $f_i(\hat{x}) = 0$, *nous les remplacerons par les inégalités* $(-1) f_i(x) \leqslant 0$. Les égalités $f_i(x) = 0$, par contre, *seront ajoutées à l'égalité* $F(x) = 0$. Rénumérotons maintenant toutes les inégalités qui donnent les contraintes ; nous obtiendrons alors le problème suivant, équivalent à (1) :

$$\tilde{f}_0(x) \to \inf; \quad \tilde{F}(x) = 0, \quad \tilde{f}_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, \tilde{m}, \tag{1'}$$

où $\tilde{F}(x) = (F(x), \tilde{f}_{\tilde{m}+1}(x), \ldots, \tilde{f}_\mu(x))$ et pour chaque j, $0 \leqslant j \leqslant \mu$, il existe des i_j et $\varepsilon_j = +1$ ou -1 tels que

$$\tilde{f}_j(x) \equiv \varepsilon_j f_{i_j}(x). \tag{2'}$$

Dans le problème (1′) le point $\hat{x}$ fournit un minimum local et l'on a $\hat{f}_j(\hat{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, \tilde{m}$.

Montrons maintenant que toutes les hypothèses du théorème sont remplies pour le problème (1′). En effet, X et $Y \times \mathbf{R}^{\mu-\tilde{m}}$ sont des espaces de Banach. Les fonctions $\tilde{f}_j$ et l'application $\tilde{F}$ sont strictement différentiables au point $\hat{x}$ (puisque F et f_j l'étaient).

Il ne reste qu'à montrer que $L = \operatorname{Im} \widetilde{F}'(\hat{x})$ est fermé dans $Y \times \mathbf{R}^{\mu-\widetilde{m}}$. On a $\widetilde{F}'(\hat{x}) = (F'(\hat{x}), \Phi'(\hat{x}))$, où

$$\Phi'(\hat{x})[x] = (\langle \widetilde{f}'_{\widetilde{m}+1}(\hat{x}), x\rangle, \ldots, \langle \widetilde{f}'_{\mu}(\hat{x}), x\rangle, \quad \Phi'(\hat{x}) : X \to \mathbf{R}^{\mu-\widetilde{m}}.$$

L'image $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ est fermée par hypothèse, tandis que le sous-espace $\Phi'(\hat{x})[\operatorname{Ker} F'(\hat{x})] \subset \mathbf{R}^{\mu-\widetilde{m}}$ est fermé, comme tout sous-espace d'un espace de dimension finie. Par conséquent, d'après le lemme sur l'image fermée (2.1.6), $\operatorname{Im} \widetilde{F}'(\hat{x})$ est fermée dans $Y \times \mathbf{R}^{\mu-\widetilde{m}}$.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour le problème (1′) et il existe donc des multiplicateurs de Lagrange $\widetilde{y}^* = (\hat{y}^*, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{m}+1}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\mu})$, $\widetilde{\lambda}_j$, $j = 0, 1, \ldots, \widetilde{m}$, pour lesquels on a a) et b) de 3.2.1 (les conditions c) sont vérifiées automatiquement puisque $\widetilde{f}_j(\hat{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, \widetilde{m}$). D'après b), $\widetilde{\lambda}_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, \widetilde{m}$, et d'après a)

$$\widetilde{\mathscr{L}}_x(\widetilde{x}, \hat{y}^*, \widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{m}}, \widetilde{\lambda}^0) = \sum_{j=0}^{\widetilde{m}} \widetilde{\lambda}_j \widetilde{f}'_j(\hat{x}) + (\widetilde{y}^* \circ \widetilde{F})'(\hat{x}) = 0, \qquad (3')$$

où

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \sum_{j=0}^{\widetilde{m}} \widetilde{\lambda}_j \widetilde{f}_j(x) + (\widetilde{y}^* \circ \widetilde{F})(x).$$

Il ne reste maintenant qu'à poser $\hat{\lambda}_0 = \widetilde{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_{i_j} = \varepsilon_j \widetilde{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots$

$$\ldots, \widetilde{m}, \ \hat{\lambda}_{i_j} = \widetilde{\lambda}_j; \quad j = \widetilde{m} + 1, \ldots, \mu$$

et $\hat{\lambda}_i = 0$, lorsque $f_i(\hat{x}) \neq 0$. La famille obtenue vérifie, ce qui est évident, les conditions de non-rigidité complémentaire et la condition de concordance des signes (car dans (2′) on a $\varepsilon_j = +1$ lorsque la contrainte est de la forme $f_{i_j}(x) \leqslant 0$ et $\varepsilon_j = -1$ pour $f_{i_j} \geqslant 0$). En outre, puisque

$$\widetilde{\mathscr{L}}(x, \hat{y}^*, \widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\mu}, \widetilde{\lambda}_0) = \mathscr{L}(x, \hat{y}^*, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_0),$$

la condition de stationnarité de la fonction de Lagrange est vérifiée ou ne l'est pas pour les deux fonctions simultanément.

Ainsi, par la suite, nous pouvons nous limiter à l'étude du problème (1′). Néanmoins, pour simplifier, nous n'écrirons plus le signe $\sim$ au-dessus de F, f_j et m.

3.2.4. Démonstration du théorème. Ainsi, étant donné le problème

$$f_0(x) \to \inf; \quad F(x) = 0, \quad f_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

supposons que toutes les hypothèses du théorème de 3.2.1 sont remplies et que l'on a $f_j(\hat{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Sans perte de généralité, on peut supposer également que $f_0(\hat{x}) = 0$.

La démonstration sera effectuée en plusieurs étapes.

A) Le cas linéaire. Considérons d'abord la situation la plus simple, lorsque $f_0 = x^*$ est une fonctionnelle linéaire, $f_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m$, tandis que $F = \Lambda$ est un *opérateur linéaire continu surjectif*. Le point $\hat{x} = 0$ est la solution du problème

$$\langle x^*, x\rangle \to \inf; \quad \Lambda x = 0 \quad (\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y), \quad \Lambda(X) = Y) \tag{2}$$

si et seulement si $x^* \in (\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp$. D'après le lemme sur l'annulateur du noyau (2.1.7), il existe un élément $\hat{y}^* \in Y^*$ tel que $x^* + \Lambda^*\hat{y}^* = 0$. Mais cette relation est précisément le principe de Lagrange pour le problème (2):

$$x^* + \Lambda^*\hat{y}^* = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_x(0, \hat{y}^*, 1) = 0,$$

où $\mathscr{L}(x, y^*, \lambda_0) = \lambda_0 \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, \Lambda x\rangle = \langle \lambda_0 x^* + \Lambda^* y^*, x\rangle$ est la fonction de Lagrange du problème (2). Ainsi dans cette situation le principe de Lagrange est vérifié.

B) Le cas dégénéré. $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ est un sous-espace propre de Y. D'après le lemme sur la non-trivialité de l'annulateur (2.1.4), il existe un élément $\hat{y}^* \in (\operatorname{Im} F'(\hat{x}))^\perp \Leftrightarrow (\hat{y}^* \circ F')(\hat{x}) = 0$. Il ne reste qu'à poser $\hat{\lambda}_i = 0$, $i = 0, \ldots, m$, et vérifier que le principe est valable dans le cas dégénéré en considération.

Nous supposons maintenant que F est un opérateur régulier au point $\hat{x}$, i.e. $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$.

Posons, pour $0 \leqslant k \leqslant m$,

$$A_k = \{x \mid \langle f_i'(\hat{x}), x\rangle < 0, \quad i = k, k+1, \ldots, m, \; F'(\hat{x})[x] = 0\}.$$

C) Lemme 1 (le lemme principal). *Si $\hat{x}$ est une solution locale du problème* (1), *alors l'ensemble A_0 est vide. Autrement dit,*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} \langle f_i'(\hat{x}), x\rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}).$$

Démonstration. Supposons que A_0 est non vide, i.e. il existe un élément ξ tel que

$$F'(\hat{x})[\xi] = 0, \quad \langle f_i'(\hat{x}), \xi\rangle = \beta_i, \quad \beta_i < 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant m.$$

Alors, d'après le théorème de Lusternik (voir 2.3.5), il existe une application $r: [-\alpha, \alpha] \to X$, $\alpha > 0$, telle que

$$F(\hat{x} + \lambda\xi + r(\lambda)) \equiv 0, \quad \lambda \in [-\alpha, \alpha], \quad r(\lambda) = o(\lambda). \qquad (3)$$

Pour des $\lambda > 0$ petits, nous avons pour $i = 0, 1, \ldots, m$ les inégalités

$$f_i(\hat{x} + \lambda\xi + r(\lambda)) = f_i(\hat{x}) + \lambda \langle f_i'(\hat{x}), \xi\rangle + o(\lambda) = \\ = \lambda\beta_i + o(\lambda) < 0. \qquad (4_i)$$

Les relations (3) et (4_i), $i = 1, \ldots, m$, signifient que pour des valeurs de $\lambda > 0$ petites, l'élément $\hat{x} + \lambda\xi + r(\lambda)$ est admissible pour le problème (1). Mais alors l'inégalité (4_i) est en contradiction avec la minimalité locale de $\hat{x}$. ■

D) Lemme 2. *Si A_m est l'ensemble vide, alors le principe de Lagrange est valable pour le problème* (1).

Démonstration. A_m étant vide, on voit que $x = 0$ est une solution du problème

$$\langle f_m'(\hat{x}), x\rangle \to \inf, \quad F'(\hat{x})[x] = 0.$$

D'après A), le principe de Lagrange pour ce problème est valable, et donc il est également valable pour le problème (1) (il faut seulement poser $\hat{\lambda}_0 = \ldots = \hat{\lambda}_{m-1} = 0$).

Ainsi il découle de C) et D) que soit le principe de Lagrange est déjà démontré ($A_m = \varnothing$), soit il existe un k, $0 \leqslant k < m$, tel que

$$A_k = \varnothing, \quad A_{k+1} \neq \varnothing. \qquad (5)$$

E) Lemme 3. *Si l'on a les relations* (5), *alors zéro est la solution du problème de programmation linéaire suivant*:

$$\langle f_k'(\hat{x}), x\rangle \to \inf; \langle f_i'(\hat{x}), x\rangle \leqslant 0, \\ i = k+1, \ldots, m, \quad F'(\hat{x})[x] = 0. \qquad (6)$$

Démonstration. Supposons que η est un élément admissible pour le problème (6) (i.e. $\langle f_i'(\hat{x}), \eta\rangle \leqslant 0$, $i \geqslant k+1$, $F'(\hat{x})[\eta] = 0$) tel que $\langle f_k'(\hat{x}), \eta\rangle < 0$. Soit ζ un élément de A_{k+1}, i.e. $\langle f_i'(\hat{x}), \zeta\rangle < 0$, $i \geqslant k+1$, $F'(\hat{x})[\zeta] = 0$. Alors, pour un $\varepsilon > 0$ petit, l'élément $\eta + \varepsilon\zeta$ appartient à A_k, ce qui est en contradiction avec (5). ■

F) Conclusion de la démonstration. Si l'on applique le théorème de Kuhn-Tucker (1.3.3) au problème (6), en prenant en considération le fait que la condition de Slater est vérifiée pour ce problème (A_{k+1} étant non vide), nous pouvons trouver des

nombres non négatifs $\hat{\lambda}_{k+1}, \ldots, \hat{\lambda}_m$ tels que le point zéro est la solution du problème

$$\langle f'_k(\hat{x}), x\rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \langle \hat{\lambda}_i f'_i(\hat{x}), x\rangle \to \inf, \quad F'(\hat{x})[x] = 0. \tag{7}$$

(Cette dernière assertion n'est autre que le principe du minimum pour le problème (6), le multiplicateur de Lagrange de la fonctionnelle étant pris égal à 1, puisque la condition de Slater est remplie.) Mais le problème (7) est justement le problème que l'on avait envisagé dans A). Le principe de Lagrange est donc valable pour ce problème, ou, ce qui revient au même dans notre situation, on peut appliquer le lemme sur l'annulateur du noyau de l'opérateur $F'(\hat{x})$. Autrement dit, il existe un élément $\hat{y}^*$ pour lequel

$$f'_k(\hat{x}) + \sum_{i=k+1}^{m} \hat{\lambda}_i f'_i(\hat{x}) + (\hat{y}^* \circ F')(\hat{x}) = 0.$$

Mais c'est là la condition de stationnarité de la fonction de Lagrange si l'on pose $\hat{\lambda}_0 = \ldots = \hat{\lambda}_{k-1} = 0$, $\hat{\lambda}_k = 1$. ■

Pendant la démonstration pour $A_1 \neq \varnothing$ il s'est avéré que $\hat{\lambda}_0 = 1$. Montrons que si F est régulière (i.e. $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$), aucune famille de multiplicateurs de Lagrange vérifiant la condition de stationnarité de la fonction de Lagrange ne peut contenir le multiplicateur $\hat{\lambda}_0 = 0$. En effet, pour $A_1 \neq \varnothing$, il existe un élément h tel que

$$F'(\hat{x}), [h] = 0, \langle f'_i(\hat{x}), h\rangle < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Supposons maintenant que nous avons trouvé des multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m)$, $\tilde{y}^*$ qui ne s'annulent pas simultanément et vérifient $\mathscr{L}_x(\hat{x}, \tilde{y}^*, \tilde{\lambda}, 0) = 0$. Alors, d'après les inégalités $\tilde{\lambda}_i \langle f'_i(\hat{x}), h\rangle \leqslant 0$, nous avons

$$0 = \mathscr{L}_x(\hat{x}, \tilde{y}^*, \tilde{\lambda}, 0)[h] = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \langle f'_i(\hat{x}), h\rangle + \langle \tilde{y}^*, F'(\hat{x})[h]\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \langle f'_i(\hat{x})\, h\rangle \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 = \ldots = \tilde{\lambda}_m = 0 \Rightarrow \tilde{y}^* \neq 0,$$

et maintenant

$$0 = \mathscr{L}_x(\hat{x}, \tilde{y}^*, \tilde{\lambda}, 0)[x] = \langle \tilde{y}^*, F'(\hat{x})[x]\rangle, \quad \forall x \Rightarrow \operatorname{Im} F'(\hat{x}) \neq Y,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Enonçons tout ceci dans une proposition séparée.

P r o p o s i t i o n. *Pour avoir* $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ *dans le théorème de* 3.2.1, *il suffit d'y ajouter l'hypothèse* $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$ *et de supposer qu'il existe un élément* $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$ *pour lequel*

$$\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Les hypothèses supplémentaires mentionnées ici seront appelées *conditions de régularité forte du problème* (1).

Dans l'énoncé du principe de Lagrange que nous avons démontré (à part les conditions affirmant que les espaces sont des espaces de Banach et les fonctions sont différentiables) il n'y avait qu'une seule hypothèse, affirmant que l'image $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ est fermée. Il faut remarquer que sans une hypothèse de ce genre le principe de Lagrange serait faux.

Tout d'abord, si l'on se passe de l'hypothèse de surjectivité de l'opérateur $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ (X et Y étant des espaces de Banach), la formule $(\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp = \operatorname{Im} \Lambda^*$ peut s'avérer fausse, plus exactement, il peut arriver que $\operatorname{Im} \Lambda^*$ est un sous-espace propre de $(\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp$. Par exemple, si

$$X = Y = l_2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2,$$
$$\Lambda x = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots),$$

on a $\operatorname{Ker} \Lambda = \{0\}$, donc $(\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp = l_2$, tandis que $\operatorname{Im} \Lambda = \operatorname{Im} \Lambda^* \neq l_2$ (par exemple, l'élément $\hat{y} = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$ appartient à l_2, mais l'équation $\Lambda x = \hat{y}$ n'a évidemment pas de solution). Nous pouvons maintenant donner un exemple de problème pour lequel le principe de Lagrange est faux.

E x e m p l e. Soient X et Y des espaces de Banach et supposons que l'opérateur $\Lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$ vérifie $\operatorname{Ker} \Lambda^* = \{0\}$, tandis que $\operatorname{Im} \Lambda^*$ est un sous-espace propre de $(\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp$. Ayant choisi $x^* \in (\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp \diagdown \operatorname{Im} \Lambda^*$, envisageons le problème

$$\langle x^*, x\rangle \to \inf; \quad \Lambda x = 0.$$

Pour ce problème, le principe de Lagrange est faux. En effet, $\hat{x} = 0$ est un point de minimum et, si l'on pouvait trouver des $\hat{\lambda}_0$ et $\hat{y}^* \in Y^*$ tels que

$$\mathscr{L}_x(0, \hat{y}^*, \hat{\lambda}_0)[h] = 0, \quad \forall h \in X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \hat{\lambda}_0 \langle x^*, h\rangle + \langle \hat{y}^*, \Lambda h\rangle = 0, \quad \forall h \in X,$$

on aurait $\hat{\lambda}_0 = 0$ (car autrement $x^* \in \operatorname{Im} \Lambda^*$) et par là même $\Lambda^* \hat{y}^* = 0 \Rightarrow \hat{y}^* = 0$.

Exercice[1]). Soient $Z = Y = l_2$, $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2$, $\Lambda z = (z_1, z_2/2, \ldots, z_n/n \ldots)$, $\hat{y} \notin \operatorname{Im} \Lambda$, $X = \mathbf{R} \times Z$, $f(x) = f(\alpha, z) = \alpha$, $F(x) = F(\alpha, z) = \Lambda z + \alpha^2 \hat{y}$.

Montrer que pour le problème $f(x) \to \inf$; $F(x) = 0$ le principe de Lagrange est faux.

§ 3.3*. Principe de Lagrange et dualité dans les problèmes de programmation convexe

3.3.1. Théorème de Kuhn-Tucker (forme subdifférentielle). Le principe de Lagrange pour les problèmes de programmation convexe (le théorème de Kuhn-Tucker) a été démontré dans 1.3.3. Dans ce sous-paragraphe nous donnons la « forme subdifférentielle » de ce théorème et expliquons ses relations avec les autres notions d'analyse convexe.

Soient X et Y des espaces de Banach, $\Lambda: X \to Y$ un opérateur linéaire continu, $f_i: X \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, des fonctions convexes, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, $b \in Y$, A, un ensemble convexe de X. Considérons le problème de programmation convexe suivant

$$f_0(x) \to \inf; \quad f_i(x) \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \Lambda x = b, \quad x \in A. \qquad (\mathfrak{z})$$

L'ensemble $\{x \mid \Lambda x = b\}$ sera désigné par B. La fonction de Lagrange pour le problème $(\mathfrak{z})$ est la fonction

$$\mathcal{L}(x, y^*, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i(a) - a_i) + \langle y^*, \Lambda x - b \rangle.$$

Proposition. *Supposons que $\hat{x}$ est un point de minimum absolu pour le problème $(\mathfrak{z})$. Alors $\hat{x}$ est un point de minimum absolu pour le problème élémentaire*

$$f(x) = \max(f_0(x) - f_0(\hat{x}), f_1(x) - a_1, \ldots, f_m(x) - a_m) + \delta(A \cap B)(x) \to \inf, \qquad (\mathfrak{z}')$$

où $\delta(A \cap B)$ est l'indicatrice de l'ensemble $A \cap B$.

En effet, s'il existe un élément $\tilde{x}$ pour lequel $f(\tilde{x}) < 0$, cela signifie d'abord que $\tilde{x} \in A$, $\tilde{x} \in B$ $(\Leftrightarrow \Lambda\tilde{x} = b)$, et ensuite que $f_i(\tilde{x}) < a_i$, $i = 1, \ldots, m$ (i.e. que $\tilde{x}$ est un élément admissible du problème) et enfin que $f_0(\tilde{x}) < f_0(\hat{x})$ malgré l'hypothèse. ■

Théorème (forme subdifférentielle du théorème de Kuhn-Tucker). *Supposons que pour $(\mathfrak{z})$ les fonctions f_i, $i =$*

[1]) Proposé par l'étudiant de 4-ième année V. Ouspenski.

$=0,1,\ldots,m$, *sont continues au point* $\hat{x}\in A\cap B$, *qui fournit un minimum absolu pour le problème. Alors on peut trouver des nombres* $\hat{\lambda}_i\geqslant 0$ *tels que* $\sum_{i=0}^{m}\hat{\lambda}_i=1, \hat{\lambda}_i(f_i(\hat{x})-a_i)=0, i\geqslant 1$, *et un élément* $\hat{x}^*\in\partial\delta(A\cap B)(\hat{x})$ *de manière à avoir*

$$0\in\sum_{i=0}^{m}\hat{\lambda}_i\,\partial f_i(\hat{x})+\hat{x}^*. \qquad (1)$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après l'hypothèse, $\hat{x}$ fournit un minimum absolu au problème élémentaire ($\mathfrak{z}'$). D'après le théorème 1 de 3.1.1, on a $0\in\partial f(\hat{x})$. La fonction $g(x)=\max(f_0(x)-f_0(\hat{x}),\ f_1(x)-a_1,\ \ldots,\ f_m(x)-a_m)$ est convexe et continue au point $\hat{x}\in A\cap B$ (i.e. appartenant à dom $\delta(A\cap B)$) et donc, d'après le théorème de Moreau-Rockafellar (voir 2.6.4), $\partial f(\hat{x})=\partial g(\hat{x})+\partial\delta(A\cap B)(\hat{x})$. Enfin, d'après le théorème de Doubovitski-Milioutine (voir 2.6.4), on a

$$\partial g(\hat{x})=\operatorname{conv}(\partial f_{i_1}(\hat{x})\cup\ldots\cup\partial f_{i_s}(\hat{x})),$$

où les i_j sont précisément ceux des indices pour lesquels $f_i(\hat{x})-a_i=g(\hat{x})=0$. Ainsi, on peut trouver deux éléments $\hat{\xi}^*\in\partial g(\hat{x})$ et $\hat{x}^*\in\partial\delta(A\cap B)(\hat{x})$ pour lesquels

$$\hat{\xi}^*+\hat{x}^*=0,\ \hat{\xi}^*\in\operatorname{conv}(\partial f_{i_1}(\hat{x})\cup\ldots\cup\partial f_{i_s}(\hat{x}))\Leftrightarrow\hat{\xi}^*=$$
$$=\sum_{j=1}^{s}\hat{\lambda}_{i_j}\hat{x}^*_{i_j},\quad \hat{x}^*_{i_j}\in\partial f_{i_j}(\hat{x}),\ \sum_{j=1}^{s}\hat{\lambda}_{i_j}=1,\ \hat{\lambda}_{i_j}\geqslant 0.$$

Il ne reste qu'à poser $\hat{\lambda}_i=0,\ i\notin\{i_1,\ldots,i_s\}$. ■

E x e r c i c e. Soit $B=\{x\mid\Lambda x=b\}$. Démontrer que $x_0\in B$ implique $\partial\delta(B)(x_0)=(\operatorname{Ker}\Lambda)^{\perp}$.

C o r o l l a i r e (p r i n c i p e d e L a g r a n g e p o u r l e p r o b l è m e d e p r o g r a m m a t i o n c o n v e x e à c o n t r a i n t e s s o u s f o r m e d'é g a l i t é s e t d'i n é g a l i t é s). *Dans les hypothèses du théorème, supposons que* $A=X$ *et que l'image de* X *par l'application* Λ *est fermée dans* Y. *Alors il existe des multiplicateurs de Lagrange* $\hat{\lambda}_0\in\mathbf{R}$, $\hat{\lambda}\in\mathbf{R}^{m*}$, $\hat{y}^*\in Y^*$ *tels que* $\hat{\lambda}_i\geqslant 0,\ i\geqslant 0,\ \hat{\lambda}_i(f_i(\hat{x})-a_i)=0,\ i\geqslant 1,$

$$\min_x\mathcal{L}(x,\hat{y}^*,\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)=\mathcal{L}(\hat{x},\hat{y}^*,\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0). \qquad (2)$$

En effet, si $\operatorname{Im}\Lambda$ est un sous-espace propre de Y, on peut poser $\hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{y}^* \in (\operatorname{Im}\Lambda)^\perp$. Si, par contre, Λ est un opérateur surjectif, alors $\partial\delta B(\hat{x}) = (\operatorname{Ker}\Lambda)^\perp = \operatorname{Im}\Lambda^*$. Par conséquent, d'après (1), on a

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \partial f_i(\hat{x}) + \operatorname{Im}\Lambda^*$$

et donc, par définition de la sous-différentielle,

$$\mathcal{L}(x, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) - \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) - \langle 0, x - \hat{x}\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(x, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \geqslant \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0), \ \forall x. \quad \blacksquare$$

3.3.2. Méthode des perturbations et théorème de dualité. Dans le sous-paragraphe précédent, le problème de programmation convexe ($\mathfrak{z}$) a été considéré comme un seul problème individuel. De plusieurs points de vue, il est naturel et efficace de considérer des familles entières de problèmes de ce genre. Ayant fixé f_i, Λ, a_i, A et b, nous pouvons inclure le problème ($\mathfrak{z}$) dans la famille

$$f_0(x) \to \inf; \quad f_i(x) + \alpha_i \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\Lambda x + \eta = b, \quad x \in A. \quad (\mathfrak{z}(\alpha, \eta)).$$

(Il va de soi que l'on aurait pu simplement supposer que a_i et b sont des paramètres variables de la famille, mais ayant introduit les paramètres α_i, η de la manière indiquée ci-dessus, nous obtenons des formules plus élégantes.) L'ensemble des problèmes $\{(\mathfrak{z}(\alpha, \eta))\}$ est appelé *perturbation* du problème ($\mathfrak{z}$) = ($\mathfrak{z}$ (0, 0)).

Nous avons déjà vu dans 3.3.1 que le problème ($\mathfrak{z}$) se réduit à un problème élémentaire. Maintenant nous ferons de même pour la famille $\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$, mais d'une façon un peu différente. A savoir, désignons

$$f(x; \alpha, \eta) = \begin{cases} f_0(x) \text{ si } f_i(x) + \alpha_i \leqslant a_i, \ \Lambda x + \eta = b, \ x \in A, \\ +\infty \text{ dans les autres cas.} \end{cases} \quad (1)$$

Alors la famille ($\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$) peut s'écrire sous forme de problème élémentaire

$$f(x; \alpha, \eta) \to \inf \quad (\text{par rapport à } x \in X). \quad (2)$$

Par la suite, lorsqu'il s'agira du problème ($\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$), nous ne distinguerons pas son énoncé original de l'énoncé (2). Pour les contraintes indiquées, la valeur de ce problème, i.e. $\inf f_0$, est une fonction de $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ et η; cette fonction sera désignée par S, $S: \mathbf{R}^m \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ et sera parfois appelée *S-fonction*:

$$S(\alpha, \eta) = \inf_x f(x; \alpha, \eta) = \inf_{x \in A, \ f_i(x) + \alpha_i \leqslant a_i, \ \Lambda x + \eta = b} f_0(x). \quad (3)$$

L e m m e. *Supposons que* $F(x, z)$ *est une fonction convexe sur le produit des espaces vectoriels* X *et* Z. *Alors la fonction*

$$S(z) = \inf_x F(x, z)$$

est convexe sur Z.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $(z_i, t_i) \in \text{epi}\, S$, $i = 1, 2$, et $\lambda \in [0, 1]$. Alors $S(z_i) \leqslant t_i$, $i = 1, 2$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des (x_i, z_i) tels que $F(x_i, z_i) < t_i + \varepsilon$, $i = 1, 2$. D'où, F étant convexe,

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda F(x_1, z_1) + (1 - \lambda) F(x_2, z_2) <$$
$$< \lambda (t_1 + \varepsilon) + (1 - \lambda)(t_2 + \varepsilon) = \lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2 + \varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2 \Rightarrow S(\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda t_1 (1 - \lambda) t_2 \Rightarrow (\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2, \lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2) \in$$
$$\in \text{epi}\, S. \quad \blacksquare$$

P r o p o s i t i o n 1. *Soient* X *et* Y *des espaces vectoriels,* $A \subset X$ *un ensemble convexe,* $\Lambda \colon X \to Y$ *une application linéaire.*

Si les fonctions $f_i \colon X \to \overline{\mathbf{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *sont convexes, alors la fonction* $f(x; \alpha, \eta)$ *définie par l'égalité* (1) *est convexe sur* $X \times \mathbf{R}^m \times Y$.

D é m o n s t r a t i o n. Les ensembles

$$M_0 = \{(x, \alpha, \eta, t) \mid (x, t) \in \text{epi}\, f_0\},$$
$$M_i = \{(x, \alpha, \eta, t) \mid f_i(x) + \alpha_i \leqslant a_i\},$$
$$M_A = \{(x, \alpha, \eta, t) \mid x \in A\},$$
$$M_\Delta = \{(x, \alpha, \eta, t) \mid \Lambda x + \eta = b\}$$

sont convexes dans $X \times \mathbf{R}^m \times Y \times \mathbf{R}$. En effet, on a (en modifiant parfois l'ordre des facteurs pour simplifier)

$$M_0 = \text{epi}\, f_0 \times \mathbf{R}^m \times Y, \qquad M_A = A \times \mathbf{R}^m \times Y \times \mathbf{R},$$
$$M_\Delta = \widetilde{\Lambda}^{-1}(b) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R},$$

où $\widetilde{\Lambda} \colon (x, y) \mapsto \Lambda x + y$ est une application linéaire de $X \times Y$ dans Y et

$$M_i = \sigma\, \text{epi}\, \{f_i - a_i\} \times \mathbf{R}^{m-1} \times Y \times \mathbf{R},$$

où $\sigma \colon (x, t) \mapsto (x, -t)$ est la symétrie dans $X \times \mathbf{R}$. D'où l'on voit que tous ces ensembles sont convexes et il ne reste qu'à remar-

quer que

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{i=0}^{m} M_i \cap M_A \cap M_\Lambda. \quad \blacksquare$$

C o r o l l a i r e 1. *La S-fonction du problème* ($\mathfrak{z}$ (α, η)) *est convexe sur* $\mathbf{R}^m \times Y$.

Dans le § 2.6, nous avons déjà vu que la convexité permet de faire correspondre à divers objets (les fonctions, les ensembles) des objets duaux dans l'espace dual. Mais la même chose est vraie pour les problèmes de programmation convexe. Nous supposerons par la suite que X et Y sont des espaces localement convexes, X^* et Y^* les espaces duaux correspondants, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m*}$.

D é f i n i t i o n 1. La famille des problèmes d'extrémum

$$g(x^*; \lambda, \eta^*) \to \sup \quad (\text{par rapport à } \lambda \in \mathbf{R}^{m*}, \eta^* \in Y^*), \quad (\mathfrak{z}^*(x^*))$$

où $(-1)\, g(x^*; \lambda, \eta^*) = f^*(x^*; \lambda, \eta^*)$ est la transformée de Young-Fenchel (voir 2.6.3) de la fonction $(x, \alpha, \eta) \mapsto f(x, \alpha, \eta)$ dèfinie par l'égalité (1), est dite *duale* de la famille $\mathfrak{z}(\alpha, \eta) \Leftrightarrow$ (2).

Le problème $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z}^*(0)$ est appelé *dual* du problème $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(0, 0)$ (relativement à la famille des perturbations $\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$).

La solution du problème $\mathfrak{z}^*(x^*)$ sera désignée par

$$\sum (x^*) = \sup_{(\lambda, \eta^*)} g(x^*; \lambda, \eta^*). \tag{4}$$

Puisque la fonction f^* est convexe, la fonction de signe contraire g est concave. On aurait pu appeler les problèmes duaux problèmes de programmation concave, mais nous préférons de nous passer d'un nouveau terme.

D é f i n i t i o n 2. On appelle *fonction de Lagrange* d'une paire de familles $\mathfrak{z}(\alpha, \beta)$ et $\mathfrak{z}^*(x^*)$, ou *fonction de Lagrange élargie* du problème ($\mathfrak{z}$), la fonction $\widetilde{\mathscr{L}}: X \times \mathbf{R}^{m*} \times Y^* \to \mathbf{R}$ définie par les relations

$$\widetilde{\mathscr{L}}(x; \lambda, \eta^*) = \begin{cases} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i(x) - a_i) + \langle \eta^*, \Lambda x - b \rangle, \\ (x \in A, \ \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}), \\ -\infty, \ (x \in A, \ \lambda \notin \mathbf{R}_+^{m*}), \\ +\infty, \ (x \notin A). \end{cases} \tag{5}$$

Lorsque (λ, η^*) sont fixes, cette fonction est convexe relativement à x, et lorsque x est fixe, la fonction de signe contraire, $-\widetilde{\mathscr{L}}$, est convexe relativement à (λ, η^*).

Notons que

$$\widetilde{\mathscr{L}}(x; \lambda, \eta^*) = \mathscr{L}(x, \eta^*, \lambda, 1), \quad x \in A, \quad \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}, \tag{6}$$

où $\mathscr{L}$ est la fonction de Lagrange du problème ($\mathfrak{z}$), définie dans 3.3.1.

Proposition 2. *Une paire de familles duales* $\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$ *et* $\mathfrak{z}^*(x^*)$ *est bien définie par leur fonction de Lagrange, puisque*

$$f(x; \alpha, \eta) = (-\widetilde{\mathscr{L}})^{*(2)}, \quad g(x^*; \lambda, \eta^*) = -\widetilde{\mathscr{L}}^{*(1)}, \tag{7}$$

où $*(1)$ *et* $*(2)$ *désignent les transformations de Young-Fenchel relativement aux variables* x *et* (λ, η^*) *respectivement.*

Démonstration. D'après la définition de la transformation de Young-Fenchel

$$-g(x^*; \lambda, \eta^*) = f^*(x^*; \lambda, \eta^*) =$$
$$= \sup_{(x, \alpha, \eta)} \{\langle x^*, x\rangle + \lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta\rangle - f(x; \lambda, \eta)\} =$$
$$= \sup_{\substack{x\in A,\ \Lambda x+\eta=b \\ f_i(x)+\alpha_i\leqslant a_i}} \{\langle x^*, x\rangle + \lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta\rangle - f_0(x)\} =$$
$$= \begin{cases} \sup\limits_{x\in A} \{\langle x^*, x\rangle - f_0(x) - \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - a_i) - \langle \eta^*, \Lambda x - b\rangle,\} \\ \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}, \\ +\infty, \ \lambda \notin \mathbf{R}_+^{m*} \end{cases} =$$
$$= \widetilde{\mathscr{L}}^{*(1)}(x^*; \lambda, \eta^*),$$

ce qui démontre la deuxième des égalités (7). En passant, nous avons obtenu la relation utile suivante

$$g(x^*; \lambda, \eta^*) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in A} (\widetilde{\mathscr{L}}(x; \lambda, \eta^*) - \langle x^*, x\rangle), & \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}, \\ -\infty, & \lambda \notin \mathbf{R}_+^{m}. \end{cases} \tag{8}$$

D'autre part[1]),

$$(-\widetilde{\mathscr{L}})^{*(2)} = \sup_{(\lambda, \eta^*)} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta\rangle + \widetilde{\mathscr{L}}(x; \lambda, \eta^*)) =$$
$$= \begin{cases} +\infty, \ x \notin A, \\ \sup\limits_{\lambda\geqslant 0,\ \eta^*} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta\rangle + f_0(x) + \\ \quad + \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - a_i) + \langle \eta^*, \Lambda x - b\rangle) \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} +\infty, \ \text{si } x \notin A \text{ ou } \Lambda x - b \neq -\eta \text{ ou } f_i(x) - a_i > -\alpha_i \\ \qquad \text{pour un certain } i, \\ f_0(x) \text{ dans les autres cas} \end{cases} =$$
$$= f(x; \alpha, \eta). \quad \blacksquare$$

[1]) De même que dans 2.6.3, en calculant la fonction adjointe d'une fonction définie sur l'espace dual (dans notre cas $\mathbf{R}^{m*} \times Y^*$), nous convenons que le résultat est une fonction sur l'espace donné et non sur le deuxième espace dual.

C o r o l l a i r e 2. *La fonction duale de la S-fonction du problème* $\mathfrak{z}$ (α, η) *est de la forme*

$$S^*(\lambda, \eta^*) = -g(0; \lambda, \eta^*) = \begin{cases} -\inf\limits_{x \in A} \mathcal{L}(x, \eta^*, \lambda, 1), & \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}, \\ +\infty, & \lambda \notin \mathbf{R}_+^{m*}. \end{cases} \tag{9}$$

D é m o n s t r a t i o n. Par définition

$$S^*(\lambda, \eta^*) = \sup_{(\alpha, \eta)} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta \rangle - \inf_x f(x; \alpha, \eta)) =$$

$$= \sup_{(\alpha, \eta, x)} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta \rangle - f(x; \alpha, \eta)) = -g(0; \lambda, \eta^*),$$

d'où l'on voit que (9) découle de (6) et (8).

Ainsi le problème $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z}^*(0)$, dual du problème $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(0, 0)$, peut encore être énoncé sous la forme suivante

$$-S^*(\lambda, \eta^*) = \inf \mathcal{L}(x, \eta^*, \lambda, 1) \to \sup; \qquad \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}, \quad \eta^* \in Y^*. \tag{10}$$

R e m a r q u e. La définition du problème dual dépend en général du choix de la famille de perturbations dans laquelle nous avons inclu le problème donné ($\mathfrak{z}$). Les égalités (5) et (6) (qui déterminent la fonction de Lagrange élargie) et les égalités (7) montrent toutefois que les familles $\{(\mathfrak{z}(\alpha, \eta))\}$ et $\{(\mathfrak{z}^*(x^*))\}$ correspondent dans un certain sens naturellement au problème ($\mathfrak{z}$), de sorte que le problème ($\mathfrak{z}^*$), équivalent à (10), est son problème dual dans le même sens naturel.

E x e r c i c e. Montrer que si les fonctions f_i et l'ensemble A sont convexes et fermés et si $f_0(x)$ ne prend pas la valeur $-\infty$ sur l'ensemble des x admissibles pour le problème ($\mathfrak{z}$), alors la famille duale (si l'on prend en considération la note au bas de la page dans la démonstration de la proposition 2) de la famille $\{(\mathfrak{z}^*(x^*))\}$ coïncide avec $\{(\mathfrak{z}(\alpha, \eta))\}$, de sorte que les problèmes ($\mathfrak{z}$) et ($\mathfrak{z}^*$) forment une paire de problèmes duaux entre eux.

T h é o r è m e d e d u a l i t é p o u r l e s p r o b l è m e s d e p r o g r a m m a t i o n c o n v e x e. *Supposons que la S-fonction de la famille* $\{(\mathfrak{z}(\alpha, \eta))\}$ *est continue au point* $(0, 0)$. *Alors, quels que soient* $(\alpha, \eta) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} S)$,

$$S(\alpha, \eta) = \sup_{\lambda \geq 0,\ \eta^* \in Y^*} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta \rangle + \inf_{x \in A} \mathcal{L}(x, \eta^*, \lambda, 1)). \tag{11}$$

Les valeurs du problème ($\mathfrak{z}$) *et du problème dual* ($\mathfrak{z}^*$) *sont égales entre elles*:

$$\inf_{\substack{x \in A \\ \Lambda x = b \\ f_i(x) \leq a_i,\ i=1, \ldots, m}} f_0(x) = S(0, 0) = \Sigma(0) =$$

$$= \sup_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \eta^* \in Y^*}} \left\{ \inf_{x \in A} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - a_i) + \langle \eta^*, \Lambda x - b \rangle \right\} \right\}. \tag{12}$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après le corollaire 1, la fonction S est convexe, et il découle de sa continuité en un point (proposition 3, 2.6.2) qu'elle est continue et qu'on a l'égalité $S(\alpha, \eta) = (\overline{\text{conv}}\, S)(\alpha, \eta)$ pour tous les $(\alpha, \eta) \in \text{int}\,(\text{dom}\, S)$. D'après le théorème de Fenchel-Moreau (voir 2.6.3) et le corollaire 2, on a

$$S(\alpha, \eta) = S^{**}(\alpha, \eta) = \sup_{(\lambda, \eta^*)} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta\rangle - S^*(\lambda, \eta^*)) =$$
$$= \sup_{\substack{\lambda \geqslant 0 \\ \eta^* \in Y^*}} (\lambda\alpha + \langle \eta^*, \eta\rangle + \inf_{x \in A} \mathscr{L}(x, \eta^*, \lambda, 1)),$$

ce qui démontre (11). En substituant $\alpha = 0$, $\eta = 0$, on obtient (12). ■

C o r o l l a i r e 3 (t h é o r è m e d u m i n i m a x). *Dans les hypothèses du théorème de dualité, on a la relation*

$$\sup_{\substack{\lambda \geqslant 0 \\ \eta^* \in Y^*}} \inf_{x \in A} \mathscr{L}(x, \eta^*, \lambda, 1) = \inf_{x \in A} \sup_{\substack{\lambda \geqslant 0 \\ \eta^* \in Y^*}} \mathscr{L}(x, \eta^*, \lambda, 1). \qquad (13)$$

D é m o n s t r a t i o n. Le premier membre de (13) est égal à $\Sigma(0)$ et coïncide donc, d'après (12), avec $S(0, 0)$. En ce qui concerne le deuxième membre, on a

$$\inf_{x \in A} \sup_{\substack{\lambda \geqslant 0 \\ \eta^* \in Y^*}} \mathscr{L}(x, \eta^*, \lambda, 1) = \inf_{x \in A} \sup_{(\lambda, \eta^*)} \widetilde{\mathscr{L}}(x; \lambda, \eta^*) =$$
$$= \inf_{x \in A} ((-\widetilde{\mathscr{L}})^{*(2)}(x; 0, 0)) = \inf_{x \in A} f(x; 0, 0)$$

d'après (7), et il coïncide également avec $S(0, 0)$.

3.3.3. Programmation linéaire : théorème d'existence et théorème de dualité. Soient : X un espace vectoriel, X' l'espace qui lui est algébriquement dual (i.e. l'ensemble de *toutes* les fonctionnelles linéaires sur X), K un cône polyédral (i.e. l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces

$$H_j = \{\langle x_j', x\rangle \leqslant 0,\ x_j' \in X',\ j = 1, \ldots, s\},$$

quoique parfois la condition de polyédralité s'avère superflue).

Les problèmes d'extrémum de la forme

$$\langle x_0', x\rangle \to \inf; \quad f_i(x) = \langle x_i', x\rangle \geqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x \in K, \qquad (1)$$

constituent la classe bien déterminée de problèmes de *programmation linéaire.*

Dans ce sous-paragraphe, nous allons considérer le *cas de dimension finie*, où $X = \mathbf{R}^n$, $X' = \mathbf{R}^{n*}$, $K = \mathbf{R}^n_+$. Dans ce cas, le problème

(1) peut être récrit de la manière suivante [1])

$$cx \to \inf; \quad Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

où $c \in \mathbf{R}^{n*}$, $A = (a_{ij})$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, est la matrice qui détermine l'opérateur linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, $b \in \mathbf{R}^m$. Le symbole $z' \geqslant z$ pour des vecteurs de dimension finie z' et z signifie que toutes les coordonnées du vecteur z sont inférieures ou égales aux coordonnées du vecteur z'. Le problème (2) est appelé *problème de programmation linéaire de dimension finie.* Ce problème est un cas particulier du problème général de programmation convexe. En outre, il possède une structure encore plus spéciale: *toutes les fonctions considérées sont ici linéaires et le cône est polyédral.* Comme toujours, nous conviendrons que si le problème (2) est incompatible, i.e. ne possède pas d'éléments admissibles, sa valeur sera considérée égale à $+\infty$.

Théorème d'existence. *Si l'ensemble des valeurs admissibles du problème de programmation linéaire de dimension finie* (2) *est non vide et sa valeur est finie, alors le problème possède une solution.*

La démonstration du théorème 1 se base sur un fait de géométrie de dimension finie assez simple. Rappelons que l'enveloppe conique cone C d'un ensemble $C \subset X$ est définie par l'égalité

$$\operatorname{cone} C = \{x \in X \mid x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i, \ \lambda_i \geqslant 0, \ x_i \in C\};$$

c'est un ensemble convexe (voir proposition 2, 2.6.1).

Nous dirons que le cône cone C est engendré par l'ensemble C.

A) Lemme sur le cône dans un espace de dimension finie engendré par un nombre fini de points. *Tout cône dans un espace de dimension finie, engendré par un nombre fini de points, est fermé.*

Démonstration. Supposons que

$$K = \operatorname{cone} C \subset \mathbf{R}^N, \quad C = \{z_1, \ldots, z_k\}, \quad z_i \in \mathbf{R}^N,$$

la démonstration sera effectuée par récurrence.

1) $k = 1$. Alors $K = \operatorname{cone}\{z_1\} = \{x \mid x = \lambda_1 z_1, \lambda_1 \geqslant 0\}$ est une demi-droite, i.e. un ensemble fermé.

2) Supposons maintenant que le lemme est vérifié pour $k = s - 1$. Démontrons-le pour $k = s$. Deux cas sont possibles:

a) Le cône K contient les vecteurs $-z_1, \ldots, -z_s$; alors K est un sous-espace d'un espace de dimension finie et, par conséquent, un sous-ensemble fermé;

---

[1]) Rappelons que pour les espaces de dimension finie nous avons deux notations:

$$\langle c, x \rangle = cx = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad c \in \mathbf{R}^{n*}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

b) au moins un des vecteurs $(-z_i)$, $i = 1, \ldots, s$, par exemple $(-z_s)$ n'appartient pas au cône K. Désignons par K_1 le cône cone $\{z_1, \ldots, z_{s-1}\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, le cône K_1 est fermé. Supposons que le vecteur z appartient à l'adhérence du cône K, i.e. $z = \lim\limits_{n} \xi_n$; $\xi_n \in K$, $n \geqslant 1$. Par définition,

$$\xi_n \in K = \text{cone}\{z_1, \ldots, z_s\} \Longleftrightarrow \xi_n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_{in} z_i = \zeta_n + \lambda_{sn} z_s,$$

où

$$\zeta_n \in K_1 \quad \text{et} \quad \lambda_{sn} \geqslant 0.$$

Si l'on suppose que $\lambda_{sn} \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors

$$-z_s = \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n - \xi_n}{\lambda_{sn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n}{\lambda_{sn}} \in K_1$$

(rappelons que $\xi_n \to z$ et donc $\xi_n/\lambda_{sn} \to 0$, tandis que ζ_n/λ_{sn} appartient à K_1 en même temps que ζ_n), i.e. $-z_s \in K_1$ vu que K_1 est fermé, ce qui contredit l'hypothèse. Donc λ_{sn} ne tend pas vers l'infini et l'on peut choisir une sous-suite λ_{sn_k} qui converge vers un certain nombre $\lambda_{s0} \geqslant 0$. Dans ce cas

$$\zeta_{n_k} = \xi_{n_k} - \lambda_{sn_k} z_s \to z - \lambda_{s0} z_s = \tilde{z}.$$

K_1 étant fermé, le vecteur $\tilde{z}$ appartient à K_1, donc

$$z = \tilde{z} + \lambda_{s0} z_s \in K. \ \blacksquare$$

B) Démontrons maintenant le théorème d'existence.

Considérons dans l'espace $\mathbf{R}^{m+1}$ l'ensemble K constitué des vecteurs (α, z), $\alpha \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}^m$ pour chacun desquels il existe au moins un vecteur $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n_+$ vérifiant $c\tilde{x} \leqslant \alpha$, $A\tilde{x} \geqslant z$.

L'ensemble K est un cône, car si $(\alpha, z) \in K$, on a, pour un certain $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n_+$, la relation $c\tilde{x} \leqslant \alpha$, $A\tilde{x} \geqslant z$. Mais alors pour tout $t \geqslant 0$, on a $t\tilde{x} \in \mathbf{R}^n_+$, $c\,(t\tilde{x}) \leqslant t\alpha$, $A\,(t\tilde{x}) \geqslant tz$, i.e. $t\,(\alpha, z) \in K$.

Montrons que le cône K est engendré par un nombre fini de vecteurs de $\mathbf{R}^{m+1}$:

$$\zeta_1 = (c_1, a_{11}, \ldots, a_{m1}), \quad \zeta_2 = (c_2, a_{12}, \ldots, a_{m2}), \ldots, \zeta_n = (c_n, a_{1n}, \ldots, a_{mn}),$$

$$\zeta_{n+1} = (1, 0, \ldots, 0), \ \zeta_{n+2} = (0, -1, 0, \ldots, 0), \ldots, \zeta_{n+m+1} = (0, \ldots, 0, -1).$$

Tout d'abord $\zeta_i \in K$, de sorte que cone $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+m+1}\} \subset K$. En effet, si $1 \leqslant i \leqslant n$, on peut choisir en guise de $\tilde{x}$ le vecteur de base standard e_i ; pour les autres i, il faut prendre $\tilde{x} = 0$. Supposons maintenant que le vecteur $\zeta = (\alpha, z) = (\alpha, z_1, \ldots, z_m)$ appartient

à K. Alors, pour un certain $x \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ et des nombres $\beta_0 \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ on a les relations

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \beta_0 = \alpha, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \beta_j = z_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Mais cela signifie justement que

$$\zeta = (\alpha, z) = \sum_{j=1}^{n} x_j \zeta_j + \beta_0 \zeta_{n+1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \zeta_{n+i+1},$$
$$x_j \geqslant 0, \quad \beta_0 \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0,$$

i.e.

$$\zeta \in \operatorname{cone} \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+m+1}\}.$$

D'après le lemme du sous-paragraphe précédent, le cône K est fermé. D'après les hypothèses du théorème, le problème (2) possède l'élément admissible $\tilde{x}$ et prend la valeur $\hat{\alpha} > -\infty$. D'après la définition de K, on voit que le point $(\tilde{\alpha}, b)$, où $\tilde{\alpha} = c\tilde{x}$, appartient à K. Il est alors évident que $\tilde{\alpha} \geqslant \hat{\alpha}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathfrak{A} = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid (\alpha, b) \in K\}$ est non vide et $\hat{\alpha} = \inf \{\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$, i.e. $(\hat{\alpha}, b)$ appartient à l'adhérence du cône K et donc à K lui-même. Il existe donc un élément $\hat{x} \geqslant 0$ pour lequel $A\hat{x} \geqslant b$ et $c\hat{x} \leqslant \hat{\alpha} \Rightarrow c\hat{x} = \hat{\alpha}$, i.e. $\hat{x}$ est la solution du problème. ■

Passons à l'étude du problème dual. Le théorème de dualité prend ici une forme plus achevée que dans le sous-paragraphe précédent, puisque en vertu de la structure spéciale du problème sa S-fonction est fermée.

D'après les formules (5) et (6) de 3.3.2, la fonction de Lagrange élargie est de la forme

$$\tilde{\mathscr{L}}(x; \lambda) = \begin{cases} cx + \lambda(b - Ax), & x \in \mathbf{R}^n_+, \quad \lambda \in \mathbf{R}^{m*}_+, \\ -\infty, & x \in \mathbf{R}^n_+, \quad \lambda \notin \mathbf{R}^{m*}_+, \\ +\infty, & x \notin \mathbf{R}^n_+. \end{cases}$$

Maintenant nous pouvons trouver la famille des perturbations du problème (2) et la famille duale. D'après (7) de 3.3.2

$$f(x; \alpha) = (-\tilde{\mathscr{L}})^{*(2)} = \sup_{\lambda} (\lambda\alpha + \mathscr{L}(x, \lambda)) =$$
$$= \begin{cases} +\infty, & x \notin \mathbf{R}^n_+, \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} (\lambda\alpha + cx + \lambda(b - Ax), & x \in \mathbf{R}^n_+ = \end{cases}$$
$$= \begin{cases} cx, & x \geqslant 0, \ Ax \geqslant b + \alpha, \\ +\infty & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En désignant $z = b + \alpha$, nous obtiendrons la perturbation du problème (2)

$$cx \to \inf, \quad x \geqslant 0, \quad Ax \geqslant z. \tag{3}$$

D'une manière analogue, pour définir le problème dual, nous devons calculer

$$g(0, \lambda) = (-\widetilde{\mathscr{L}}^{*(1)})(0, \lambda) = -\sup_x (-\widetilde{\mathscr{L}}(x, \lambda)) =$$

$$= \begin{cases} -\sup\limits_{x \geqslant 0} (-cx - \lambda(b - Ax)), & \lambda \geqslant 0, \\ -\infty, \ \lambda \notin \mathbf{R}_+^{m*}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lambda b, & \lambda \geqslant 0, \quad \lambda A \leqslant c, \\ -\infty & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ceci nous donne le problème

$$\lambda b \to \sup; \quad \lambda A \leqslant c, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{4}$$

dual du problème (2). Il possède la même structure que le problème (2) et l'on voit facilement que si l'on prend pour point de départ le problème (4) et construit le problème dual par la même méthode qui a permis d'obtenir le problème (4) à partir du problème (2), nous obtiendrons à nouveau le problème (2). C'est pourquoi on peut parler d'*une paire de problèmes duaux de programmation linéaire.*

Théorème de dualité. *Pour une paire de problèmes duaux de programmation linéaire on a l'alternative suivante: ou bien les valeurs des problèmes sont finies et égales entre elles et les deux problèmes possèdent une solution, ou bien dans un des problèmes l'ensemble des éléments admissibles est vide.*

Dans le premier cas, $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ et $\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{m*}$ *seront les solutions des problèmes* (2) *et* (4) *respectivement si et seulement si ces valeurs sont admissibles pour ces problèmes et vérifient une des deux relations*

$$c\hat{x} = \hat{\lambda} b, \tag{5}$$

$$\hat{\lambda}(A\hat{x} - b) = (\hat{\lambda} A - c)\hat{x}. \tag{6}$$

Dans le second cas, un des problèmes est incompatible et l'autre est soit incompatible (i.e. son ensemble d'éléments admissibles est vide), soit prend une valeur infinie.

Démonstration. A) Construction de la S-fonction. Considérons à nouveau le même cône K que dans la démonstration du théorème d'existence. Si $(\alpha, z) \in K$ et $\beta \geqslant \alpha$, alors $(\beta, z) \in K$ et donc K est l'épigraphe de la fonction

$$S(z) = \inf \{\alpha \mid (\alpha, z) \in K\}. \tag{7}$$

Il découle de la démonstration du théorème d'existence que inf est atteint et $S(z)$ est la valeur du problème (3), de sorte que la formule (7) détermine la S-fonction du problème (2). Puisque K est un cône fermé et convexe, la S-fonction du problème (2) est fermée et convexe.

B) Calculons la fonction S^* duale de la fonction S. Par définition,

$$S^*(\lambda) =$$
$$= \sup_z (\lambda z - S(z)) = \sup_z \{\lambda z - \inf_x \{cx \mid x \in \mathbf{R}_+^n, \quad Ax \geqslant z\}\} =$$
$$= \sup_{(z,\, x)} \{\lambda z - cx \mid x \in \mathbf{R}_+^n, \quad z \in \mathbf{R}^m, \quad z \leqslant Ax\}.$$

Il est évident que $\sup \{\lambda z \mid z \in \mathbf{R}^m,\ z \leqslant Ax\} = \lambda Ax < \infty$, si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

Ainsi,

$$S^*(\lambda) = \begin{cases} \sup\limits_{x \geqslant 0} (\lambda A - c)\, x, & \text{si} \quad \lambda \in \mathbf{R}_+^{m*}, \\ +\infty, & \text{si} \quad \lambda \notin \mathbf{R}_+^{m*} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda A \leqslant c, \ \lambda \geqslant 0, \\ +\infty & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$S^{**}(z) = \sup \{\lambda z \mid \lambda A \leqslant c, \quad \lambda \geqslant 0\}. \tag{8}$$

En particulier, on voit que $S^{**}(b)$ est la valeur du problème dual (4).

C) C o n c l u s i o n   d e   l a   d é m o n s t r a t i o n. La fonction S ne peut être identiquement égale à $+\infty$, car $S(0) \leqslant 0$, puisque zéro est un élément admissible du problème $cx \to \inf$, $Ax \leqslant 0$, $x \geqslant 0$; par conséquent, $\operatorname{dom} S \neq \varnothing$.

Un des deux cas suivants est possible:

1) $S(z) > -\infty$, $\forall z$ ou

2) il existe un $\tilde{z}$ pour lequel $S(\tilde{z}) = -\infty$.

Le cas 1) se subdivise à son tour en deux: 1a) $b \in \operatorname{dom} S$ et 1b) $b \notin \operatorname{dom} S$. Dans le cas 1a), S est une fonction propre et la valeur du problème est finie. Puisque S est fermée (d'après le théorème de Fenchel-Moreau, voir 2.6.3), on a $S^{**}(b) = S(b)$ et il découle maintenant de (8) que le problème dual (4) prend la même valeur que le problème direct (2); il est donc, en particulier, compatible. D'après le théorème d'existence, la solution existe pour les deux problèmes. Dans le cas 1b), on a $S(b) = +\infty$, i.e. le problème (2) est incompatible. Appliquant à nouveau le théorème de Fenchel-Moreau, on obtient $S^{**}(b) = S(b)$ et l'on voit donc que le problème (4) est compatible, alors que sa valeur est infinie.

Dans le cas 2), on a $S(z) = -\infty$ pour tous les $z \in \operatorname{dom} S$ (voir l'exercice 8 de 2.6.2). Par définition, $S^*(\lambda) \equiv +\infty$ et $S^{**}(z) \equiv \equiv -\infty$. En particulier, $S^{**}(b) = -\infty$, i.e. le problème (4) est incompatible.

Si $b \in \operatorname{dom} S$, alors le problème (2) est compatible et sa valeur est infinie: $S(b) = -\infty$. Si par contre $b \notin \operatorname{dom} S$, alors $S(b) = = +\infty$, le problème (2) est incompatible. L'alternative est entièrement fondée.

Revenons maintenant au cas 1a). Comme nous l'avons déjà démontré, les solutions des problèmes (2) et (4) existent dans ce cas. Désignons-les par $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ respectivement. Il a été démontré que les valeurs du problème sont $c\hat{x} = \hat{\lambda}b$, i.e. on a (5) et donc

$$\hat{\lambda}(A\hat{x} - b) = \hat{\lambda}A\hat{x} - \hat{\lambda}b = \hat{\lambda}A\hat{x} - c\hat{x} = (\hat{\lambda}A - c)\hat{x},$$

i.e. on a (6). En outre, si x et λ sont des éléments admissibles (i.e. $x \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\lambda A \leqslant c$, $Ax \geqslant b$), alors

$$cx \geqslant \lambda Ax \geqslant \lambda b.$$

Par conséquent, $c\hat{x} = \hat{\lambda}b$ implique que $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ sont des solutions du problème. En outre, si $\hat{\lambda}(A\hat{x} - b) = (\hat{\lambda}A - c)\hat{x}$, on a $c\hat{x} = \hat{\lambda}b$, i.e. $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ sont les solutions du problème.

Ainsi, si $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ sont des solutions, on a (5) et (6); si $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ sont admissibles et on a soit (5), soit (6), alors $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ sont les solutions du problème. Le théorème est entièrement démontré. ■

E x e r c i c e. Que devient dans la situation considérée le théorème du minimax (corollaire 3 de 3.3.2)?

3.3.4. Théorème de dualité pour le problème de la plus courte distance. Lemme de Hoffmann et lemme du minimax. Soient: Y un espace normé, $B \subset Y$ un sous-ensemble non vide de Y. L'expression

$$S_B(\eta) = \rho(\eta, B) = \inf_{y \in B} \| y - \eta \| \tag{1}$$

est appelée *distance du point* η à l'ensemble B. L'étude de la fonction $S_B(\eta)$ est une des questions principales de la théorie des approximations (voir [111]). Si B est un ensemble convexe, nous obtenons le problème de programmation convexe. Le théorème de dualité démontré ci-dessous possède de nombreuses applications en analyse.

Ainsi, supposons que B est un ensemble convexe. (Par la suite, cet ensemble est fixé, et nous omettons l'indice B dans la notation de la fonction S.) Alors la fonction $\eta \mapsto S(\eta)$ est une S-fonction du problème suivant

$$\| z \| \to \inf; \quad y - z = \eta, \quad y \in B. \tag{2}$$

Amenons (2) à la forme standard d'une famille de problèmes de programmation convexe (voir ($\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$) de 3.3.2). Pour cela, posons $X = Y \times Y$, $x = (y, z)$, $f_0(x) = \| z \|$, $\Lambda x = z - y$, $\Lambda: X \to Y$, $A = \{x = (y, z) \mid y \in B\}$, alors (2) se met sous la forme

$$f_0(x) \to \inf; \quad \Lambda x + \eta = 0, \quad x \in A. \tag{3}$$

Il découle de ce que nous venons de dire que la fonction S est convexe (voir le corollaire 1 de 3.3.2).

Par la suite, nous nous servirons de la notion géométrique importante suivante.

Définition. On appelle *fonction d'appui de l'ensemble* $B \subset Y$ la fonction sB: $Y^* \to \overline{\mathbf{R}}$ définie par l'égalité

$$sB(y^*) = \sup_{y \in B} \langle y^*, y \rangle.$$

Théorème de dualité pour le problème de la plus courte distance. *L'expression* $S(\eta)$ *peut être représentée sous la forme duale suivante*

$$S(\eta) = \rho(\eta, B) = \sup \{ \langle y^*, \eta \rangle - sB(y^*) \mid \| y^* \| \leqslant 1\}. \tag{4}$$

Démonstration. Il est évident que $S(\eta) \geqslant 0$, $\forall \eta$. D'autre part $S(\eta) \leqslant \| y_0 - \eta \|$, où y_0 est un point quelconque de B. On voit donc que S est une fonction bornée et, par conséquent, elle est continue partout sur Y (proposition 3 de 2.6.2). Maintenant nous pouvons appliquer le théorème de dualité de 3.3.2. Puisqu'il n'y a pas d'inégalités dans (2), la fonction de Lagrange est de la forme

$$\mathscr{L}(x, y^*, 1) = \| z \| + \langle y^*, z - y \rangle.$$

Il découle de la formule (11) de 3.3.2 que

$$S(\eta) = \sup_{y^*} \big(\langle y^*, \eta \rangle + \inf_{\substack{y \in B \\ z \in Y}} (\| z \| + \langle y^*, z - y \rangle)\big) =$$

$$= \sup_{y^*} \{(\langle y^*, \eta \rangle - \sup_{y \in B} \langle y^*, y \rangle) - \sup_{z \in Y} (\langle -y^*, z \rangle - \| z \|\} =$$

$$= \sup_{y^*} \{\langle y^*, \eta \rangle - sB(y^*) - N^*(-y^*)\},$$

où $N(z) = \| z \|$, tandis que $N^*(z) = 0$ pour $\| z^* \| \leqslant 1$ et $+\infty$ pour $\| z^* \| > 1$ (proposition 3 de 2.6.3). Ceci implique (4). ■

Par la suite, nous aurons besoin de la généralisation suivante du corollaire 2 de 2.6.4.

Lemme sur le cône dual. *Soient X et Y des espaces de Banach,* Λ: $X \to Y$ *un opérateur linéaire surjectif de X dans Y,* $x_1^*, \ldots, x_s^*$ *des éléments de l'espace dual* X^* *et supposons que*

$$K = \{x \mid \langle x_i^*, x \rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s, \quad \Lambda x = 0\}$$

est un cône dans X.

Alors chaque élément x_0^* *du cône dual*

$$K^* = \{x^* \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant 0, \quad x \in K\}$$

se met sous la forme

$$-x_0^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*$$

pour certains $\lambda_i \geqslant 0$ *et* $y^* \in Y^*$.

D é m o n s t r a t i o n. A) Désignons $L = \bigcap_{i=0}^{s} \operatorname{Ker} x_i^*$, $Z = \operatorname{Ker} \Lambda / L$, et soit $\pi\colon \operatorname{Ker} \Lambda \to Z$ la projection naturelle qui applique $x \in \operatorname{Ker} \Lambda$ dans la classe $\pi(x) \in Z$ qui le contient. Montrons que $\dim Z \leqslant s+1$. En effet, soient $z_0, \ldots, z_{s+1}$ des éléments quelconques de Z, $z_i = \pi(x_i)$. Le système de $s+1$ équations linéaires homogènes

$$\sum_{j=0}^{s+1} \langle x_i^*, x_j\rangle \lambda_j = \langle x_i^*, \sum_{j=0}^{s+1} \lambda_j x_j\rangle = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, s,$$

à $s+2$ variables possède une solution non nulle $\hat\lambda_0, \ldots, \hat\lambda_{s+1}$. Alors

$$\hat x = \sum_{j=0}^{s+1} \hat\lambda_j x_j \in \operatorname{Ker} x_i^*, \quad i = 0, \ldots, s, \Rightarrow \hat x \in L \Rightarrow 0 = \pi(\hat x) = \sum_{j=0}^{s+1} \hat\lambda_j \pi(x_j) = \sum_{j=0}^{s+1} \hat\lambda_j z_j.$$

Par conséquent, tout ensemble de $s+2$ éléments de Z est une famille linéairement dépendante et $d = \dim Z \leqslant s+1$.

B) Choisissons dans Z une base $f_1, \ldots, f_d$ et établissons l'isomorphisme standard entre Z et $\mathbf{R}^d$ et entre Z^* et $\mathbf{R}^{d*}$

$$z = \sum_{i=1}^{d} \zeta_i f_i \mapsto (\zeta_1, \ldots, \zeta_d),$$

$$\langle z^*, z\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle z^*, f_i\rangle \zeta_i \Rightarrow z^* \mapsto (\zeta_1^*, \ldots, \zeta_d^*) = (\langle z^*, f_1\rangle, \ldots, \langle z^*, f_d\rangle).$$

Ensuite, définissons les fonctionnelles $z_i^* \in Z^*$, $i = 0, 1, \ldots, s$, en posant

$$\langle z_i^*, \pi(x)\rangle = \langle x_i^*, x\rangle$$

et considérons dans Z^* le cône convexe

$$\widetilde K = \operatorname{cone}\{z_1^*, \ldots, z_s^*\} = \left\{z^* \,\middle|\, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i z_i^*, \quad \lambda_i \geqslant 0\right\}.$$

Puisque Z^* est de dimension finie, tandis que le cône $\widetilde{K}$ est engendré par un nombre fini de points, $\widetilde{K}$ est aussi un ensemble fermé d'après le lemme de 3.3.3.

Supposons que $-z_0^* \notin \widetilde{K}$. Alors, d'après le deuxième théorème de séparabilité (voir 2.1.4), il existe une fonctionnelle linéaire $l \in (Z^*)^*$ qui sépare strictement $\{-z_0^*\}$ et $\widetilde{K}$

$$\langle l, \ -z_0^*\rangle > \sup\{\langle l, \ z^*\rangle \mid z^* \in \widetilde{K}\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \langle l, \ z_i^*\rangle \mid \lambda_i \geqslant 0\right\}.$$

Mais alors on a nécessairement $\langle l, \ z_i^*\rangle \leqslant 0$ (autrement sup $= +\infty$), $0 = \sup\{\langle l, \ z^*\rangle \mid z^* \in \widetilde{K}\}$ et $\langle l, \ z_0^*\rangle < 0$.

Remarquons maintenant que l, comme toute fonctionnelle linéaire sur un espace de dimension finie Z^*, est donnée par une forme linéaire

$$\langle l, \ z^*\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i \zeta_i^* = \sum_{i=1}^{d} a_i \langle z^*, \ f_i\rangle = \langle z^*, \ \sum_{i=1}^{d} a_i f_i\rangle = \langle z^*, \ a\rangle.$$

En choisissant dans la classe $a = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i \in Z = \operatorname{Ker} \Lambda / L$ un représentant $x_0 \in \operatorname{Ker} \Lambda$, $a = \pi(x_0)$, nous avons, d'une part,

$$\langle x_i^*, \ x_0\rangle = \langle z_i^*, \ \pi(x_0)\rangle = \langle z_i^*, \ a\rangle = \langle l, \ z_i^*\rangle \leqslant 0,$$

par conséquent,

$$x_0 \in \operatorname{Ker} \Lambda \cap \bigcap_{i=1}^{s} \{x \mid \langle x_i^*, \ x\rangle \leqslant 0\} = K.$$

D'autre part,

$$\langle x_0^*, \ x_0\rangle = \langle z_0^*, \ \pi(x_0)\rangle = \langle z_0^*, \ a\rangle = \langle l, \ z_0\rangle < 0$$

et, par conséquent, $x_0^* \notin K^*$, ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

Ainsi la supposition que $-z_0^* \notin \widetilde{K}$ nous amène à une contradiction, donc $-z_0^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i z_i^*$ pour certains $\lambda_i \geqslant 0$.

C) Quel que soit $x \in \operatorname{Ker} \Lambda$, on a

$$\langle x_0^* + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^*, \ x\rangle = \langle z_0^* + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i z_i^*, \ \pi(x)\rangle = 0.$$

Donc $x_0^* + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^*$ appartient à $(\operatorname{Ker} \Lambda)^{\perp}$ et, d'après le lemme sur le noyau d'un opérateur régulier (voir 2.1.7), on a

$$x_0^* + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* = \Lambda^*(-y^*)$$

pour un certain point $y^* \in Y^*$. ■

Lemme de Hoffmann. *Supposons que les hypothèses du lemme sur le cône dual sont remplies.*

Alors, pour la fonction de distance d'un point x à K on a l'inégalité

$$\rho(x, K) \leqslant C\left\{\sum_{i=1}^{s} \langle x_i^*, x\rangle_+ + \|\Lambda x\|\right\}, \tag{5}$$

où $\langle x_i^*, x\rangle_+$ est égal à $\langle x_i^*, x\rangle$ lorsque $\langle x_i^*, x\rangle \geqslant 0$ et s'annule dans les autres cas, tandis que la constante C ne dépend pas de x.

Démonstration. L'ensemble K, étant l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces et d'un sous-espace, est un cône convexe de X. Calculons sa fonction d'appui sK. Soit $x^* \in X^*$. Un des deux cas suivants est possible : ou bien il existe un élément $x_0 \in K$ tel que $\langle x^*, x_0\rangle > 0$, ou bien $\langle x^*, x\rangle \leqslant 0$, $\forall x \in K$. Dans le premier cas $sK(x^*) \geqslant t\langle x^*, x_0\rangle$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$, donc $sK(x^*) = +\infty$.

Dans le deuxième cas (-1) x^* appartient au cône dual du cône K et donc, en vertu du lemme précédent,

$$x^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad y^* \in Y^*.$$

Ainsi

$$sK(x^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists \lambda_i \geqslant 0, \quad y^* \in Y^*\colon\ x^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y, \\ +\infty & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En appliquant maintenant la formule (4) (théorème de dualité) à notre problème, nous obtenons

$$\rho(x, K) =$$
$$= \sup\left\{\langle x^*, x\rangle \mid x^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \|x^*\| \leqslant 1\right\}. \tag{6}$$

Le sous-espace $L = \operatorname{lin}\{x_1^*, \ldots, x_s^*\} + \operatorname{Im}\Lambda^*$ est la somme du sous-espace fermé $L_1 = \operatorname{Im}\Lambda^*$ (car $\operatorname{Im}\Lambda^* = (\operatorname{Ker}\Lambda)^\perp$ et un annulateur est toujours fermé) et du sous-espace de dimension finie $L_2 = \{x_1^*, \ldots, x_s^*\}$. Alors L sera fermé dans X (démontrez-le!) et c'est donc un espace de Banach. L'opérateur

$$\Lambda_1\colon \mathbf{R}^s \times Y^* \to L, \quad \Lambda_1(\lambda, y) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*$$

est linéaire, continu et applique $\mathbf{R}^s \times Y^*$ sur l'espace de Banach L. D'après le lemme sur l'application inverse à droite (voir 2.1.5), il existe une application $M_1\colon L \to \mathbf{R}^s \times Y^*$ telle que $\Lambda_1 \circ M_1 = I_L$, $\|M_1 x^*\| \leqslant C\|x^*\|$. Alors, si $\|x^*\| \leqslant 1$, on a

$$\|M_1 x^*\|_{\mathbf{R}^s \times Y^*} = \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i| + \|y^*\| \leqslant C.$$

Ainsi, dans l'expression (6) on peut supposer que $0 \leqslant \lambda_i \leqslant C$, $\| y^* \| \leqslant C$, d'où l'on obtient

$$S(x) = \rho(x, K) \leqslant$$
$$\leqslant \sup \{ \langle \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*, x \rangle \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant C, \quad \| y^* \| \leqslant C \} \leqslant$$
$$\leqslant C \{ \sum_{i=1}^{s} \langle x_i^*, x \rangle_+ + \| \Lambda x \| \}. \quad \blacksquare$$

Remarquons que si le cône K est donné seulement par les égalités

$$K = \{ x \mid \langle x_i^*, x \rangle = 0, \quad \Lambda x = 0 \}$$

(i.e. est un sous-espace), il possède une définition à l'aide d'inégalités

$$K = \{ x \mid \langle x_i^*, x \rangle \leqslant 0, \quad \langle (-1)\, x_i^*, x \rangle \leqslant 0, \quad \Lambda x = 0 \}.$$

En appliquant le lemme de Hoffmann, nous obtenons dans ce cas

$$\rho(x, K) \leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^{s} |\langle x_i^*, x \rangle| + \| \Lambda x \| \right\}. \tag{5'}$$

L e m m e d u m i n i m a x. *Soient X et Y des espaces de Banach, $\Lambda : X \to Y$ un opérateur surjectif, $x_i^* \in X^*$, $i = 1, \ldots, s$, $a = (a_1, \ldots, a_s)$. Définissons la fonction $S : \mathbf{R}^s \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ en posant*

$$S(a, y) = \inf_{\Lambda x + y = 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} (a_i + \langle x_i^*, x \rangle). \tag{7}$$

Si $\max_{1 \leqslant i \leqslant s} \langle x_i^*, x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in$ Ker Λ, on a la formule de dualité suivante

$$S(a, y) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i + \langle y^*, y \rangle \mid \alpha_i \geqslant 0, \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, \quad \Lambda^* y^* + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i^* = 0 \right\}. \tag{8}$$

En outre, inf *dans* (7) *est atteint pour un certain $\hat{x} = \hat{x}(a, y)$ (pas nécessairement unique) et il existe des $C > 0$, $\widetilde{C} > 0$, qui ne dépendent pas de a, y, tels que pour un choix approprié de $\hat{x}(a, y)$ on a*

$$\| \hat{x}(a, y) \| \leqslant C \{ | S(a, y) | + | a | + \| y \| \} \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C} (| a | + \| y \|). \tag{9}$$

D é m o n s t r a t i o n. L'existence du minimum dans (7), la convexité de S et la formule (8) seront démontrées en réduisant notre problème à deux problèmes standards déjà considérés.

A) Applications auxiliaires. Il faudra nous servir deux fois du lemme sur l'application inverse à droite (2.1.5). D'abord, il existe une application $\mathrm{M}: Y \to X$ telle que $\Lambda \circ \mathrm{M} = I$, $\| \mathrm{M}(y) \| \leqslant C_1 \| y \|$. Ensuite, supposons que $\varphi: X \to \mathbf{R}^s$ est définie par l'égalité $\varphi(x) = (\langle x_1^*, x\rangle, \ldots, \langle x_s^*, x\rangle)$. Désignons $L = \varphi(\operatorname{Ker} \Lambda)$. D'après le même lemme, il existe une application $\mu: L \to \operatorname{Ker} \Lambda$ telle que

$$\varphi \circ \mu = I, \quad \| \mu(\xi) \| \leqslant C_2 | \xi |.$$

En outre, comme tout sous-espace de $\mathbf{R}^s$, L peut être déterminé par un système d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{s} b_{lj}\xi_j = 0, \quad l = 1, \ldots, p,$$

ou, à l'aide de l'application

$$\beta: \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^p, \quad \beta\xi = \Big(\sum_{j=1}^{s} b_{lj}\xi_j\Big),$$

par la condition $\beta\xi = 0$.

B) La fonction $S(a, y)$ est bornée. Puisque

$$\Lambda x + y = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{M}(-y) + x_0, \quad x_0 \in \operatorname{Ker} \Lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_i + \langle x_i^*, x\rangle = a_i + \langle x_i^*, \mathrm{M}(-y)\rangle + \langle x_i^*, x_0\rangle, \tag{10}$$

en posant $x_0 = 0$, nous voyons, d'une part, qu'on a l'inégalité

$$\inf_{\Lambda x + y = 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} (a_i + \langle x_i^*, x\rangle) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{ |a_i| + C_1 \| x_i^* \| \| y \| \} \overset{\text{def}}{=} K, \tag{11}$$

et d'autre part, pour $\Lambda x + y = 0$, d'après (10)

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant s} (a_i + \langle x_i^*, x\rangle) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant s} (a_i - C_1 \| x_i^* \| \| y \|) \geqslant -K, \tag{12}$$

parce que par hypothèse $\max_{1 \leqslant i \leqslant s} (\langle x_i^*, x_0\rangle) \geqslant 0$ ($x_0 \in \operatorname{Ker} \Lambda$). De (11) et (12) on tire l'estimation

$$|S(a, y)| \leqslant K = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{ |a_i| + C_1 \| x_i^* \| \| y \| \}. \tag{13}$$

C) Existence du minimum. Ayant désigné $\tilde{a}_i = a_i + \langle x_i^*, \mathrm{M}(-y)\rangle + K$ et nous rappelant que

$$x_0 \in \operatorname{Ker} \Lambda \Leftrightarrow (\langle x_1^*, x_0\rangle, \ldots, \langle x_s^*, x_0\rangle) =$$
$$= \varphi(x_0) \in L = \varphi(\operatorname{Ker} \Lambda) = \operatorname{Ker} \beta,$$

nous voyons d'après (10) et (7) que $S(a, y) + K$ est la valeur du problème

$$\max (\tilde{a}_i + \xi_i) \to \inf; \quad \xi \in L \Leftrightarrow c \to \inf;$$
$$\tilde{a}_i + \xi_i \leqslant c, \quad \beta\xi = 0. \tag{14}$$

D'après (13), $S(a, y) + K \geqslant 0$, et donc on peut sans rien changer ajouter à (14) la condition $c \geqslant 0$.

Le problème (14) peut être amené à la forme standard d'un problème de programmation linéaire (2) (voir 3.3.3) dans $\mathbf{R}^{s+1}$. Pour cela, désignons $z_0 = c$, $z_i = c - \xi_i - \tilde{a}_i$, $z = (z_1, \ldots, z_s)$, $\theta = (1, \ldots, 1)$, $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s)$, $\tilde{z} = (z_0, z)$. La condition $\beta\xi = 0$ s'écrit sous la forme

$$\beta\xi = 0 \Longleftrightarrow \beta(c\theta - z - \tilde{a}) = c\beta\theta - \beta z - \beta\tilde{a} = 0 \Longleftrightarrow \tilde{B}\tilde{z} \geqslant \tilde{b},$$

où

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \beta\theta & -\beta \\ -\beta\theta & \beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \beta\tilde{a} \\ -\beta\tilde{a} \end{pmatrix}$$

sont une matrice d'ordre $2p \times (s + 1)$ et un vecteur de dimension $2p$ (en fait, nous avons remplacé l'égalité $\beta\xi = 0$ par deux inégalités $\beta\xi \geqslant 0$ et $\beta\xi \leqslant 0$).

Par conséquent, le problème (14) est équivalent au problème

$$z_0 \to \inf, \quad \tilde{B}\tilde{z} \geqslant \tilde{b}, \quad \tilde{z} \geqslant 0, \tag{15}$$

qui est de forme standard. Ce problème est compatible (par exemple, le vecteur $(2K, 2K - \tilde{a}_1, \ldots, 2K - \tilde{a}_s)$ est admissible, $\xi = 0$ correspondant appartient à L) et sa valeur $S(a, y) + K$ est finie (et même non négative). D'après le théorème d'existence de 3.3.3, il possède la solution $\hat{\tilde{z}} = (\hat{z}_0, \hat{z}) = (S(a, y) + K, \hat{z})$. Par conséquent, le problème (14) a la solution $\hat{\xi} = (S(a, y) + K)\theta - \hat{z} - \tilde{a}$ et alors

$$S(a, y) + K = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{\tilde{a}_i + \hat{\xi}_i\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{a_i + \langle x_i^*, \mathrm{M}(-y)\rangle + \hat{\xi}_i\} + K$$

et

$$S(a, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{a_i + \langle x_i^*, \hat{x}\rangle\},$$

où, d'après (10) et d'après la définition de l'application $\mu: L \to \operatorname{Ker} \Lambda$, on a

$$\hat{x} = \mathrm{M}(-y) + \mu\hat{\xi}. \tag{16}$$

D) Convexité de S et théorème de dualité. La fonction $(a, y) \mapsto S(a, y)$ est la S-fonction du problème de programmation convexe suivant:

$$\max(\eta_1, \ldots, \eta_s) \to \inf, \quad -\eta_i + \langle x_i^*, x\rangle + a_i = 0, \quad \Lambda x + y = 0. \tag{17}$$

Posons $Z = \mathbf{R}^s \times X$, $\widetilde{Y} = \mathbf{R}^s \times Y$, $z = (\eta, x)$,

$$f_0(z) = \max(\eta_1, \ldots, \eta_s),$$

$$\widetilde{\Lambda} z = (\langle x_1^*, x\rangle - \eta_1, \ldots, \langle x_s^*, x\rangle - \eta_s, \Lambda x),$$

et amenons (17) à la forme standard (($\mathfrak{z}(\alpha, \eta)$) de 3.3.2):

$$f_0(z) \to \inf, \quad \widetilde{\Lambda} z + (a, y) = 0. \tag{18}$$

Par conséquent, la fonction $(a, y) \mapsto S(a, y)$ est convexe (corollaire 1 de 3.3.2). D'après (13) elle est bornée, et donc continue sur l'espace $\widetilde{Y}$ tout entier (proposition 3 de 2.6.2). D'après le théorème de dualité de 3.3.2 (rappelons qu'il n'y a pas d'inégalités dans le problème (18)), on a

$$S(a, y) =$$
$$= \sup_{z^*} \{\langle z^*, (a, y)\rangle + \inf_z [\langle z^*, \widetilde{\Lambda} z\rangle + \max(\eta_1, \ldots, \eta_s)]\}. \tag{19}$$

Mais $z^* \in (\mathbf{R}^s \times Y)^* = \mathbf{R}^{s*} \times Y^*$, i.e. z^* se met sous la forme (α, y^*), $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbf{R}^{s*}$, $y^* \in Y^*$, de sorte que

$$\begin{aligned} &\langle z^*, (a, y)\rangle = \alpha a + \langle y^*, y\rangle, \\ &\langle z^*, \widetilde{\Lambda} z\rangle = \sum_{i=1}^s \alpha_i (\langle x_i^*, x\rangle - \eta_i) + \langle y^*, \Lambda x\rangle. \end{aligned} \tag{20}$$

D'après la proposition 2 de 2.6.3, la transformée de Young-Fenchel de la fonction $f(\eta) = \max(\eta_1, \ldots, \eta_s)$ sera de la forme

$$f^*(\alpha) = \sup_\eta (\alpha\eta - f(\eta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1, \\ +\infty & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{21}$$

Maintenant on peut tirer de (20) et (21)

$$\inf_z (\max(\eta_1, \ldots, \eta_s) + \langle z^*, \widetilde{\Lambda} z\rangle) =$$
$$= -\sup_{(\eta, x)} \{\alpha\eta - \max(\eta_1, \ldots, \eta_s) - \langle \sum_{i=1}^s \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^*, x\rangle\} =$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1, \ \Lambda^* y^* + \sum_{i=1}^s \alpha_i x_i^* = 0, \\ -\infty \text{ dans les autres cas.} \end{cases} \tag{22}$$

En substituant ceci dans (19), on obtient (8).

E) L e m m e g é o m é t r i q u e. *Soient L un sous-espace et K un cône engendré par un nombre fini de points dans $\mathbf{R}^s$. Alors, il existe*

un tel nombre $N > 0$ *que pour tout* $a \in \mathbf{R}^s$

$$\rho\,(0,\ (L+a)\cap K) \leqslant N\rho\,(0,\ L+a) \leqslant N\,|\,a\,| \qquad (23)$$

(la formule reste vraie également dans le cas $(L+a)\cap K = \varnothing$ si nous convenons que $\rho\,(0,\ \varnothing) = -\infty$).

D é m o n s t r a t i o n. a) Soit $K = \text{cone}\,\{x_1, \ldots, x_m\}$. Décomposons chaque vecteur en deux composantes, dont une est contenue dans le sous-espace L et l'autre y est orthogonale:

$$a = b + c, \quad x_i = y_i + z_i, \quad i = 1, \ldots, m; \quad b,\ y_i \in L, \quad c,\ z_i \in L^{\perp},$$

alors

$$\rho\,(0,\ (L+a)\cap K) = \inf\{|\xi|\,|\,\xi \in K,\ \ (\xi - a) \in L\} =$$
$$= \inf\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,(y_i + z_i)\Big|\,\Big|\,\lambda_i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,(y_i + z_i) - b - c \in L\Big\} =$$
$$= \inf\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,(y_i + z_i)\Big|\,\Big|\,\lambda_i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = c,\ \ y_i \in L\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\Big\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|y_i|\} + |c|\,\Big|\,\lambda_i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = c,\ \ y_i \in L\Big\}. \qquad (24)$$

D'autre part

$$\rho\,(0,\ L+a) = \inf\{|\eta + a|\,|\,\eta \in L\} =$$
$$= \inf\{|\eta' + c|\,|\,\eta' \in L\} = |c| \leqslant \sqrt{|b|^2 + |c|^2} = |a|.$$

Puisque

$$\lambda_i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = c \Leftrightarrow c \in \text{cone}\,\{z_1, \ldots, z_m\},$$

nous voyons que (23) découle de (24) si pour un certain $N_1 > 0$ on a

$$c \in \text{cone}\,\{z_1, \ldots, z_m\} \Rightarrow \exists\,\lambda_i \geqslant 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = c, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \leqslant N_1 |c| \qquad (25)$$

(ici dans (23) nous aurons $N = N_1 \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{|y_i|\} + 1$).

b) Supposons que $L_1 = \text{lin}\,\{z_1, \ldots, z_m\}$, $\dim L_1 = n$. Choisissons toutes les familles d'indices $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ pour lesquelles $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}\}$ est une base de L_1. A chaque telle famille correspond une application linéaire $\Lambda_I : \mathbf{R}^n \to L_1$ définie par la formule $\Lambda_I x = \sum_{k=1}^{n} x_k z_{i_k}$. Puisque $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}\}$ est une base de L_1, l'application inverse existe.

D'après le théorème de Carathéodory (voir 2.6.1), chaque vecteur $c \in \operatorname{cone}\{z_1, \ldots, z_m\}$ est une combinaison conique de $\leqslant n$ vecteurs linéairement indépendants z_i

$$c = \lambda_{i_1} z_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s} z_{i_s}, \quad \lambda_{i_k} > 0, \quad s \leqslant n.$$

En complétant s'il le faut la famille $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_s}\}$ de manière à obtenir une base de L_1 par des vecteurs $z_{i_{s+1}}, \ldots, z_{i_n}$ et en posant $\lambda_{i_{s+1}} = \ldots = \lambda_{i_n} = 0$, nous voyons que

$$c = \Lambda_I \lambda, \quad \lambda = (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}), \quad \lambda_{i_k} \geqslant 0, \quad I = (i_1, \ldots, i_n).$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \leqslant n |\lambda| \leqslant n \| \Lambda_I^{-1} \| \, |c| \leqslant n \max_I \{\| \Lambda_I^{-1} \|\} |c|.$$

Ceci démontre (25) pour $N_1 = n \max\limits_I \{\| \Lambda_I^{-1} \|\}$.

F) C o n c l u s i o n d e l a d é m o n s t r a t i o n du lemme du minimax. La seule chose qui nous reste à faire, c'est d'obtenir la relation (9). Pour cela, revenons à la première partie des problèmes 14). L'élément $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_s)$ est sa solution si et seulement si

$$\tilde{\xi}_i + \tilde{a}_i \leqslant S(a, y) + K, \quad i = 1, \ldots, s, \quad \tilde{\xi} \in L \qquad (26)$$

(puisque $S(a, y) + K$ est la valeur du problème, nous aurons l'égalité ici pour au moins un indice). En nous rappelant de la définition de $\tilde{a}_i$ donnée dans C) et en désignant $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_s)$, où

$$\hat{a}_i = \tilde{a}_i - S(a, y) - K = a_i + \langle x_i^*, \mathrm{M}(-y) \rangle - S(a, y), \qquad (27)$$

nous pouvons récrire (26) sous la forme $\tilde{\xi}_i + \hat{a}_i \leqslant 0$.

Ainsi $\tilde{\xi}$ est la solution de (14) $\Leftrightarrow \tilde{\xi} + \hat{a} \in (L + \hat{a}) \cap (-\mathbf{R}_+^s)$. Donc

$$\inf\{|\tilde{\xi} + \hat{a}| \mid \tilde{\xi} \text{ est une solution de (14)}\} = \rho(0, (L + \hat{a}) \cap (-\mathbf{R}_+^s)).$$

Puisque $-\mathbf{R}_+^s = \operatorname{cone}\{-e_1, \ldots, -e_s\}$ est un cône engendré par un nombre fini de points, le deuxième membre, d'après le lemme géométrique de E) est inférieur ou égal à $N\rho(0, L + \hat{a}) \leqslant N |a|$. Par conséquent,

$$\inf\{|\tilde{\xi} + \hat{a}| \mid \tilde{\xi} \text{ est la solution de (14)}\} \leqslant N |\hat{a}|,$$

et puisque $|\tilde{\xi}| \leqslant |\tilde{\xi} + \hat{a}| + |\hat{a}|$,

$$\inf\{|\tilde{\xi}| \mid \tilde{\xi} \text{ est la solution de (14)}\} \leqslant (N + 1) |\hat{a}|.$$

Si $\hat{a} \neq 0$, on a $(N+1)|\hat{a}| < (N+2)|\hat{a}|$, et parmi les solutions du problème (14) on peut en trouver une, désignons-la par $\hat{\xi}$, pour laquelle

$$|\hat{\xi}| \leqslant (N+2)|\hat{a}|. \tag{28}$$

Si $\hat{a} = 0$, alors $\hat{\xi} = 0$ est une solution et (28) est à nouveau valable.

En nous servant de la formule (16), nous trouvons d'après $\hat{\xi}$ l'élément $\hat{x} = \hat{x}(a, y)$. Dans l'estimation de cet élément nous tenons compte des inégalités

$$\| \mathrm{M}(-y) \| \leqslant C_1 \| y \|, \quad \| \mu(\hat{\xi}) \| \leqslant C_2 |\hat{\xi}| \tag{29}$$

(comparer à la définition des applications inverses à droite M et μ dans A)) et

$$|\hat{a}| = \Big(\sum_{i=1}^{s} \hat{a}_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{s} \max\{|\hat{a}_1|, \ldots, |\hat{a}_s|\} \overset{(27)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \sqrt{s}\,[\max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{|a_i| + \| x_i^* \| C_1 \| y \|\} + |S(a, y)|] \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{s}\,[|a| + C_1 \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \| x_i^* \| \| y \| + |S(a, y)|], \tag{30}$$

ainsi que de l'estimation (13) :

$$\| \hat{x}(a, y) \| \overset{(16),(29)}{\leqslant} C_1 \| y \| + C_2 |\hat{\xi}| \overset{(28)}{\leqslant} C_1 \| y \| + C_2 (N+2)|\hat{a}| \overset{(30)}{\leqslant}$$
$$\leqslant C_1 (1 + C_2 (N+2) \sqrt{s} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \| x_i^* \|) \| y \| +$$
$$+ C_2 (N+2) \sqrt{s} (|a| + |S(a, y)|) \overset{(13)}{\leqslant}$$
$$\leqslant C_1 (1 + \sqrt{s} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \| x_i^* \| 2C_2 (N+2)) \| y \| + 2C_2 (N+2) \sqrt{s} |a|.$$

Par conséquent, on a (9) avec les constantes

$$C = \max\{C_1 (1 + C_2 (N+2) \sqrt{s} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \| x_i^* \|, \quad C_2 (N+2) \sqrt{s}\},$$

$$\tilde{C} = \max\{C_1 (1 + \sqrt{s} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \| x_i^* \| 2C_2 (N+2)),\ 2C_2 (N+2) \sqrt{s}\}.$$

§ 3.4*. Conditions nécessaires de deuxième ordre et conditions suffisantes d'extrémum dans les problèmes différentiables

Envisageons à nouveau le cas où les inégalités sont absentes.

3.4.1. Problèmes différentiables à égalités. Considérons le problème

$$f(x) \to \text{extr}; \quad F(x) = 0. \tag{1}$$

Théorème 1 (conditions nécessaires de deuxième ordre). *Soient X et Y des espaces de Banach, U un ouvert de X, et supposons que la fonction f: $U \to \mathbf{R}$ et l'application F: $U \to Y$ possèdent au point $\hat{x} \in U$ une dérivée seconde de Fréchet;*

$$\mathscr{L}(x, \hat{y}^*, 1) = f(x) + \langle \hat{y}^*, F(x) \rangle.$$

Si $\hat{x}$ fournit un minimum (maximum) local au problème (1) *et si F est régulière au point $\hat{x}$ (i.e.* $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$), *il existe un multiplicateur de Lagrange $\hat{y}^* \in Y^*$ tel que*

$$\mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, 1) = 0, \tag{2}$$

et pour tout y^* possédant cette propriété on a

$$\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[h, h] \geqslant 0 \ (\leqslant 0), \quad \forall h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}). \tag{3}$$

Démonstration. L'existence de $\hat{y}^*$ pour lequel on a l'égalité (2) a été démontrée dans 3.2.2. Envisageons maintenant le cas $\hat{x} \in \text{loc min}$ (1). Soit $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. D'après le lemme de Lusternik (voir 2.3.5), on a $h \in T_{\hat{x}}\mathscr{M}$, où $\mathscr{M} = \{x \mid F(x) = 0\}$, i.e. il existe une application $r(\cdot)$: $[-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathscr{M}$ telle que

$$F(\hat{x} + th + r(t)) = 0, \quad r(t) = o(t), \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{4}$$

D'après (4), $\hat{x} + th + r(t)$ est un élément admissible du problème pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et, par conséquent, $f(\hat{x}) \leqslant f(\hat{x} + th + r(t))$, car $\hat{x} \in \text{loc min}$ (1). Donc

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) \leqslant f(\hat{x} + th + r(t)) = \mathscr{L}(\hat{x} + th + r(t), \hat{y}^*, 1) = \\ = \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1) + \mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[th + r(t)] + \\ + \frac{1}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[th + r(t), th + r(t)] + o(t^2) = \\ = f(\hat{x}) + \frac{t^2}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[h, h] + o(t^2). \end{aligned}$$

D'où l'on tire immédiatement (3). ■

Théorème 2 (condition suffisante de minimum). *Supposons que l'on a les hypothèses du théorème précédent et, en outre, pour un certain $\alpha > 0$, on a l'inégalité*

$$\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[h, h] \geqslant 2\alpha \| h \|^2, \quad \forall h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}). \tag{5}$$

Alors $\hat{x}$ est un point de minimum local pour le problème (1).

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(\hat{x}) = 0$. Désignons par $B(h_1, h_2)$ la forme bilinéaire $\frac{1}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1)[h_1, h_2]$. D'après le théorème sur les dérivées mixtes (voir 2.2.5), B est une forme bilinéaire continue symétrique. Choisissons $\varepsilon > 0$ de manière à avoir

$$\varphi(\varepsilon) = \alpha(1-\varepsilon)^2 - 2\| B \|(1+\varepsilon)\varepsilon - \| B \| \varepsilon^2 - \frac{\alpha}{2} > 0 \tag{6}$$

(puisque $\varphi(0) = \alpha/2 > 0$, ceci est possible).

Les fonctions F et $\mathscr{L}(\cdot, \hat{y}^*, 1)$ possèdent par hypothèse des dérivées secondes de Fréchet relativement à x au point $\hat{x}$. En nous servant de la formule de Taylor (théorème 2 de 2.2.5) et prenant en considération les relations

$$F(\hat{x}) = 0, \quad \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{y}^*, 1) = 0, \quad \mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, 1) = 0,$$

trouvons des nombres $\delta_1 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que pour $\| h \| < \delta_1$ on a les inégalités

$$\| F(\hat{x}+h) - F'(\hat{x})[h] \| = \| F(\hat{x}+h) - F(\hat{x}) - F'(\hat{x})[h] \| \leqslant C_1 \| h \|^2, \tag{7}$$

$$|\mathscr{L}(\hat{x}+h, \hat{y}^*, 1) - B(h, h)| \leqslant \frac{\alpha}{2} \| h \|^2.$$

En appliquant le lemme de 2.1.5, construisons l'application inverse à droite, désignée par $\mathrm{M}: Y \to X$, à l'application $F'(\hat{x})$; alors $F'(\hat{x}) \circ \mathrm{M} = I$, $\| \mathrm{M}(y) \| \leqslant C \| y \|$. D'après le nombre $\varepsilon > 0$ choisi précédemment, choisissons δ, $0 < \delta < \delta_1$ de manière à avoir

$$\delta C C_1 < \varepsilon. \tag{8}$$

Supposons maintenant que $\| h \| < \delta$ et soit $\hat{x} + h$ un élément admissible pour le problème, i.e. $F(\hat{x} + h) = 0$. Posons $h_2 = \mathrm{M}(F'(\hat{x})[h])$ et désignons par h_1 la différence $h - h_2$. Alors, de l'estimation pour $\mathrm{M}(y)$ et des relations (7), (8), nous obtenons

$$\| h_2 \| \leqslant C \| F'(\hat{x})[h] \| \leqslant C C_1 \| h \|^2 < \varepsilon \| h \|, \tag{9}$$

$$F'(\hat{x})[h_1] = F'(\hat{x})[h - h_2] = F'(\hat{x})[h] - F'(\hat{x})\mathrm{M}(F'(\hat{x})[h]) = 0.$$

Ainsi, $h_1 \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Il découle de (9) que

$$(1-\varepsilon)\,\|h\| \leqslant \|h_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\,\|h\|.$$

Finalement on obtient, en prenant en considération (6), (5) et (7),

$$f(\hat{x}+h) = \mathscr{L}(\hat{x}+h,\ \hat{y}^*,\ 1) \overset{(7)}{\geqslant} B(h,\ h) - \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 =$$

$$= B(h_1+h_2,\ h_1+h_2) - \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant B(h_1,\ h_1) - 2\|B\|\,\|h_1\|\,\|h_2\| - \|B\|\,\|h_2\|^2 -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\|h\|^2 \overset{(5)}{\geqslant} \left(\alpha(1-\varepsilon)^2 - 2\|B\|(1+\varepsilon)\,\varepsilon - \|B\|\,\varepsilon^2 - \frac{\alpha}{2}\right)\|h\|^2 \overset{(6)}{>} 0,$$

i.e. $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min}$ (1). ■

3.4.2. Problèmes différentiables à égalités et inégalités — conditions nécessaires du deuxième ordre. Envisageons le problème

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (\mathfrak{z})$$

En changeant, s'il le faut, les signes des fonctions, nous pouvons réduire à ($\mathfrak{z}$) tout problème du § 3.2. La fonction de Lagrange du problème ($\mathfrak{z}$) est de la forme

$$\mathscr{L}(x,\ y^*,\ \lambda,\ \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*,\ F(x)\rangle.$$

T h é o r è m e. *Soient X, Y des espaces de Banach, U un ouvert de X, $\hat{x} \in U$, et supposons que les fonctions $f_i\colon U \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, ainsi que l'application $F\colon U \to Y$, possèdent au point $\hat{x}$ une dérivée seconde de Fréchet et, en outre, $f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.*

Si $\hat{x}$ fournit un minimum local au problème ($\mathfrak{z}$), et si F est régulière au point $\hat{x}$ (i.e. $\operatorname{Im} F'(x) = Y$), alors:

a) *l'ensemble D des multiplicateurs de Lagrange $(y^*, \lambda, \lambda_0)$, $y^* \in Y^*$, $\lambda \in \mathbf{R}^{m*}$, λ_0 tels que*

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \qquad (1)$$
$$\mathscr{L}_x(\hat{x},\ y^*,\ \lambda,\ \lambda_0) = 0$$

est un compact convexe non vide de $Y^* \times \mathbf{R}^{m*} \times \mathbf{R}$;

b) *pour tout h_0 contenu dans le sous-espace*

$$L = \{h \mid \langle f_i'(\hat{x}),\ h\rangle = 0, \quad i \geqslant 0, \quad F'(\hat{x})[h] = 0\}, \qquad (2)$$

on peut trouver des multiplicateurs de Lagrange $(y^*(h_0),\ \lambda(h_0),\ \lambda_0(h_0)) \in D$ tels que

$$\mathscr{L}_{xx}(\hat{x},\ y^*(h_0),\ \lambda(h_0),\ \lambda_0(h_0))[h_0,\ h_0] \geqslant 0. \qquad (3)$$

D é m o n s t r a t i o n. Désignons, pour simplifier,

$$F'(\hat{x}) = \Lambda, \quad f_i'(\hat{x}) = x_i^*.$$

A) Considérons l'application $\varphi: \sigma \to X^*$ du simplexe

$$\sigma = \{(\lambda, \lambda_0) \mid \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\}$$

définie par l'égalité $\varphi(\lambda, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^*$. Alors

$$(y^*, \lambda, \lambda_0) \in D \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^* + y^* \circ \Lambda = \varphi(\lambda, \lambda_0) + \Lambda^* y^* =$$
$$= 0 \Rightarrow \varphi(\lambda, \lambda_0) \in \operatorname{Im} \Lambda^* \Rightarrow (\lambda, \lambda_0) \in \sigma_1 = \varphi^{-1}(\operatorname{Im} \Lambda^*).$$

Par hypothèse $\operatorname{Im} \Lambda = Y$ et donc (voir 2.1.7) $\operatorname{Im} \Lambda^* = (\operatorname{Ker} \Lambda)^\perp$; c'est donc un sous-espace fermé. Par conséquent σ_1, étant un sous-ensemble fermé d'un compact, est lui-même un compact.

Notons maintenant que $\operatorname{Ker} \Lambda^* = \{0\}$. En effet,

$$h^* \in \operatorname{Ker} \Lambda^* \Rightarrow \langle \Lambda^* h^*, x \rangle = 0, \quad \forall x \Rightarrow \langle h^*, \Lambda x \rangle = 0,$$
$$\forall x \Rightarrow h^* \in (\operatorname{Im} \Lambda)^\perp \Rightarrow h^* = 0.$$

Puisque le sous-espace fermé $\operatorname{Im} \Lambda^*$ d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach, le théorème de Banach implique l'existence d'une application $\Gamma: \operatorname{Im} \Lambda^* \to Y^*$ inverse à Λ^*. Maintenant

$$(y^*, \lambda, \lambda_0) \in D \Leftrightarrow (\lambda, \lambda_0) \in \sigma_1,$$
$$\varphi(\lambda, \lambda_0) + \Lambda^* y^* = 0 \Leftrightarrow (\lambda, \lambda_0) \in \sigma_1,$$
$$y^* = -\Gamma\varphi(\lambda, \lambda_0).$$

Par conséquent, D est l'image du compact σ_1 par l'application continue $(\lambda, \lambda_0) \mapsto (-\Gamma\varphi(\lambda, \lambda_0), \lambda_1, \lambda_0)$, c'est donc un compact.

Le fait que D est non vide découle du principe de Lagrange démontré dans le § 3.2. La convexité de D est une conséquence immédiate de la condition (1). D'ailleurs, elle peut être déduite de la convexité de σ et de $\operatorname{Im} \Lambda^*$ en remarquant que les applications considérées ci-dessus étaient linéaires. Ceci termine la démonstration de l'assertion a).

B) De même que dans 3.3.1, nous remplaçons le problème à inégalités par le problème à égalités

$$f(x) = \max\{f_0(x) - f_0(\hat{x}), f_1(x), \ldots, f_m(x)\} \to \inf; \quad F(x) = 0. \quad (\mathfrak{z}')$$

Si $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}$, alors $\hat{x} \in \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}'$. En effet,

$$\hat{x} \notin \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon : \|x_\varepsilon - \hat{x}\| < \varepsilon,$$

$$F(x_\varepsilon)=0, \quad f(x_\varepsilon)<0 \Rightarrow f_0(x_\varepsilon)<f_0(\hat{x}), \quad f_i(x_\varepsilon)<0,$$
$$i=1, \ldots, m, \quad F(x_\varepsilon)=0 \Rightarrow \hat{x} \notin \text{loc min } \mathfrak{z}.$$

Nous envisagerons ensuite le problème $(\mathfrak{z}')$.

C) Soit $h_0 \in L$. En vertu de la compacité de D, il existe des $(\hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$ tels que

$$\Psi(h_0)=\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)[h_0, h_0]=$$
$$=\max_{(y^*, \lambda, \lambda_0)\in D} \mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda, \lambda_0)[h_0, h_0]=$$
$$=\max\Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i''(\hat{x})[h_0, h_0]+\langle y^*, F''(\hat{x})[h_0, h_0]\rangle \,|\, \lambda_i \geqslant 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i=1, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^*+\Lambda^* y^*=0\Big\}.$$

L'assertion b) est équivalente à l'inégalité $\Psi(h_0) \geqslant 0$.

Supposons que $\Psi(h_0)<0$. Notons

$$\begin{aligned} a_i(\lambda) &= \frac{\lambda^2}{2} f_i''(\hat{x})[h_0, h_0], \quad i=0, \ldots, m, \\ y(\lambda) &= \frac{\lambda^2}{2} F''(\hat{x})[h_0, h_0], \end{aligned} \qquad (4)$$

et envisageons le problème

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} (a_i(\lambda)+\langle x_i^*, x\rangle) \to \inf; \quad \Lambda x+y(\lambda)=0. \qquad (5)$$

Vérifions que l'on peut appliquer le lemme du minimax de 3.3.4 à ce problème. En effet,

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} \langle x_i^*, x\rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in \operatorname{Ker} \Lambda$$

est la condition nécessaire de minimalité pour $\hat{x}$ dans le problème $(\mathfrak{z})$ (voir le lemme 1 de 3.2.4). En outre, par hypothèse, l'opérateur Λ est surjectif.

En vertu du lemme du minimax, il existe un élément $x_0(\lambda)$ possédant les propriétés :

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} (a_i(\lambda)+\langle x_1^*, x_0(\lambda)\rangle)=S(a(\lambda), y(\lambda)), \qquad (6)$$

où $S(a(\lambda), y(\lambda))$ est la valeur du problème (5) ;

$$\| x_0(\lambda) \| \leqslant C_1 \{\max | a_i(\lambda) | + \| y(\lambda) \|\} \leqslant C\lambda^2. \qquad (7)$$

On a alors en vertu de (8) (3.3.4)

$$S(a(\lambda), y(\lambda))=$$
$$=\frac{\lambda^2}{2} \max\Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i''(\hat{x})[h_0, h_0]+\langle y^*, F''(\hat{x})[h_0, h_0]\rangle \,|\, \lambda_i \geqslant 0,$$
$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i=1, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^*+\Lambda^* y^*=0\Big\}=\frac{\lambda^2}{2} \Psi(h_0). \qquad (8)$$

Mais alors il découle de (7) que $\|\lambda h_0 + x_0(\lambda)\| = O(\lambda)$. D'après la formule de Taylor (voir 2.2.5), on a

$$F(\hat{x}+x_0(\lambda)+\lambda h_0) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})[x_0(\lambda)] + \frac{1}{2}F''(\hat{x})[\lambda h_0 + x_0(\lambda),\ \lambda h_0 + x_0(\lambda)] + o(\lambda^2) =$$

$$= F''(\hat{x})[\lambda h_0,\ x_0(\lambda)] + \frac{1}{2}F''(\hat{x})[x_0(\lambda),\ x_0(\lambda)] + o(\lambda^2) = o(\lambda^2)$$

(rappelons que

$$h_0 \in L \subset \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$$

et, en vertu de (5),

$$F'(\hat{x})[x_0(\lambda)] + (\lambda^2/2)F''(\hat{x})[h_0,\ h_0] = 0).$$

Dans la démonstration du théorème de Lusternik de 2.3.5, nous avons construit une application $\varphi\colon U \to X$ du voisinage $U \ni \hat{x}$ de manière à avoir

$$F(x+\varphi(x)) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \|\varphi(x)\| \leqslant K\|F(x)\|.$$

En posant $r(\lambda) = \varphi(\hat{x} + x_0(\lambda) + \lambda h_0)$, on obtient

$$F(\hat{x}+x_0(\lambda)+\lambda h_0 + r(\lambda)) \equiv 0,$$

$$\|r(\lambda)\| \leqslant K\|F(\hat{x}+x_0(\lambda)+\lambda h_0)\| = o(\lambda^2).$$

Mais alors, en appliquant la formule de Taylor à f_i et en se servant de (6) et (8), on obtient

$$f(\hat{x}+x_0(\lambda)+\lambda h_0+r(\lambda)) =$$

$$= \max\{f_0(\hat{x}+x_0(\lambda)+\lambda h_0+r(\lambda)) - f_0(\hat{x}),$$

$$f_i(\hat{x}+x_0(\lambda)+\lambda h_0+r(\lambda)),\quad i=1,\ \ldots,\ m\} =$$

$$= \max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(\langle x_i^*,\ x_0(\lambda)\rangle + \frac{\lambda^2}{2}f_i''(\hat{x})[h_0,\ h_0] + o(\lambda^2)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant m}\left(\langle x_i^*,\ x_0(\lambda)\rangle + \frac{\lambda^2}{2}f_i''(\hat{x})[h_0,\ h_0]\right) + o(\lambda^2) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\Psi(h_0) + o(\lambda^2) < 0$$

pour λ^2 suffisamment petits. Ainsi

$$\Psi(h_0) < 0 \Rightarrow \hat{x} \notin \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}' \Rightarrow \hat{x} \notin \operatorname{loc\,min} \mathfrak{z}\,;$$

cette contradiction démontre le théorème. ■

3.4.3. Conditions nécessaires d'extrémum pour les problèmes différentiables à égalités et inégalités. Comme dans le sous-paragraphe précédent, nous considérons le problème

$$f_0(x) \to \inf; \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0. \qquad (\mathfrak{z})$$

Théorème. *Soient X, Y des espaces de Banach, U un ensemble ouvert de X, $\hat{x} \in U$; supposons que les fonctions $f_i: U \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, et l'application $F: U \to Y$ possèdent au point $\hat{x}$ (admissible pour $(\mathfrak{z})$) une dérivée seconde de Fréchet et $f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.*

Supposons qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{m*}$, $\hat{y}^* \in Y^*$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que $\hat{\lambda}_i > 0$

$$\mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, 1) = f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) + F'^*(\hat{x})[\hat{y}^*] = 0 \qquad (1)$$

et

$$\mathscr{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, 1)[h, h] \geqslant 2\alpha \|h\|^2 \qquad (2)$$

pour tout h contenu dans le sous-espace

$$L = \{h \mid \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle = 0, \quad i \geqslant 1, \quad F'(\hat{x})[h] = 0\}. \qquad (3)$$

Alors $\hat{x}$ fournit un minimum local au problème $(\mathfrak{z})$.

Démonstration. A) Supposons que $\hat{x} + h$ est un élément admissible, i.e.

$$f_i(\hat{x} + h) \leqslant 0 \quad i \geqslant 1, \quad F(\hat{x} + h) = 0. \qquad (4)$$

Effectuons l'estimation de l'expression $f_0(\hat{x} + h)$ de deux manières différentes. Nous avons

$$f_0(\hat{x} + h) = f_0(\hat{x} + h) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x} + h) + \langle \hat{y}^*, F(\hat{x} + h)\rangle - \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x} + h) = \mathscr{L}(\hat{x} + h, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, 1) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x} + h). \qquad (5)$$

La première méthode d'estimation est basée sur la décomposition directe

$$f_0(\hat{x} + h) = \mathscr{L}(\hat{x} + h, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, 1) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x} + h) = \mathscr{L}(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, 1) + \mathscr{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, 1)[h] -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \langle \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}),\ h\rangle + r_1(h) =$$

$$= f_0(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \langle \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}),\ h\rangle + r_1(h), \qquad (6)$$

où le terme résiduel $r_1(h)$ est $O(\|h\|)^2$.

La deuxième méthode est basée sur le fait que la somme $\sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}+h)$, en vertu des inégalités $\hat{\lambda}_i > 0$, $f_i(\hat{x}+h) \leqslant 0$, est non positive et par conséquent,

$$f_0(\hat{x}+h) \geqslant \mathscr{L}(\hat{x}+h,\ \hat{y}^*,\ \hat{\lambda},\ 1) =$$
$$= \mathscr{L}(\hat{x},\ \hat{y}^*,\ \hat{\lambda},\ 1) + \mathscr{L}_x(\hat{x},\ \hat{y}^*,\ \hat{\lambda},\ 1)[h] +$$
$$+\frac{1}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x},\ \hat{y}^*,\ \hat{\lambda},\ 1)[h,\ h] + r_2(h) = f_0(\hat{x}) + B(h,\ h) + r_2(h), \quad (7)$$

où $B(h,\ h)$ désigne la forme quadratique $\frac{1}{2}\mathscr{L}_{xx}(\hat{x},\ \hat{y}^*,\ \hat{\lambda},\ 1)[h,\ h]$, tandis que le terme résiduel est $r_2(h) = o(\|h\|^2)$.

B) Désignons par K le cône consistant de tous les h pour lesquels $\langle f_i'(\hat{x}),\ h\rangle \leqslant 0$, $i \geqslant 1$, $F'(\hat{x})h = 0$.

En vertu du lemme de Hoffmann, un h arbitraire peut être décomposé en une somme $h_1 + h_2$, où $h_1 \in K$ et h_2 peut être estimé de la manière suivante

$$\|h_2\| \leqslant C_1 \Big\{\sum_{i=1}^{m} \langle f_i'(\hat{x}) + h\rangle_+ + \|F'(\hat{x})h\|\Big\}. \qquad (8)$$

Servons-nous maintenant de la remarque faite dans 3.3.4 après le lemme de Hoffmann et de la formule (5′) de 3.3.4: h_1 peut être également décomposé en une somme $h_1 = h_1' + h_1''$, où $h_1' \in L$, tandis que h_1'' possède l'estimation

$$\|h_1''\| \leqslant C_2 \Big\{\sum_{i=1}^{m} |\langle f_i'(\hat{x}),\ h_1\rangle|\Big\} = C_2\Big\{-\sum_{i=1}^{m} \langle f_i'(\hat{x}),\ h_1''\rangle\Big\}. \qquad (9)$$

Nous nous sommes servis du fait que $F'(\hat{x})[h_1] = 0$ (car $h_1 \in K$) et du fait que

$$|\langle f_i'(\hat{x}),\ h_1\rangle| = |\langle f_i'(\hat{x}),\ h_1' + h_1''\rangle| = |\langle f_i'(\hat{x}),\ h_1''\rangle| =$$
$$= -\langle f_i'(\hat{x}),\ h_1''\rangle \quad (\text{car } \langle f_i'(\hat{x}),\ h_1'\rangle = 0, \text{ et } \langle f_i'(\hat{x}),\ h_1\rangle \leqslant 0).$$

C) Il découle de (4) que

$$\begin{aligned} 0 &= F(\hat{x}+h) - F(\hat{x}) = F'(\hat{x})[h] + r_0(h), \\ 0 &\geqslant f_i(\hat{x}+h) = \langle f_i'(\hat{x}),\ h\rangle + \rho_i(h), \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \qquad (10)$$

où $\|r_0(h)\|$ et $|\rho_i(h)|$ sont des grandeurs de l'ordre $O(\|h\|^2)$.

Utilisant ces estimations et (8), nous voyons que si $\hat{x}+h$ est un élément admissible, nous avons

$$\|h_2\| \leqslant C_1 \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\rho_i(h)| + \|r_0(h)\| \right\}. \tag{11}$$

Fixons $\varepsilon_1 \in (0, 1]$ (qui sera précisé par la suite) et choisissons $\delta \in (0, \|B\|^{-1})$ de sorte que l'inégalité $\|h\| \leqslant \delta$ implique les inégalités

$$\sum_{i=1}^{m} |\rho_i(h)| + \sum_{j=0}^{1} \|r_j(h)\| \leqslant \varepsilon_1 \|h\|, \quad \|r_2(h)\| \leqslant \frac{\alpha}{2} \|h\|^2. \tag{12}$$

Choisissons ensuite un nombre $A > 0$ pour avoir

$$AC_2^{-1} (\min_i \hat{\lambda}_i) - C_1 \max_i (\hat{\lambda}_i \|f_i'(\hat{x})\|) - 1 \geqslant 0, \tag{13}$$

et enfin choisissons ε_1 de manière que $\varepsilon = (C_1 + A)\,\varepsilon_1$ implique les inégalités

$$\varepsilon < 1, \quad \alpha(1-\varepsilon)^2 - 2\|B\|\,\varepsilon(1+\varepsilon) - \|B\|\,\varepsilon^2 - \alpha/2 \geqslant 0. \tag{14}$$

D) Conclusion de la démonstration. Supposons que $\hat{x} + h$ est un élément admissible. Représentons h, comme dans B), sous la forme de somme: $h = h_1' + h_1'' + h_2$. Deux cas sont possibles: a) $\|h_1''\| > A\varepsilon_1 \|h\|$ et b) $\|h_1''\| \leqslant A\varepsilon_1 \|h\|$. Dans le cas a), nous avons d'après (9), pour $\|h\| \leqslant \delta$, la relation

$$A\varepsilon_1 \|h\| < \|h_1''\| < C_2 \left(-\sum_{i=1}^{m} \langle f_i'(\hat{x}),\ h_1'' \rangle \right). \tag{15}$$

Alors, en vertu de (6), (15), (11), (12) et (13), nous obtenons

$$f_0(\hat{x}+h) \overset{(6)}{=} f_0(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \langle \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}),\ h_1'' + h_2 \rangle +$$
$$+ r_1(h) \overset{(15),(11),(12)}{\geqslant} f_0(\hat{x}) + AC_2^{-1} (\min_i \hat{\lambda}_i)\, \varepsilon_1 \|h\| -$$
$$- \max_i (\hat{\lambda}_i \|f_i'(\hat{x})\|)\, C_1 \varepsilon_1 \|h\| - \varepsilon_1 \|h\| =$$
$$= f_0(\hat{x}) + \varepsilon_1 \|h\| \left(AC_2^{-1} (\min_i \hat{\lambda}_i) - C_1 \max_i (\hat{\lambda}_i \|f_i'(\hat{x})\|) - 1 \right) \overset{(13)}{\geqslant} f_0(\hat{x}).$$

Supposons maintenant que nous avons le cas b). Alors $\|h_1''\| \leqslant \leqslant A\varepsilon_1 \|h\|$, donc, en désignant $h_2' = h_1'' + h_2$, on obtient en vertu de (11) et (12):

$$\|h_2'\| = \|h_1'' + h_2\| \leqslant (A + C_1)\,\varepsilon_1 \|h\| = \varepsilon \|h\|.$$

Alors $h = h_1' + h_2'$, où $(1 - \varepsilon) \| h \| \leqslant \| h_1' \| \leqslant (1 + \varepsilon) \| h \|$. Appliquant maintenant ces inégalités, ainsi que (7), (2), (12), nous obtenons

$$f_0(\hat{x}+h) \overset{(7)}{\geqslant} f_0(\hat{x}) + B(h, h) + r_2(h) =$$
$$= f_0(\hat{x}) + B(h_1'+h_2', h_1'+h_2') + r_2(h) =$$
$$= f_0(\hat{x}) + B(h_1', h_1') + 2B(h_1', h_2') + B(h_2', h_2') +$$
$$+ r_2(h) \overset{(2),(12)}{\geqslant} f_0(\hat{x}) + \Big(\alpha(1-\varepsilon)^2 - 2\|B\|\varepsilon(1+\varepsilon) -$$
$$- \|B\|\varepsilon^2 - \frac{\alpha}{2}\Big)\|h\|^2 \geqslant f_0(\hat{x}).$$

Le théorème est démontré.

§ 3.5. Applications de la théorie à l'algèbre et à l'analyse

Dans ce paragraphe, nous avons regroupé quelques exemples où la solution d'un problème d'extrémum est la clé de la démonstration d'un résultat théorique. Le théorème fondamental de l'algèbre, le théorème sur le supplémentaire orthogonal et le théorème de Hilbert se rapportent aux théorèmes les plus importants du cours universitaire. Le critère de Sylvester et les déterminants de Gram sont également des instruments usuels des mathématiciens. Le sous-paragraphe 3.5.5 est plus recherché. Nous l'avons inclu ici, étant donné l'importance fondamentale du fait que dans le calcul des variations classique et la théorie de Morse l'indice des formes quadratiques est fini.

3.5.1. Théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème. *Tout polynôme à coefficients complexes de degré supérieur ou égal à l'unité possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. Soit $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, où $a_n \neq 0$. Envisageons le problème élémentaire

$$f(z) = |p(z)|^2 \to \inf. \qquad (\mathfrak{z})$$

Lemme. *Le problème* $(\mathfrak{z})$ *possède une solution.* En effet,

$$f(z) = |p(z)|^2 = \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big|^2 \geqslant \Big(|a_n|\,|z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k\Big)^2 =$$
$$= |a_n|^2\,|z^{2n}|\,\Big(1 + O\Big(\frac{1}{|z|}\Big)\Big) \to +\infty$$

quand $z \to \infty$. D'où l'on tire que *tous les ensembles de Lebesgue sont compacts*; maintenant, l'assertion du lemme découle de la continuité

de la fonction $f(\cdot)$ et du corollaire du théorème de Weierstrass (voir 3.1.7).

Soit $\hat{z}$ une solution du problème ($\mathfrak{z}$). Sans perte de généralité, on peut supposer que $\hat{z} = 0$ (autrement nous aurions considéré le polynôme $q(z) = p(z - \hat{z})$). Ainsi

$$f(0) \leqslant f(z) = |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n|^2, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Si $a_0 = 0$, alors le point zéro est une racine du polynôme et il n'y a rien à démontrer. Supposons que $a_0 \neq 0$, le nombre s vérifiant $a_1 = \ldots = a_{s-1} = 0$, $a_s \neq 0$. Fixons $\zeta = e^{i\theta}$ et considérons la fonction d'une variable $\varphi(t) = f(t\zeta)$. Par hypothèse, le point zéro donne un minimum à cette fonction. On a

$$\varphi^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k}\varphi\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d^k}{dt^k}[(a_0 + a_1 t^s e^{is\theta} + 0(t^{s+1}))(\bar{a}_0 + \bar{a}_s t^s e^{-is\theta} + 0(t^{s+1}))]|_{t=0} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 1, \ldots, s-1, \\ (2s)!\ \mathrm{Re}\,(\bar{a}_0 a_s e^{i\theta s}) = (2s)!\ |a_0|\,|a_s| \cos(s\theta + \gamma), & k = s. \end{cases}$$

Puisque $s \geqslant 1$, la fonction $\theta \mapsto \cos(s\theta + \gamma)$ prend des valeurs positives, ainsi que négatives. Par conséquent, d'après le lemme de 3.1.1, la fonction φ n'aura pas de minimum au point zéro, si l'on choisit ζ de manière à avoir $\varphi^{(s)}(0) < 0$. Cette contradiction démontre que $a_0 = 0$. ■

Les premières ébauches de l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre sont dues à Girard (1629) et Descartes (1637). Descartes écrivait que chaque équation possède tant de racines qu'elle a de degrés. Il arrive parfois que certaines de ces racines sont fausses ou inférieures à rien. Il est admis que la première démonstration du théorème fut donnée par Gauss (1799). La démonstration exposée ci-dessus est inspirée de D'Alembert (1746-1748).

3.5.2. Critère de Sylvester. Comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois dans ce chapitre, les conditions de deuxième ordre se rapportent (dans le cas du minimum) au fait qu'une certaine forme quadratique est non négative (condition nécessaire) ou positive (condition suffisante). Dans les cas de dimension finie, la positivité de la forme quadratique s'établit à l'aide du critère bien connu de Sylvester. Nous montrerons ici que ce critère lui-même se déduit du théorème de Fermat.

Rappelons qu'une matrice symétrique $A_m = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, m$, $a_{ij} = a_{ji}$, est dite *définie positive* si la forme quadratique correspondante $x^\top Ax = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j = Q_m(x)$ est positive pour tout vecteur non nul $x \in \mathbf{R}^m$. Les déterminants $\det A_k$, où $A_k = (a_{ij})$,

$i, j = 1, \ldots, k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, sont appelés *mineurs principaux de la matrice* A_m.

Théorème (critère de Sylvester). *Pour qu'une matrice soit définie positive, il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux soient positifs.*

Démonstration. A) Pour une matrice d'ordre un, l'assertion du théorème est triviale. Supposons que le théorème est démontré pour les matrices d'ordre $n - 1$, $n \geqslant 2$, et démontrons-le pour les matrices d'ordre n. Soient A_n une matrice d'ordre n et A_{n-1} sa sous-matrice (d'ordre $n - 1$) obtenue en éliminant la dernière colonne et la dernière ligne.

Pour un $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$ arbitraire, désignons $\tilde{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, 0) \in \mathbf{R}^m$. Alors $Q_{n-1}(\xi) = Q_n(\tilde{\xi})$ et si A_n est définie positive, il en est de même pour la matrice A_{n-1}, donc $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$.

Ainsi nous devons démontrer l'assertion suivante.

Lemme 1. *Soit* $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$. *La matrice* A_n *est définie positive si et seulement si* $\det A_n > 0$.

B) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, où $x_n \neq 0$. Posons

$$y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) = (x_1/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

$$a = (a_{1n}, \ldots, a_{n-1, n}).$$

Il est clair que

$$Q_n(x) = x^\top A_n x = (y^\top A_{n-1} y + 2a^\top y + a_{nn}) x_n^2. \tag{1}$$

Considérons le problème d'extrémum élémentaire

$$f(y) = y^\top A_{n-1} y + 2a^\top y + a_{nn} \to \inf. \tag{2}$$

Lemme 2. *Dans les hypothèses du lemme* 1, *le problème* (2) *a une solution.*

Démonstration du lemme 2. Par hypothèse, $\det A_k > 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$. Puisque le déterminant dépend continûment des éléments de la matrice, pour un $\varepsilon > 0$ petit les mêmes inégalités $\det A_k(\varepsilon) > 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$, restent valables pour les mineurs principaux de la matrice $A_{n-1}(\varepsilon) = A_{n-1} - \varepsilon E$ (où E est la matrice unité). Par hypothèse de récurrence, nous en déduisons le fait que la matrice $A_{n-1}(\varepsilon)$ est définie positive, ainsi que l'inégalité

$$Q_{n-1}(y) = y^\top A_{n-1} y = y^\top (A_{n-1} - \varepsilon E) y + \varepsilon |y|^2 \geqslant \varepsilon |y^2|,$$

d'où l'on tire, en se servant de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, que

$$|f(y)| = |y^\top A_{n-1} y + 2a^\top y + a_{nn}| \geqslant \varepsilon |y|^2 - \\ - 2|a||y| - |a_{nn}| \to \infty$$

quand $|y| \to \infty$. Il ne reste qu'à appliquer le corollaire du théorème de Weierstrass (voir 3.1.7).

C) Démonstration du lemme 1. Soit $\hat{y}$ une solution du problème (2). En appliquant le théorème de Fermat, on obtient

$$0 = f'(\hat{y})[h] = 2h^{\top}(A_{n-1}\hat{y} + a), \quad \forall h \in \mathbf{R}^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{n-1}\hat{y} + a = 0 \Leftrightarrow \hat{y} = -A_{n-1}^{-1}a,$$

d'où

$$\hat{f}(\hat{y}) = a_{nn} - a^{\top}A_{n-1}^{-1}a.$$

En décomposant ensuite $\det A_n$ relativement à la dernière colonne, et puis tous les mineurs de la formule obtenue, sauf un, relativement à la dernière ligne, nous obtenons l'égalité

$$\det A_n = a_{nn} \det A_{n-1} - \sum_{i,k=1}^{n-1} \alpha_{ik} a_{ni} a_{kn} =$$

$$= \det A_{n-1} \left\{ a_{nn} - \sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{\alpha_{ik}}{\det A_{n-1}} a_{ni} a_{kn} \right\} =$$

$$= \det A_{n-1} \{a_{nn} - a^{\top} A_{n-1} a\} = \det A_{n-1} f(\hat{y}). \qquad (3)$$

Ici α_{ik} est le complément algébrique de l'élément a_{ik} dans la matrice A_{n-1} (celle-ci étant symétrique, on a $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$), de plus, nous nous sommes servis de la formule classique qui donne les éléments de la matrice inverse.

En vertu de (1) et (2), on a $Q_n(x) = f(y) x_n^2$ pour $x_n \neq 0$ et, en particulier, $f(\hat{y}) = Q_n(\hat{x})$, où $\hat{x} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{n-1}, 1) \neq 0$. Par conséquent, si A_n est définie positive, alors $f(\hat{y}) = Q_n(\hat{x}) > 0$ et d'après (3) $\det A_n > 0$. Réciproquement, si $\det A_n > 0$, on a $f(\hat{y}) > 0$ et $Q_n(x) = f(y) x_n^2 \geqslant f(\hat{y}) x_n^2 > 0$ pour $x_n \neq 0$. Si $x_n = 0$, alors $x = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) = (\tilde{\xi}, 0)$ et $Q_n(x) = Q_{n-1}(\tilde{\xi}) > 0$ pour $x \neq 0$ par hypothèse de récurrence. Ceci démontre le lemme 1, et donc le critère de Sylvester.

Exercice. Donner un exemple lorsque $\det A_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n$, mais $Q_n(x) < 0$ pour un certain $x \neq 0$.

3.5.3. Distance d'un point à un sous-espace. Théorème sur le supplémentaire orthogonal. Déterminants de Gram. Soient X un espace de Hilbert réel à produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et L un sous-espace de X. Un élément x est dit *orthogonal à* L si pour tout $y \in L$ on a $(x \mid y) = 0$. L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à un sous-espace donné constitue un sous-espace appelé *supplémentaire orthogonal* du sous-espace L et noté $L^{\perp}$. La théorie des espaces de Hilbert se base sur le

Théorème du supplémentaire orthogonal. *Soit L un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert X. Alors X se décompose en une somme orthogonale directe $L \oplus L^{\perp}$; autrement dit, pour tout $\hat{x} \in X$ il existe des éléments uniques $\hat{y} \in L$, $\hat{z} \in L^{\perp}$ tels que $\hat{x} = \hat{y} + \hat{z}$.*

La démonstration de ce théorème est fondée sur l'étude du problème de la plus courte distance du point $\hat{x}$ à la variété affine L,

$$\| \hat{x} - y \| \to \inf, \quad y \in L, \tag{1}$$

que nous avons déjà considéré dans 3.3.4. En nous servant maintenant de certains traits spécifiques des espaces de Hilbert, nous pouvons aller plus de l'avant.

Lemme. *Si L est fermé, la solution du problème* (1) *existe.*

Démonstration. A) Trouvons d'abord la solution du problème posé dans le cas de la droite $l = \{x = \xi + \eta t\}$, $\eta \neq 0$. Soit $\varphi(t) = (\hat{x} - \xi - t\eta \mid \hat{x} - \xi - t\eta)$. La fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est quadratique et possède un minimum unique, puisque le coefficient de t^2 est positif. D'après le théorème de Fermat, $\hat{t} \in \operatorname{abs\,min} \varphi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varphi'(\hat{t}) = 0 \Leftrightarrow (\eta \mid \hat{x} - \xi - \hat{t}\eta) = 0$, d'où il découle immédiatement que

$$\rho^2(\hat{x}, l) = \| \hat{x} - \hat{z} \|^2 = \| \hat{x} - \xi \|^2 - (\hat{x} - \xi \mid e)^2,$$
$$e = \eta / \| \eta \|, \quad \hat{z} = \xi + \hat{t}\eta \tag{2}$$

et que $\hat{x} - \hat{z}$ est orthogonal à η. Le point $\hat{z}$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de $\hat{x}$ sur l.

B) Démontrons maintenant le lemme dans le cas général. Si $\hat{x} \in L$, il n'y a rien à démontrer. Mais si $\hat{x} \notin L$, alors, L étant fermé, la valeur de ρ pour le problème (1) est positive. Soit $\{y_n\}$ une suite minimisante pour le problème (1), i.e. $y_n \in L$ et $\| \hat{x} - y_n \| \to \rho$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $\{\| \hat{x} - y_n \|\}$ est monotone. Montrons qu'elle est fondamentale. Soit $0 < < (\| \hat{x} - y_n \|^2 - \rho^2)^{1/2} < \varepsilon$. Construisons la droite l passant par les points y_n et y_{n+k}, $k \geqslant 1$, et abaissons, comme nous l'avons fait précédemment, la perpendiculaire de $\hat{x}$ sur l ; soit $\hat{z}$ son pied. Puisque la longueur d'une oblique est d'autant plus grande que son pied est éloigné du pied de la perpendiculaire, on a

$$\| \hat{x} - y_n \| \geqslant \| \hat{x} - y_{n+k} \| \Rightarrow \| \hat{z} - y_n \| \geqslant \| \hat{z} - y_{n+k} \| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \| y_n - y_{n+k} \| \leqslant \| \hat{z} - y_{n+k} \| + \| y_n - \hat{z} \| \leqslant 2 \| \hat{z} - y_n \| =$$
$$= 2 (\| \hat{x} - y_n \|^2 - \| \hat{z} - \hat{x} \|^2)^{1/2} < 2\varepsilon,$$

d'où l'on tire que $\{y_n\}$ est fondamentale.

Puisque X est complet et L est fermé, la suite $\{y_n\}$ converge vers un certain élément $\hat{y}$. D'après la continuité de la norme, $\| \hat{x} - \hat{y} \| = \lim_{n\to\infty} \| \hat{x} - y_n \| = \rho$.

La démonstration du théorème est maintenant très simple. Si $\hat{y}$ est la solution du problème (1), alors, pour tout vecteur $z \in L$, la fonction $\varphi(t) = \| \hat{x} - \hat{y} - tz \|^2$ possède un minimum au point zéro. En appliquant de nouveau le théorème de Fermat, $\varphi'(0) = 0$, nous obtenons immédiatement $(\hat{x} - \hat{y} \mid z) = 0$, i.e. $\hat{x} - \hat{y} \in L^{\perp}$. S'il existe deux représentations $\hat{x} = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, $y_i \in L$, $z_i \in L^{\perp}$, $i = 1, 2$, alors $y_1 - y_2 = z_1 - z_2 \Rightarrow (y_1 - y_2 \mid y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. ■

R e m a r q u e. Bien sûr, pour démontrer l'existence de la solution du problème (1), on aurait pu, dans l'esprit du sous-paragraphe 3.1.7, se servir de la semi-continuité inférieure (dans la topologie faible) de la fonction $x \mapsto N(x) = \| x \|$ et de la compacité faible de l'ensemble de Lebesgue $\{x \mid N(x) \leqslant 1\}$, i.e. de la boule unité dans l'espace. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que la compacité faible se déduit de l'isomorphisme isométrique de X et X^*, et ce dernier se démontre à l'aide du théorème sur le supplémentaire orthogonal. (Théorème sur la compacité faible de la boule unité dans un espace dual d'un espace séparable normé, voir [KF], p. 197.) La fonction N est convexe et continue, donc fermée. D'après le théorème de Minkowski (voir 2.6.2), elle est la borne supérieure de fonctions affines, qui sont continues dans la topologie faible, elle est donc semi-continue inférieurement dans cette même topologie.

Trouvons maintenant la distance d'un point à l'hyperplan. Supposons que l'hyperplan H est donné par l'équation $H = \{y \mid (y \mid e) = \alpha\}$, $\| e \| = 1$. Le carré de la distance du point $\hat{x}$ à l'hyperplan H est la valeur du problème différentiable $\| \hat{x} - y \|^2 = (\hat{x} - y \mid \hat{x} - y) \to \inf$; $(y \mid e) = \alpha$, qui possède d'après le lemme démontré une solution $\hat{y}$ (il est clair que $\| \hat{x} - y \|$ et $\| \hat{x} - y \|^2$ atteignent simultanément leur minimum).

En appliquant la règle des multiplicateurs de Lagrange, nous obtenons, en omettant les détails triviaux:

$$Z = \frac{1}{2}(\hat{x} - y \mid \hat{x} - y) + \lambda (y \mid e), \quad Z_y = 0 \Rightarrow \hat{y} = \hat{x} + \hat{\lambda} e,$$

$$\hat{\lambda} = \alpha - (\hat{x} \mid e), \quad \rho(\hat{x}, H) = \| \hat{x} - \hat{y} \| = |\hat{\lambda} e| = |\alpha - (\hat{x} \mid e)|.$$

Obtenons enfin la formule explicite bien connue pour la distance d'un point x_0, appartenant à l'espace de Hilbert X, au sous-espace L_n, enveloppe linéaire de n vecteurs linéairement indépendants $x_1, \ldots, x_n$. Le carré de cette distance est la valeur du problème

élémentaire de dimension finie suivant:

$$f(\alpha) = |x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|^2 \to \inf. \tag{4}$$

L'existence et l'unicité de la solution sont ici évidentes, on peut néanmoins faire également un renvoi au théorème sur le supplémentaire orthogonal. Mais en écrivant $f(\alpha)$ sous la forme

$$f(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i \mid x_j)\, \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_0 \mid x_i)\, \alpha_i + (x_0, x_0),$$

nous voyons que le problème (4) coïncide avec le problème considéré dans le lemme 1 du sous-paragraphe précédent, si l'on remplace la matrice A_n par la matrice

$$((x_i \mid x_j) \mid i, j = 0, 1, \ldots, n) \tag{5}$$

et la matrice A_{n-1} par le mineur de la matrice (5) obtenu en éliminant la première colonne et la première ligne. Une matrice de la forme (5) est appelée *matrice de Gram* et son déterminant est le *déterminant de Gram du système de vecteurs* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$; on le note $G(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Si $\hat{\alpha}$ est la solution du problème (4), alors, en vertu de la formule (3) de 3.5.2, on a

$$G(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(\hat{\alpha})\, G(x_1, \ldots, x_n).$$

Ainsi

$$\rho(x_0, L_n) = (f(\hat{\alpha}))^{1/2} = (G(x_0, x_1, \ldots, x_n)/G(x_1, \ldots, x_n))^{1/2}. \tag{6}$$

En guise de conclusion, nous laissons au lecteur le soin de résoudre le problème de dimension infinie analogue à celui d'Apollonios (envisagé au chapitre I).

Exercice. Soit $\Lambda: X \to X$ un opérateur linéaire continu compact dans l'espace de Hilbert X. Trouvez la distance du point $\hat{x}$ à l'ellipsoïde:

$$\mathscr{E} = \{\xi \mid \xi = \Lambda y, \quad \|y\| \leqslant 1\}.$$

3.5.4. Axes principaux d'une forme quadratique. Théorème de Hilbert. Il est bien connu que toute forme quadratique $Q(x)$ dans un espace euclidien de dimension finie peut être amenée, par une transformation orthogonale des coordonnées $x = Uy$, à la forme diagonale $Q(x) = Q(Uy) = \sum \lambda_i y_2^2$. Dans ce cas, les vecteurs $x^{(i)} = Ue^{(i)}$, où $\{e^{(i)}\}$ sont les éléments de la base orthonormée standard dans les coordonnées y, sont dirigés le long des « axes principaux », i.e. sont les points stationnaires de Q sur la sphère $|x|^2 = 1$.

Sans exagérer, on peut dire que la généralisation de ce fait en dimension infinie par Hilbert fut à l'origine de la création tout d'abord de la théorie des espaces hilbertiens et ensuite de toute l'analyse fonctionnelle.

Rappelons les notions nécessaires. Soit X un espace de Hilbert réel séparable à produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. La suite $\{x_n\}$ *converge faiblement* vers x si $(y \mid x_n) \to (y \mid x)$ pour tout $y \in X$. L'opérateur linéaire continu $\Lambda: X \to X$ est appelé *auto-adjoint* si $(x \mid \Lambda y) = (\Lambda x \mid y)$ pour tous $x, y \in X$. La forme quadratique $Q(x) = (\Lambda x \mid x)$ engendrée par l'opérateur Λ est dite *faiblement continue* si $x_n \underset{\text{faibl.}}{\longrightarrow} x \Rightarrow Q(x_n) \to Q(x)$.

Enfin, l'opérateur Λ est appelé *compact* s'il applique tout ensemble borné en un ensemble précompact. Dans notre cas, ceci équivaut à l'implication $x_n \underset{\text{faibl.}}{\longrightarrow} x \Rightarrow \| \Lambda x_n - \Lambda x \| \to 0$ (c'est de cette définition que se servait Hilbert lui-même).

Théorème de Hilbert. *Pour que la forme quadratique $Q(x) = (\Lambda x \mid x)$, où Λ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint dans un espace de Hilbert séparable X, soit faiblement continue, il est nécessaire et suffisant que l'opérateur Λ soit compact.*

Dans ce cas l'espace X possède une base orthonormée e_n constituée par des vecteurs propres de l'opérateur Λ et

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n)^2.$$

Il est évident que l'assertion concernant les formes quadratiques de dimension finie, énoncée au début du présent sous-paragraphe, découle immédiatement de ce théorème, puisque dans un espace de dimension finie tout opérateur linéaire continu est compact.

Démonstration. A) Suffisance. Soit Λ un opérateur compact et $\{x_n\}$ une suite qui converge faiblement vers x. Alors, d'après le théorème de Banach-Steinhaus ([KF], p. 188), elle est bornée, i.e. il existe un nombre $C > 0$ tel que $\| x_n \| \leqslant C$, $\forall n$. Alors on a également $\| x \| \leqslant C$. L'opérateur étant compact, on a $\| \Lambda x_n - \Lambda x \| \to 0$. Finalement, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} | Q(x_n) - Q(x) | &= | (\Lambda x_n \mid x_n) - (\Lambda x \mid x) | \leqslant \\ &\leqslant | (\Lambda x_n \mid x_n) - (\Lambda x_n \mid x) | + | (\Lambda x_n \mid x) - (\Lambda x \mid x) | \leqslant \\ &\leqslant \| \Lambda x_n - \Lambda x \| \, \| x_n \| + \| \Lambda x_n - \Lambda x \| \, \| x \| \leqslant \\ &\leqslant 2C \, \| \Lambda x_n - \Lambda x \| \to 0. \end{aligned}$$

B) Construction de la base orthonormée. Supposons que la forme Q est faiblement continue. Considérons le problème d'extrémum

$$|(\Lambda x \mid x)| \to \sup, \quad (x \mid x) \leqslant 1, \quad x \in L, \tag{1}$$

où L est un espace fermé.

Lemme. *Le problème* (1) *a une solution.*

En effet, comme nous l'avons déjà mentionné dans le sous-paragraphe précédent, l'espace hilbertien X est isométriquement

isomorphe à son espace dual, et alors sa boule unité $\{x \mid (x \mid x) \leqslant 1\}$ est faiblement compacte.

D'autre part, la décomposition $X = L \oplus L^{\perp}$ démontrée dans le sous-paragraphe précédent implique l'égalité $L = \{x \mid (x \mid y) = 0, y \in L^{\perp}\} = (L^{\perp})^{\perp}$ et si $x_n \in L$ est une suite qui converge vers x faiblement, on a $(x \mid y) = \lim_{n\to\infty} (x_n \mid y) = 0$, $\forall y \in L^{\perp}$, de sorte que $x \in L$. Par conséquent, L est faiblement fermé et donc l'ensemble des éléments admissibles du problème (1) est faiblement compact. Par hypothèse, $(\Lambda x \mid x)$ est faiblement continue. Maintenant l'existence de la solution découle du théorème de Weierstrass (3.1.7).

Soit $\mathfrak{z}_1$ la solution du problème (1), où $L = X$. Supposons tout d'abord que $\mathfrak{z}_1 = 0$. Alors $(\Lambda x \mid x) \equiv 0$ et donc tout vecteur donne un extrémum au problème élémentaire $(\Lambda x \mid x) \to \inf$. En y appliquant le théorème de Fermat, nous obtenons $\Lambda x \equiv 0$, i.e. tout vecteur est un vecteur propre à valeur propre zéro et $Q(x) \equiv 0$. Dans ce cas le théorème est démontré.

Supposons que $\mathfrak{z}_1 \neq 0$ et e_1 est une solution du problème (1) avec $L = X$. Pour fixer les idées, supposons que $(\Lambda e_1 \mid e_1) < 0$; alors $e_1 \neq 0$ est la solution du problème

$$(\Lambda x \mid x) \to \inf; \quad (x \mid x) \leqslant 1. \tag{2}$$

La fonction de Lagrange de ce problème est de la forme

$$\mathscr{L}(x, \lambda_1, \lambda_0) = \lambda_0 (\Lambda x \mid x) + \lambda_1 (x \mid x)$$

et, en vertu de la règle des multiplicateurs, il existe des $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\hat{\lambda}_1 \geqslant 0$ qui ne s'annulent pas simultanément et vérifient

$$\mathscr{L}_x (e_1, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_0) = 2\lambda_0 \Lambda e_1 + 2\Lambda_1 e_1 = 0.$$

On voit facilement que ni $\hat{\lambda}_0$ ni $\hat{\lambda}_1$ ne peuvent s'annuler. En vertu de la condition de non-rigidité complémentaire, on a $| e_1 | = 1$ et, ayant désigné $\lambda_1 = -\hat{\lambda}_1/\hat{\lambda}_0$, on obtient $\Lambda e_1 = \lambda_1 e_1$, $\lambda_1 = (\Lambda e_1 \mid e_1)$, de sorte que définitivement

$$\Lambda e_1 = \lambda_1 e_1, \quad \mathfrak{z}_1 = |\lambda_1|, \quad |e_1| = 1. \tag{3}$$

Supposons maintenant que n vecteurs orthonormés $e_1, \ldots, e_n$, qui sont des vecteurs propres de l'opérateur Λ (à valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), sont déjà construits. Considérons le problème d'extrémum

$$|(\Lambda x \mid x)| \to \sup, \quad (x \mid x) \leqslant 1, \quad (x \mid e_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

D'après le lemme, ce problème possède une solution.

Désignons la valeur du problème par $\mathfrak{z}_{n+1}$. A nouveau $\mathfrak{z}_{n+1} = 0$ implique $\Lambda x = 0$ pour tous les $x \in [\mathrm{lin}\, \{e_1, \ldots, e_n\}]^{\perp}$. Dans ce

cas le théorème de Hilbert est déjà démontré:

$$\Lambda x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x \mid e_i) e_i, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x \mid e_i)^2,$$

et la première de ces égalités implique évidemment la compacité de Λ.

Soit $\mathfrak{z}_{n+1} \neq 0$ et supposons que e_{n+1} est la solution du problème (4): $\lambda_{n+1} = (\Lambda e_{n+1} \mid e_{n+1})$, $\mid \lambda_{n+1} \mid = \mathfrak{z}_{n+1}$. Alors e_{n+1} est la solution du problème

$$\frac{(\Lambda x \mid x)}{\lambda_{n+1}} \to \sup, \quad (x \mid x) \leqslant 1, \quad (x \mid e_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

et, d'après la règle des multiplicateurs de Lagrange, il existe des $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_{n+1}$, tels que $\hat{\lambda}_0 \leqslant 0$, $\hat{\lambda}_{n+1} \geqslant 0$ et

$$\lambda_{n+1}^{-1} \hat{\lambda}_0 \Lambda e_{n+1} + \hat{\lambda}_{n+1} e_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i e_i = 0, \quad \hat{\lambda}_{n+1} ((e_{n+1} \mid e_{n+1}) - 1) = 0. \tag{6}$$

Calculons le produit scalaire de la première égalité tour à tour par $e_1, \ldots, e_n$; en se servant du fait que les e_i sont orthonormés et orthogonaux à e_{n+1}, on obtient

$$\lambda_{n+1}^{-1} \hat{\lambda}_0 (\Lambda e_{n+1} \mid e_i) + \hat{\lambda}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

d'où

$$\hat{\lambda}_i = -\lambda_{n+1}^{-1} \hat{\lambda}_0 (\Lambda e_{n+1} \mid e_i) = -\lambda_{n+1}^{-1} \hat{\lambda}_0 (e_{n+1} \mid \Lambda e_i) = -\hat{\lambda}_0 \lambda_{n+1}^{-1} \lambda_i (e_{n+1} \mid e_i) = 0$$

pour $i = 1, \ldots, n$. Mais alors on a dans (6) $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, $\hat{\lambda}_{n+1} \neq 0$ et $|e_{n+1}| = 1$. Désignons $\lambda_{n+1} = -\hat{\lambda}_{n+1} / \hat{\lambda}_0 \lambda_{n+1}^{-1}$. Alors

$$\Lambda e_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1}, \quad \mid e_{n+1} \mid = 1, \quad \mid \lambda_{n+1} \mid = \\ = \mid (\Lambda e_{n+1} \mid e_{n+1}) \mid = \mathfrak{z}_{n+1}. \tag{7}$$

Ainsi, on peut continuer la construction par récurrence. En définitive, nous obtiendrons ou bien $\mathfrak{z}_N = 0$ pour un N fini, ou bien une suite $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs propres orthonormés de l'opérateur Λ. Il découle immédiatement de nos constructions que $\mid \lambda_1 \mid \geqslant \geqslant \mid \lambda_2 \mid \geqslant \ldots \geqslant \mid \lambda_n \mid \geqslant \ldots$ En effet, si l'on passe de n à $n+1$ dans (4), l'ensemble des éléments admissibles se trouve restreint, et par conséquent $\mathfrak{z}_n = \mid \lambda_n \mid \geqslant \mathfrak{z}_{n+1} = \mid \lambda_{n+1} \mid$. La suite $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mid e_n \mid = 1$, converge faiblement vers zéro et donc $\mid \lambda_n \mid = \mid (\Lambda e_n \mid e_n) \mid \to 0$, car la forme $(\Lambda x \mid x)$ est faiblement continue. Considérons le supplémentaire orthogonal $L^\perp$ au sous-espace L engendré par les vecteurs $\{e_n\}_{n \geqslant 1}$ et envisageons le problème

$$\mid (\Lambda x \mid x) \mid \to \sup, \quad \mid (x \mid x) \mid \leqslant 1, \quad x \in L^\perp. \tag{8}$$

D'après le lemme, ce problème possède une solution. Sa valeur vérifie $\mathfrak{z}_\infty \leqslant \min \mathfrak{z}_n = 0$, elle est donc nulle. Par conséquent, $\Lambda x \equiv 0$ sur $L^\perp$. En prenant une base $f_1, \ldots, f_s, \ldots$ dans l'espace $L^\perp$, nous obtenons une base constituée des vecteurs $\{e_i\}_{i\geqslant 1}$ et $\{f_j\}$. Alors, si

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k)\, e_k + \sum_j (x|f_j)\, f_j,$$

on a $\Lambda x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x|e_k)\, e_k$. Posons $\Lambda_n x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x|e_k)\, e_k$. Alors chaque opérateur Λ_n est compact et

$$\| \Lambda_n - \Lambda \| = \sup \{\| \Lambda_n x - \Lambda x \| \mid \| x \| \leqslant 1\} \leqslant \max_{k\geqslant n+1} | \lambda_k | \to 0.$$

Par conséquent, l'opérateur Λ est la limite d'une suite d'opérateurs compacts convergeant relativement à la norme, il est donc compact lui-même ([KF], p. 234).

En outre,

$$Q(x) = (\Lambda x|x) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x|e_k)\, e_k | x\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x|e_k)^2. \quad \blacksquare$$

C o r o l l a i r e. *Les vecteurs e_n et $-e_n$ sont les points stationnaires du problème d'extrémum*

$$Q(x) = (\Lambda x \mid x) \to \text{extr}, \quad (x \mid x) = 1. \tag{9}$$

Si tous les λ_n diffèrent entre eux, ce problème n'a pas d'autres points stationnaires.

D é m o n s t r a t i o n. Par définition, les points stationnaires du problème (9) sont les points où la dérivée de la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L} = \lambda_0 (\Lambda x \mid x) + \lambda_1 (x \mid x)$$

s'annule. Comme précédemment, lorsque $\hat{x}$ est un point stationnaire, on a $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ et $\Lambda\hat{x} = \lambda\hat{x}$, où $\lambda = -\hat{\lambda}_1/\hat{\lambda}_0$. Par conséquent,

$$\lambda (\hat{x}|e_n) = (\Lambda\hat{x}|e_n) = (\hat{x}|\Lambda e_n) = \lambda_n (\hat{x}|e_n),$$

donc $(\hat{x} \mid e_n) \neq 0$ seulement si $\lambda = \lambda_n$. Ceci implique immédiatement l'assertion que nous démontrons.

Pour conclure, supposons que la forme $Q(x) = (\Lambda x \mid x)$ est définie positive (tous les λ_n sont positifs) et considérons l'ellipsoïde

$$\mathscr{E} = \{x \mid (\Lambda x \mid x) = 1\} \tag{10}$$

en nous limitant pour simplifier au cas où tous les λ_n diffèrent.

Les points stationnaires $\hat{x}$ du problème

$$(x \mid x) \to \text{extr}, \quad (\Lambda x \mid x) = 1 \tag{11}$$

déterminent les directions des axes principaux de l'ellipsoïde, tandis que $\| \hat{x} \|$ détermine les longueurs de ses demi-axes. Constituant à nouveau la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x, \mu_1, \mu_0) = \mu_0 (x \mid x) + \mu_1 (\Lambda x \mid x),$$

nous trouvons $\hat{\mu}_0 \hat{x} + \hat{\mu}_1 \Lambda \hat{x} = 0$, d'où, comme précédemment, $\Lambda\hat{x} = \lambda\hat{x}$. Ainsi les directions des axes principaux de l'ellipsoïde (10) se déterminent par les vecteurs propres de l'opérateur Λ: $\hat{x}^{(n)} = \|\hat{x}^{(n)}\| e_n$, $n = 1, 2, \ldots$, et les demi-axes $\|\hat{x}^{(n)}\|$ sont égaux à $\lambda_n^{-1/2}$.

Exercice. Soit Λ un opérateur compact auto-adjoint. Disposons ses valeurs propres positives et négatives par ordre de décroissance de leurs valeurs absolues:

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n^+ \geqslant \ldots > 0, \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^- \leqslant \ldots < 0$$

et soient e_n^+, e_n^- les vecteurs propres correspondants de l'opérateur Λ. Notons $S_n^+ (h_1, \ldots, h_{n-1})$, $S_n^- (h_1, \ldots, h_{n-1})$ les valeurs des problèmes d'extrémum

$$Q(x) = (\Lambda x \mid x) \to \sup\,(\inf); \quad (x \mid h_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Démontrez que l'on a alors

$$\lambda_n^+ = \min_{\{h_1, \ldots, h_{n-1}\}} S_n^+ (h_1, \ldots, h_{n-1}) \quad \Big(\lambda_n^- = \max_{\{h_1, \ldots, h_{n-1}\}} S_n^- (h_1, \ldots, h_{n-1})\Big),$$

ce qui est atteint lorsque $h_k = e_k^+$ $(h_k = e_k^-)$.

3.5.5. Formes quadratiques de Legendre. Dans ce sous-paragraphe nous continuons l'étude des propriétés extrémales des formes quadratiques dans un espace de Hilbert et nous démontrerons le théorème de Hestenes, qui joue un rôle important dans le calcul des variations classique.

Définition. La forme quadratique Q dans un espace de Hilbert X est dite *forme de Legendre* si elle est faiblement semi-continue inférieurement et si la convergence faible de x_n vers x et la convergence de $Q(x_n)$ vers $Q(x)$ impliquent ensemble la convergence forte de x_n vers x.

La dimension maximale des sous-espaces L sur lesquels la forme quadratique Q est définie négative, i.e. $Q(x) < 0$ pour tout $x \in L$, s'appelle *indice* de cette forme; on le note ind Q.

Théorème de Hestenes. *Toute forme quadratique de Legendre a un indice fini.*

Démonstration. Considérons à nouveau le problème d'extrémum

$$(\Lambda x \mid x) = Q(x) \to \inf, \quad (x \mid x) \leqslant 1. \tag{1}$$

L'existence dans le problème (1) est garantie, comme précédemment, par le théorème de Weierstrass (3.1.7) : la boule $\{x \mid (x \mid x) \leqslant \leqslant 1\}$ est faiblement compacte, tandis que Q est faiblement semi-continue inférieurement par hypothèse. Si la valeur du problème (1) est nulle, alors $Q(x) \geqslant 0$, $\forall x$, l'indice de Q s'annule et le théorème est démontré. Supposons que la valeur du problème (1) est négative. Alors, comme dans le sous-paragraphe précédent (problème (2)), la solution e_1 du problème (1) est un vecteur propre

$$\Lambda e_1 = \lambda_1 e_1, \quad |e_1| = 1, \quad \lambda_1 < 0.$$

Nous allons à nouveau construire par récurrence un système orthonormé en trouvant successivement la solution des problèmes d'extrémum

$$(\Lambda x \mid x) = Q(x) \to \inf, \quad (x \mid x) \leqslant 1, \quad (x \mid e_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

et en obtenant ainsi des vecteurs propres

$$\Lambda e_i = \lambda_i e_i, \quad (e_i \mid e_i) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant 0. \qquad (3)$$

Montrons que notre construction se terminera en un nombre fini d'étapes ; le problème d'extrémum (2) n'aura plus de solutions non nulles. En effet, supposons que la suite $\{e_i \mid i \geqslant 1\}$ est infinie. Alors elle converge faiblement vers zéro. Puisque Q est semi-continue inférieurement et $\{\lambda_i\}$ est monotone, on a

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \varliminf_{n\to\infty} \lambda_n = \varliminf (\Lambda e_n | e_n) = \varliminf_{n\to\infty} Q(e_n) \geqslant Q(0) = 0.$$

Mais $\lambda_n \leqslant 0$ et, par conséquent, $\lim \lambda_n = 0$. Donc $\{e_n\}$ converge faiblement vers zéro et l'on a $Q(e_n) = (\Lambda e_n \mid e_n) = \lambda_n \to 0$. D'après la condition de Legendre, $\| e_n \|$ doit tendre vers zéro, ce qui est faux, car $\| e_n \| = 1$. Cette contradiction montre qu'après un nombre fini N d'étapes notre construction se terminera. Sur le supplémentaire orthogonal $L_N^\perp = (\text{lin}\,\{e_1, \ldots, e_N\})^\perp$ la forme doit être non négative.

Supposons que la forme Q est définie négative sur un certain sous-espace L et soit $\{f_n\}$ une base de L (infinie si $\dim L = \infty$). D'après le théorème sur le complémentaire orthogonal (voir 3.5.3), on a $f_n = g_n + h_n$, où $g_n \in L_N$, $h_n \in L_N^\perp$. Si $\dim L$, i. e. le nombre de vecteurs de la base $\{f_n\}$, est supérieur à $N = \dim L_N$, alors les vecteurs $g_1, \ldots, g_{N+1}$ sont linéairement dépendants, i. e. $\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n g_n = 0$, où tous les α_n ne sont pas nuls. Mais alors

$\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n f_n = \sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n h_n \in L_N^\perp$, donc $Q\left(\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n f_n\right) \geqslant 0$, d'où $\sum_{n=1}^{N+1} \alpha_n f_n = 0$, puisque la forme $Q|_L$ est définie négative. La dernière égalité est impossible, puisque $\{f_n\}$ est une base et, par conséquent, $\dim L \leqslant N$. Par définition de l'indice, on a ind $Q \leqslant N$. D'autre part, la forme Q est négative sur L_N, donc

$$x \in L_N \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{N} (x|e_i)\, e_i \Rightarrow Q(x) = (\Lambda x|x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i|e_i)^2 < 0$$

pour $x \neq 0$. Par conséquent, ind $Q \geqslant N$, i.e. ind $Q = N$. ■

CHAPITRE IV

PRINCIPE DE LAGRANGE DANS LES PROBLÈMES DU CALCUL DES VARIATIONS CLASSIQUE ET DE COMMANDE OPTIMALE

Le contenu de ce chapitre est résumé par son titre. Nous prêtons une attention particulière, d'une part, à l'analogie entre les deux variantes de la théorie, analogie que nous soulignons en unifiant les notations, et, d'autre part, à la clarification des différences qui existent entre les problèmes classiques et contemporains. Nous envisageons d'abord les conditions nécessaires dans le problème que nous appelons *problème de Lagrange* et auquel on peut réduire de nombreux problèmes du calcul des variations classique. Ensuite, nous démontrons le principe du maximum de Pontriaguine, qui est une des méthodes les plus importantes pour les problèmes actuels de commande optimale. Le reste du chapitre est consacré à des classes spéciales de problèmes et à certaines conséquences de la théorie générale. Les conditions suffisantes d'extrémum sont envisagées en moins de détail: nous nous limitons seulement à des situations particulières.

§ 4.1. Principe de Lagrange pour le problème de Lagrange

4.1.1. Position du problème et énoncé du théorème. Fixons un intervalle fermé $\Delta = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ et envisageons l'espace de Banach

$$\Xi = C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times C(\Delta, \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

constitué par les éléments $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$.

Dans cet espace, considérons le problème

$$\mathscr{B}_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\,dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x(t), u(t)), \qquad (2)$$

$$\mathscr{B}_i(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_2} f_i(t, x(t), u(t))\,dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leqslant 0. \qquad (3)$$

Dans (1)-(3), on a

$$f_i: V \to \mathbf{R}, \quad \psi_i: W \to \mathbf{R}, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \quad \varphi: V \to \mathbf{R}^n,$$

où V et W sont des ouverts dans les espaces $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ et $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ respectivement. Toutes les fonctions considérées ci-dessus sont supposées au moins continues. Le symbole $\lesseqgtr$ a la même signification que dans le § 3.2.

Le problème (1)-(3) sera appelé *problème de Lagrange sous forme de Pontriaguine.* Des cas particuliers de ce problème ont été discutés dans les §§ 1.4, 1.5 et 3.1. Des fonctionnelles du même type que $\mathscr{B}_i$, contenant une partie intégrale aussi bien qu'une partie terminale, ont été appelées fonctionnelles de Boltz (voir 1.4.2 et 3.1.3). Lorsque la partie terminale dans la contrainte $\mathscr{B}_i \gtrless 0$ est une constante, i.e. cette contrainte prend la forme $\int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u)\, dt \gtrless a_i$, nous dirons, en suivant Euler, que cette contrainte est *isopérimétrique.* Si, par contre, le terme intégral est absent, la contrainte $\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \gtrless 0$ est appelée *condition aux limites.*

La contrainte (2) est appelée *relation différentielle.* Une telle forme de la relation différentielle, résolue relativement à $\dot{x}$, est un trait caractéristique de la forme de Pontriaguine du problème. Lagrange posait la contrainte différentielle en écrivant l'équation $\psi(t, x, \dot{x}) = 0$ (brièvement, ceci était mentionné dans 1.5.1).

Enfin, contrairement au chapitre I, l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ dans le problème (1)-(3) n'est pas supposé fixe.

Nous appellerons le quadruplet $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \in \Xi$ *processus de commande* pour le problème (1)-(3), si $t_0, t_1 \in \operatorname{int} \Delta$, $(t, x(t), u(t)) \in V$ pour $t \in \Delta$ et la relation différentielle est satisfaite sur $[t_0, t_1]$ tout entier, i.e. $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$, et *processus de commande admissible* si ce quadruplet est un processus de commande et en outre les conditions (3) sont vérifiées.

Le quadruplet $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ est le *processus optimal dans le sens faible*, ou *extrémum faible* pour le problème (1)-(3), si c'est un extrémum local dans l'espace Ξ, i.e. il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout processus de commande admissible ξ vérifiant la condition $\|\xi - \hat{\xi}\|_\Xi < \varepsilon$ on a une des deux inégalités $\mathscr{B}_0(\xi) \geqslant \mathscr{B}_0(\hat{\xi})$ (dans le cas du minimum) ou $\mathscr{B}_0(\xi) \leqslant \mathscr{B}_0(\hat{\xi})$ (dans le cas du maximum).

On appelle *fonction de Lagrange* de ce problème la fonction

$$\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1; p(\cdot), \lambda, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + l, \qquad (4)$$

où

$$\lambda_0 \in \mathbf{R}, \quad p(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^{n*}), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m*}$$

sont les *multiplicateurs de Lagrange*,

$$L(t, x, \dot{x}, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u)) \qquad (5)$$

est le *lagrangien* ou la *partie intégrale*, et

$$l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1) \qquad (6)$$

est la *partie terminale*.

Par la suite dans ce paragraphe et dans ce qui suit, nous nous servirons à nouveau des abréviations suivantes

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)),$$

$$\hat{L}_x(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)),$$

$$\hat{L}_u(t) = L_u(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)),$$

$$\hat{l}_{x_k} = l_{x_k}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)),$$

$$\mathscr{L}_{t_k} = \mathscr{L}_{t_k}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1; \hat{p}(\cdot), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0), \text{ etc.}$$

Théorème d'Euler-Lagrange. *Supposons que les fonctions $f_i: V \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $\varphi: V \to \mathbf{R}^n$ et leurs dérivées partielles relativement à x et u sont continues dans l'ouvert V de l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$, tandis que les fonctions $\psi_i: W \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ sont continûment différentiables dans l'ouvert W de l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$; supposons en outre que $\hat{x}(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $\hat{u}(\cdot) \in C(\Delta, \mathbf{R}^r)$, $\hat{t}_0, \hat{t}_1 \in \operatorname{int} \Delta$ vérifient*

$$(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \in V, \quad t \in \Delta, \quad (\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) \in W.$$

Si $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ est un processus optimal dans le sens faible pour le problème (1)-(3), *alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$ (dans le cas du problème du minimum) ou $\hat{\lambda}_0 \leqslant 0$ (dans le cas du problème du maximum) et $\hat{p}(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^{n*})$, $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$ qui ne s'annulent pas simultanément et vérifient les conditions suivantes:*

a) *la fonction de Lagrange est stationnaire relativement à* $x(\cdot)$ $(\hat{\mathscr{L}}_{x(\cdot)}=0)$:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)\equiv 0, \tag{7}$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k)=(-1)^k\hat{l}_{x_k}, \quad k=0,\ 1; \tag{8}$$

relativement à $u(\cdot)$ $(\hat{\mathscr{L}}_{u(\cdot)}=0)$:

$$\hat{L}_u(t)\equiv 0; \tag{9}$$

relativement à t_k:

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_k}=0, \quad k=0,\ 1; \tag{10}$$

b) *on a la condition de concordance des signes*:

$$\hat{\lambda}_i \gtrless 0, \quad i=1,\ \ldots,\ m; \tag{11}$$

c) *les conditions de non-rigidité complémentaire sont vérifiées*

$$\hat{\lambda}_i\mathscr{B}_i(\hat{\xi})=0, \quad i=1,\ \ldots,\ m. \tag{12}$$

De même que dans les §§ 3.1, 3.2, les inégalités (11) signifient que $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$ si l'on a $\mathscr{B}_i(\xi)\leqslant 0$, $\hat{\lambda}_i\leqslant 0$ dans la condition (3), $\hat{\lambda}_i\leqslant 0$ si l'on a $\mathscr{B}_i(\xi)\geqslant 0$ dans la condition (3) et $\hat{\lambda}_i$ est de signe arbitraire si $\mathscr{B}_i(\xi)=0$.

L'assertion de l'existence des multiplicateurs de Lagrange vérifiant l'ensemble des conditions a) à c) est brièvement appelée *principe de Lagrange pour le problème de Lagrange* (1)-(3).

Montrons que le théorème est tout à fait conforme au principe général de Lagrange dont nous avons parlé au chapitre I et dans 3.1.5. En effet, la fonction de Lagrange $\mathscr{L}$ est une fonction des trois variables $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ et $(t_0,\ t_1)$. Ainsi, en vertu du principe général de Lagrange, il faut considérer trois problèmes:

$$(\alpha)\quad \mathscr{L}(x(\cdot),\ \hat{u}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1;\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\lambda},\ \hat{\lambda}_0)\to \text{extr},$$

$$(\beta)\quad \mathscr{L}(\hat{x}(\cdot),\ u(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1;\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\lambda},\ \hat{\lambda}_0)\to \text{extr},$$

$$(\gamma)\quad \mathscr{L}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1;\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\lambda},\ \hat{\lambda}_0)\to \text{extr}.$$

Le problème (α) est le problème élémentaire de Boltz et les conditions de stationnarité (7) et (8) sont écrites conformément à 1.4.2 et au théorème de 3.1.3. Le problème (β) est également un problème de Boltz, mais il est dégénéré puisque $\dot{u}$ n'apparaît pas dans le lagrangien et $u(t_0)$, $u(t_1)$ n'apparaissent pas dans la partie terminale. L'équation d'Euler-Lagrange se transforme donc en (9), tandis que la condition de transversalité perd sa signification: $0=0$. Enfin, (γ) est le problème élémentaire, tandis que (10) est tout simplement le théorème de Fermat (voir 1.3.1 et 3.1.1).

La condition de non-rigidité complémentaire et celle de concordance des signes sont également écrites, comme nous le savons, conformément au principe général de Lagrange, appliqué aux contraintes du genre inégalités (voir 3.1.5).

Ainsi le théorème principal du présent paragraphe peut être énoncé de la manière suivante : *si les fonctions qui apparaissent dans la position du problème sont suffisamment lisses, alors on a le principe de Lagrange pour l'extrémum local.*

On peut écrire la condition de stationnarité en plus de détails. En vertu de (5) nous obtenons :

à partir de (7)

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -\hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_x(t) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{ix}(t) \tag{7a}$$

(on appelle parfois (7a) *équation duale*) ;

à partir de (9)

$$0 = -\hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_u(t) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{iu}(t); \tag{9a}$$

à partir de (8)

$$\hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_k}, \quad k = 0,\ 1; \tag{8a}$$

enfin, à partir de (10)

$$0 = (-1)^{k-1} \hat{L}(\hat{t}_k) + \hat{l}_{t_k} + \hat{l}_{x_k} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_k) =$$

$$= (-1)^{k-1} \left[\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \hat{p}(\hat{t}_k)\left(\dot{\hat{x}}(\hat{t}_k) - \hat{\varphi}(\hat{t}_k)\right)\right] +$$

$$+ \hat{l}_{t_k} + (-1)^k \hat{p}(\hat{t}_k)\,\dot{\hat{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^{k-1}\left[\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) - \hat{p}(\hat{t}_k)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_k)\right] + \hat{l}_{t_k}$$

ou

$$\hat{p}(\hat{t}_k)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_k) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) = (-1)^{k-1} \hat{l}_{t_k}. \tag{10a}$$

La fonction

$$H(t, x, p, u) = L_{\dot{x}}\dot{x} - L = p\varphi(t, x, u) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, x, u) \tag{13}$$

sera appelée *fonction de Pontriaguine* du problème considéré. En s'en servant, on peut récrire les équations (7a) à (10a) et l'équation (2) sous la forme suivante

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{H}_p, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\hat{H}_x, \quad \hat{H}_u = 0 \tag{14}$$

et

$$\hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_k}, \quad \hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k-1} \hat{l}_{t_k}, \quad k = 0,\ 1. \tag{15}$$

R e m a r q u e. On appelle parfois la fonction (13) fonction de Hamilton. Nous donnons une autre signification, plus naturelle du point de vue de la mécanique classique, au terme « fonction de Hamilton », dont nous nous servons quand il s'agit de la fonction

$$\mathscr{H}(t, x, p) = H(t, x, p, u(t, x, p)), \tag{16}$$

où $u(t, x, p)$ est la fonction implicite déterminée par l'équation $H_u(t, x, p, u) = 0$. Lorsqu'on a les hypothèses standards du théorème des fonctions implicites, les équations (14) prennent la forme usuelle du système canonique hamiltonien:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{\mathscr{H}}_p, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\hat{\mathscr{H}}_x. \tag{17}$$

Il est utile de remarquer que l'ensemble des hypothèses du théorème énoncé est complet dans un certain sens. En effet, pour déterminer les fonctions inconnues $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$, nous avons un système constitué des équations différentielles (2) et (7a) et de l'équation finie (9a). En exprimant à partir de cette dernière (si c'est possible, comme dans le cas où les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont remplies) la fonction $u(\cdot)$ en termes de $x(\cdot)$ et $p(\cdot)$, nous obtenons un système de $2n$ équations différentielles scalaires (équivalent au système (17)). Sa solution générale dépend de $2n$ constantes arbitraires ainsi que des multiplicateurs de Lagrange λ_i, parmi lesquels m sont indépendants. En y ajoutant encore t_0 et t_1, nous obtenons en tout $2n + m + 2$ inconnues. Pour les déterminer, nous avons $2n + 2$ conditions de transversalité (15) et m conditions de non-rigidité complémentaire (12).

Ainsi, le nombre des inconnues coïncide avec le nombre des équations. C'est cela que nous avions en vue en affirmant que l'ensemble des hypothèses est complet. Il va de soi que la résolubilité du système obtenu n'est aucunement garantie par ce fait.

4.1.2. Réduction du problème de Lagrange au problème différentiable. Désignons par Y l'espace $C(\Delta, \mathbf{R}^n)$ et écrivons le problème (1)-(3) de 4.1.1 sous la forme

$$\mathscr{B}_0(\xi) \to \text{extr}; \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \mathscr{B}_i(\xi) \leqslant 0, \ i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

où

$$\Phi(\xi)(t) = \dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)). \tag{2}$$

L'application Φ et les fonctionnelles $\mathscr{B}_i$ sont définies dans le domaine

$$\mathscr{V} = \{(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \mid (t, x(t), u(t)) \in V, \quad t \in \Delta;$$
$$t_0, t_1 \in \operatorname{int} \Delta, \ (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \in W\}$$

de l'espace Ξ.

Le problème (1) est de la même forme que le problème de 3.2.1 du chapitre précédent; le principe de Lagrange a été déjà démontré pour ce problème. Les hypothèses du théorème correspondant se divisent en trois groupes: les espaces principaux sont des *espaces de Banach*, les applications sont *différentiables*, et l'image de l'application de dimension infinie est *fermée*. Vérifions que toutes ces hypothèses sont vérifiées pour le problème (1).

Le fait que les espaces Ξ et Y sont des espaces de Banach est évident: les espaces C^1 et C sont les principaux exemples d'espaces de Banach que nous avons envisagés (voir 2.1.1 et 2.1.2).

La différentiabilité (ou plus précisément la différentiabilité continue selon Fréchet) des fonctionnelles $\mathscr{B}_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, découle des résultats du § 2.4.

En effet, on peut étudier la partie intégrale de la même manière que dans la proposition 2 de 2.4.2, en remplaçant partout $\dot{x}(\cdot)$ par $u(\cdot)$, tandis que la différentiabilité de la partie terminale est démontrée dans 2.4.3 (c'est l'opérateur des conditions aux limites). Alors, en vertu des formules (9) de 2.4.2 et (3) de 2.4.3, nous avons pour $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)$, $\eta = (h(\cdot),\ v(\cdot),\ \tau_0,\ \tau_1)$ la relation

$$\mathscr{B}_i'(\hat{\xi})[\eta] = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{f}_{ix}(t)\,h(t) + \hat{f}_{iu}(t)\,v(t))\,dt + \hat{f}_i(\hat{t}_1)\,\tau_1 - \hat{f}_i(\hat{t}_0)\,\tau_0 + \\ + \hat{l}_{t_0}\tau_0 + \hat{l}_{t_1}\tau_1 + \hat{l}_{x_0}h(\tau_0) + \hat{l}_{x_1}h(\hat{t}_1) + \hat{l}_{x_0}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)\,\tau_0 + \hat{l}_{x_1}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)\,\tau_1 \qquad (3)$$

(comparer au lemme de 3.1.3).

L'application (2) est également continûment différentiable selon Fréchet (voir proposition 3 de 2.4.1). Sa dérivée, en vertu de (14), 2.4.1, est de la forme

$$\Phi'(\hat{\xi})[\eta](t) = \dot{h}(t) - \hat{\varphi}_x(t)\,h(t) - \hat{\varphi}_u(t)\,v(t). \qquad (4)$$

Il découle de la différentiabilité continue selon Fréchet des fonctionnelles $\mathscr{B}_i$ et de l'application Φ qu'elles sont strictement différentiables, ce qui est nécessaire dans le théorème sur le principe de Lagrange.

Le fait que l'image de l'application Φ est fermée découle de la régularité de cette dernière: l'image $\Phi'(\hat{\xi})\,\Xi$ coïncide avec Y. En effet, si l'on prend arbitrairement $y(\cdot) \in Y = C(\Delta, \mathbf{R}^n)$, on peut poser $v(\cdot) = 0$, $\tau_0 = \tau_1 = 0$. L'équation

$$\Phi'(\hat{\xi})[h(\cdot),\ 0,\ 0,\ 0](\cdot) = y(\cdot)$$

est équivalente à l'équation différentielle linéaire $\dot{h}(t) - \hat{\varphi}_x(t)\,h(t) = y(t)$ à coefficients continus qui possède une solution $h(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$ en vertu du théorème d'existence pour les systèmes linéaires (voir 2.5.4). Ainsi, toutes les hypothèses du théorème de 3.2.1 sont vérifiées.

Pour préciser, nous supposerons que (1) est un problème de minimum. Conformément au principe de Lagrange, si $\hat{\xi}=(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ est une minimale locale de (1), il existe des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{m*}$ et un élément $\hat{y}^* \in Y^* = (C(\Delta, \mathbf{R}^n))^*$ tels que pour la fonction de Lagrange

$$\tilde{\mathscr{L}}(\xi;\ y^*, \lambda, \lambda_0) = \tilde{\mathscr{L}}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1;\ y^*, \lambda, \lambda_0) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) \right) dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) + y^* \circ \Phi \qquad (5)$$

on a les conditions de concordance des signes, de non-rigidité complémentaire et de stationnarité

$$\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_\xi = 0 \Leftrightarrow \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x(\cdot)} = 0, \quad \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{u(\cdot)} = 0, \quad \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{t_k} = 0, \quad k = 0, 1.$$

Les trois relations qui constituent la deuxième partie de cette implication, seront appelées par la suite *stationnarité* relativement à $x(\cdot)$, à $u(\cdot)$ et à t_k respectivement.

Nous remarquons toutefois que la fonction (5) n'est pas identique à la fonction de Lagrange (4) de 4.1.1. En nous servant du théorème de Riesz sur la forme générale d'une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $C(\Delta, \mathbf{R}^n)$ (2.1.9), nous pouvons seulement affirmer que

$$\langle y^*, \eta(\cdot) \rangle = \int_\Delta d\nu(t)\, \eta(t),$$

où $\nu(t) = (\nu_1(t), \ldots, \nu_n(t))$ est un vecteur ligne constitué de fonctions canoniques de variation bornée. En substituant cette expression dans (5), nous obtenons, compte tenu des notations (6) de 4.1.1:

$$\tilde{\mathscr{L}} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x(t), u(t)) \right) dt +$$
$$+ \int_\Delta d\nu(t) \{\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t))\} + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)). \qquad (6)$$

En comparant cette formule avec (4) à (6) de 4.1.1, nous voyons que la fonction de Lagrange $\mathscr{L}$ s'obtient de la fonction $\tilde{\mathscr{L}}$ si la fonction $\nu(\cdot)$ est absolument continue et sa dérivée s'annule en dehors de $[t_0, t_1]$ et coïncide avec $p(\cdot)$ sur ce segment. Cette situation nous rappelle le sous-paragraphe 1.4.1. De même que le lemme de Dubois-Raymond nous a permis de déduire l'équation d'Euler sans hypothèse préalable concernant la différentiabilité de la fonction $t \mapsto p(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(x)$, une généralisation appropriée de ce lemme nous permettra de démontrer maintenant la continuité absolue de la fonction $\nu(\cdot)$.

4.1.3. Lemme de Dubois-Raymond généralisé. *Supposons que sur l'intervalle fermé* $[\alpha, \beta]$ *la fonction vectorielle* $a(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^{n*}$ *est intégrable selon Lebesgue, la fonction matricielle* $b(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *est continue, tandis que* $\nu(\cdot): [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^{n*}$ *est une fonction vectorielle canonique de variation bornée;* t_k *sont des points distincts de l'intervalle* (α, β), $c_k \in \mathbf{R}^{n*}$, $k = 0, 1, \ldots, p$.

Si, pour tous les $h(\cdot) \in C^1([\alpha, \beta], \mathbf{R}^n)$, *on a l'égalité*

$$\int_\alpha^\beta a(t)\, h(t)\, dt + \int_\alpha^\beta d\nu(t) \{\dot{h}(t) - b(t)\, h(t)\} + \sum_{k=0}^{p} c_k h(t_k) = 0, \tag{1}$$

alors la fonction $\nu(\cdot)$ *est absolument continue; sa dérivée* $p(\cdot)$ *est continue sur* $[\alpha, \beta]$, *sauf peut-être aux points* t_k *où elle possède des limites à gauche et à droite, elle est absolument continue dans tout intervalle qui ne contient pas les points* t_k *et l'on a*

$$\dot{p}(t) = a(t) - p(t)\, b(t) \text{ presque partout}, \tag{2}$$

$$p(\alpha) = p(\beta) = 0, \tag{3}$$

$$p(t_k + 0) - p(t_k - 0) = c_k. \tag{4}$$

Démonstration. En posant $h(t) = \gamma + \int_\alpha^t \eta(s)\, ds$, on obtient de (1)

$$\left\{ \int_\alpha^\beta a(t)\, dt - \int_\alpha^\beta d\nu(t)\, b(t) + \sum_{k=0}^{p} c_k \right\} \gamma + \int_\alpha^\beta a(t) \int_\alpha^t \eta(s)\, ds\, dt +$$
$$+ \int_\alpha^\beta d\nu(t)\, \eta(t) - \int_\alpha^\beta d\nu(t)\, b(t) \int_\alpha^t \eta(s)\, ds + \sum_{k=0}^{p} c_k \int_\alpha^{t_k} \eta(s)\, ds = 0.$$

Puisque $\gamma \in \mathbf{R}^n$ et les fonctions $\eta(\cdot) \in C([\alpha, \beta], \mathbf{R}^n)$ peuvent être choisies arbitrairement et indépendamment l'une de l'autre, on a premièrement

$$\int_\alpha^\beta a(t)\, dt - \int_\alpha^\beta d\nu(t)\, b(t) + \sum_{k=0}^{p} c_k = 0 \tag{5}$$

(car on peut poser $\eta(\cdot) = 0$, γ arbitraire) et, deuxièmement, pour tout $\eta(\cdot) \in C([\alpha, \beta], \mathbf{R}^n)$ on a l'égalité

$$\int_\alpha^\beta a(t) \int_\alpha^t \eta(s)\, ds\, dt + \int_\alpha^\beta d\nu(t)\, \eta(t) -$$
$$- \int_\alpha^\beta d\nu(t)\, b(t) \int_\alpha^t \eta(s)\, ds + \sum_{k=0}^{p} c_k \int_\alpha^{t_k} \eta(s)\, ds = 0. \tag{6}$$

En changeant l'ordre d'intégration dans les premier et troisième termes à l'aide de la formule de Dirichlet (voir (5) dans 2.1.9), en désignant par la lettre s la variable d'intégration dans le deuxième terme, en posant

$$\chi_{[\alpha,\,t]}(s)=\begin{cases}1, & \alpha\leqslant s\leqslant t,\\ 0, & t<s\leqslant\beta,\end{cases} \tag{7}$$

et en utilisant l'égalité

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,d\mu(t)=\int_\alpha^\beta f(t)\,\mu'(t)\,dt, \tag{8}$$

valable pour toutes les fonctions absolument continues ([KF], p. 337), écrivons (6) sous la forme

$$\int_\alpha^\beta\Big(\int_s^\beta a(t)\,dt\Big)\eta(s)\,ds+\int_\alpha^\beta d\nu(s)\,\eta(s)-\int_\alpha^\beta\Big(\int_s^\beta d\nu(t)\,b(t)\Big)\eta(s)\,ds+$$
$$+\int_\alpha^\beta\sum_{k=0}^p c_k\chi_{[\alpha,\,t_k]}(s)\,\eta(s)\,ds=\int_\alpha^\beta d\Lambda(s)\,\eta(s)+\int_\alpha^\beta d\nu(s)\,\eta(s)=0, \tag{9}$$

où

$$\Lambda(s)=\int_\alpha^s\Big\{\int_\sigma^\beta a(t)\,dt-\int_\sigma^\beta d\nu(t)\,b(t)+\sum_{k=0}^p c_k\chi_{[\alpha,\,t_k]}(\sigma)\Big\}\,d\sigma.$$

La fonction $\Lambda(\cdot)$ est absolument continue sur $[\alpha, \beta]$ et $\Lambda(\alpha)=0$, c'est donc la fonction canonique, d'autre part, $\nu(\cdot)$ étant une fonction canonique de variation bornée, il découle de (9) et de la propriété d'unicité dans le théorème de Riesz (voir 2.1.9) que $\Lambda(s)+\nu(s)\equiv 0$. Ainsi $\nu(\cdot)$ est absolument continue et sa dérivée $p(s)=\nu'(s)$ pour $s\neq t_k$ s'écrit (nous nous servons à nouveau de (8)) :

$$p(s)=\nu'(s)=-\Lambda'(s)=$$
$$=-\int_s^\beta a(t)\,dt+\int_s^\beta p(t)\,b(t)\,dt-\sum_{k=0}^p c_k\chi_{[\alpha,\,t_k]}(s).$$

Cette formule montre à son tour que $p(\cdot)$ est continue partout sauf aux points t_k, où l'on a (4) ; en outre, (2) est vérifiée. L'égalité $p(\beta)=0$ est évidente, tandis que l'égalité $p(\alpha)=0$ est équivalente à (5), de sorte que (3) est démontré. ■

4.1.4. Déduction des conditions de stationnarité. Ainsi, nous avons montré que si $\hat{\xi}$ fournit un minimum local au problème (1)-(3) de 4.1.1, alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $\hat{\lambda}_0\geqslant 0$,

$\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{m*}$ et $\hat{y}^* \in C(\Delta, \mathbf{R}^n)^*$ tels que l'on a les conditions de concordance des signes et de non-rigidité complémentaire pour λ et la condition de stationnarité

$$\text{a)}\quad \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x(\cdot)}=0,\quad \text{b)}\ \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{u(\cdot)}=0,\quad \text{c)}\ \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{t_k}=0,\ k=0,\ 1, \tag{1}$$

où $\tilde{\mathscr{L}}$ est défini par l'égalité (6) de 4.1.2 et $\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x(\cdot)}$, $\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{u(\cdot)}$ et $\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{t_k}$ s'obtiennent de $\tilde{\mathscr{L}}_{x(\cdot)}$, $\tilde{\mathscr{L}}_{u(\cdot)}$, $\tilde{\mathscr{L}}_{t_k}$ en substituant $x(\cdot)=\hat{x}(\cdot)$, $u(\cdot)=\hat{u}(\cdot)$, $t_k=\hat{t}_k$, $k=0,\ 1$.

Passons au déchiffrage des conditions (1). En calculant la dérivée de la fonction $\tilde{\mathscr{L}}$, nous prenons en considération le fait que le premier et le troisième termes de la formule (6) de 4.1.2 constituent une fonctionnelle de Boltz dont la dérivée est donnée par la formule (3) du même sous-paragraphe, tandis que le deuxième terme est la composée de l'opérateur de relation différentielle et de l'application linéaire $\eta(\cdot) \mapsto \int\limits_{\Delta} d\nu(t)\,\eta(t)$; sa dérivée s'obtient donc en prenant l'intégrale des formules (4) de 4.1.2 relativement à $d\nu(t)$.

A) Stationnarité par rapport à $x(\cdot)$. En prenant la dérivée de $\tilde{\mathscr{L}}$ relativement à $x(\cdot)$, nous obtenons en vertu de (1a), pour tous les $h(\cdot) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, l'égalité

$$0=\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x(\cdot)}[h(\cdot)]=\int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\sum_{i=0}^{m}\hat{\lambda}_i\hat{f}_{ix}(t)\,h(t)\,dt+ \\ +\int\limits_{\Delta} d\nu(t)\,\{\dot{h}(t)-\hat{\varphi}_x(t)\,h(t)\}+\hat{l}_{x_0}h(\hat{t}_0)+\hat{l}_{x_1}h(\hat{t}_1). \tag{2}$$

Voyons d'abord le cas $\hat{t}_1>\hat{t}_0$. D'après le lemme généralisé de Dubois-Raymond, (2) implique que la fonction $\hat{\nu}(\cdot)$ est absolument continue sur Δ et que sa dérivée $p(\cdot)=\hat{\nu}'(\cdot)$ est continue sur Δ partout, sauf éventuellement aux points $\hat{t}_0$ et $\hat{t}_1$, où elle possède des limites à droite et à gauche et les relations (2) à (4) de 4.1.3 sont vérifiées, ce qui dans notre situation signifie que

$$dp/dt=-p(t)\,\hat{\varphi}_x(t)+\chi_{[\hat{t}_0,\,\hat{t}_1]}(t)\sum_{i=0}^{m}\hat{\lambda}_i\hat{f}_{ix}(t) \tag{3}$$

pour $t \neq \hat{t}_0, \hat{t}_1$, $p(\alpha)=p(\beta)=0$, α et β étant les extrémités de Δ, et que

$$p(\hat{t}_0+0)-p(\hat{t}_0-0)=\hat{l}_{x_0},\quad p(\hat{t}_1+0)-p(\hat{t}_1-0)=\hat{l}_{x_1} \tag{4}$$

(ici $\chi_{[\hat{t}_0,\,\hat{t}_1]}$ est la fonction caractéristique, égale à 1 sur $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ et à 0 en dehors de ce segment). Il découle de l'équation (3) que

$p(\cdot)$ vérifie l'équation différentielle linéaire homogène sur les semi-intervalles $[\alpha, \hat{t}_0)$ et $(\hat{t}_1, \beta]$. Puisqu'elle s'annule aux extrémités α et β de ces semi-intervalles, le théorème d'unicité de 2.5.3 nous donne $p(t) \equiv 0$ sur $\Delta \setminus [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ et $p(\hat{t}_0 - 0) = p(\hat{t}_1 + 0) = 0$.

Désignons maintenant par $\hat{p}(\cdot)$ la solution de l'équation (7a) de 4.1.1 qui coïncide sur l'intervalle $(\hat{t}_0, \hat{t}_1)$ avec $p(\cdot)$ (dans cet intervalle les équations (7a) de 4.1.1 et (3) sont identiques). Puisque (7a) est linéaire, la solution $\hat{p}(\cdot)$ est définie sur l'intervalle Δ tout entier et appartient à $C^1(\Delta, \mathbf{R}^{n*})$ (voir 2.5.4). Pour cette solution, on a $\hat{p}(\hat{t}_0) = p(\hat{t}_0 + 0)$ et $\hat{p}(\hat{t}_1) = p(\hat{t}_1 - 0)$ et comme $p(\hat{t}_0 - 0) = 0$ et $p(\hat{t}_1 + 0) = 0$, (4) se transforme dans la condition (8a) de 4.1.1. Ainsi pour $\hat{p}(\cdot)$ les conditions de stationnarité (7) et (8) (ou (7a) et (8a)) de 4.1.1 sont vérifiées.

Pour $\hat{t}_1 < \hat{t}_0$, nous obtenons à la place de (3) l'équation

$$dp/dt = -p(t)\,\hat{\varphi}_x(t) - \chi_{[\hat{t}_1, \hat{t}_0]}(t) \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{ix}(t),$$

dont la solution $p(\cdot)$ s'annule sur $[\alpha, \hat{t}_1)$ et $(\hat{t}_0, \beta]$. Dans ce cas, il faut désigner par $\hat{p}(\cdot)$ celle des solutions de l'équation (7a) de 4.1.1 qui coïncide avec $(-1)\,p(\cdot)$ sur $(\hat{t}_1, \hat{t}_0)$, et alors les conditions (7), (8) de 4.1.1 seront remplies.

Enfin, pour $\hat{t}_1 = \hat{t}_0$, nous pouvons à nouveau nous servir du lemme généralisé de Dubois-Raymond, mais maintenant $\hat{v}'(t) = p(t) \equiv 0$ partout sur Δ, sauf peut-être au point $\hat{t}_0 = \hat{t}_1$, où l'on doit encore avoir la condition $p(\hat{t}_1 + 0) - p(\hat{t}_1 - 0) = \hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1} = 0$, d'où $\hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1} = 0$. En prenant en guise de $\hat{p}(\cdot)$ celle des solutions de l'équation (7a) de 4.1.1 pour laquelle $\hat{p}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}$, nous voyons à nouveau que les conditions (7), (8) de 4.1.1 sont remplies.

B) S t a t i o n n a r i t é p a r r a p p o r t à $u(\cdot)$. Si l'on prend la dérivée de $\mathscr{L}$ relativement à $u(\cdot)$ compte tenu que $v(\cdot)$ est absolument continue, tandis que sa dérivée $p(\cdot) = v'(\cdot)$ est non nulle seulement dans l'intervalle $(\hat{t}_0, \hat{t}_1)$ et coïncide avec $\hat{p}(\cdot)$ dans cet intervalle, on obtient

$$0 = \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_u[v(\cdot)] = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \left\{ \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{iu}(t) - \hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_u(t) \right\} v(t)\,dt.$$

Puisque cette égalité est valable pour tous les $v(\cdot) \in C(\Delta, \mathbf{R}^n)$, en nous servant à nouveau de l'unicité dans le théorème de Riesz (voir 2.1.9), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{iu}(t) - \hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_u(t) = 0,$$

ce qui coïncide avec l'équation (9a) et donc avec la condition (9) de 4.1.1.

C) Stationnarité par rapport à t_k. Puisque

$$\tilde{\mathscr{L}}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), t_0, t_1; \ldots) - \mathscr{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), t_0, t_1; \ldots) =$$
$$= \int_\Delta d\nu(t)\,\{\dot{\hat{x}}(t) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\} -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \hat{p}(t)\,\{\dot{\hat{x}}(t) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\}\,dt \equiv 0,$$

les dérivées de ces deux fonctions relativement à t_k au point $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ coïncident et comme on a l'égalité $\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{t_k} = 0$, la condition (10) de 4.1.1 est également remplie.

4.1.5. Problème aux dérivées supérieures. Equation d'Euler-Poisson. Fixons à nouveau un intervalle fermé $\Delta \subset \mathbf{R}$ et envisageons l'espace

$$\Xi_s = C^s(\Delta, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

dont les éléments sont les triplets $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, la fonction $x(\cdot)\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ étant continûment différentiable jusqu'à l'ordre s inclus; $t_0, t_1 \in \operatorname{int} \Delta$. En parlant du *problème aux dérivées supérieures* (dans le calcul des variations classique) nous entendons le problème d'extrémum

$$\mathscr{P}_0(\xi) \to \text{extr}; \quad \mathscr{P}_i(\xi) \lesseqgtr 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

où

$$\mathscr{P}_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \ldots, x^{(s)}(t))\,dt +$$
$$+ \psi_i(t_0, x(t_0), \ldots, x^{(s-1)}(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, x^{(s-1)}(t_1)) \tag{2}$$

dans l'espace Ξ_s. En outre, dans (1), (2) $f_i\colon V \to \mathbf{R}$, $\psi_i\colon W \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$; V et W sont des ensembles ouverts des espaces $\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)^{s+1}$ et $\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)^s \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)^s$ respectivement; f_i et ψ_i sont au moins continues. Un triplet $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1) \in \Xi_s$ est

appelé *admissible* pour le problème (1), (2) si $(t, x(t), \ldots, x^{(s)}(t)) \in V$, $t \in \Delta$ et

$$(t_0, x(t_0), \ldots, x^{(s-1)}(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, x^{(s-1)}(t_1)) \in W.$$

Un triplet admissible $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ sera appelé *solution* (*locale*) du problème (1), (2), s'il donne un extrémum local à la fonctionnelle $\mathcal{F}_0$ dans l'espace Ξ_s, i.e. s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tous les $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ admissibles vérifiant

$$\|\xi - \hat{\xi}\|_{\Xi_s} < \varepsilon \Leftrightarrow |t_k - \hat{t}_k| < \varepsilon, \quad k = 0, 1;$$

$$\|x - \hat{x}(\cdot)\|_{C^s(\Delta, R^n)} < \varepsilon,$$

on a une des inégalités $\mathcal{F}_0(\xi) \geqslant \mathcal{F}_0(\hat{\xi})$ (dans le cas du minimum) ou $\mathcal{F}_0(\xi) \leqslant \mathcal{F}_0(\hat{\xi})$ (dans le cas du maximum).

Montrons que le problème (1), (2) aux dérivées supérieures se réduit au problème de Lagrange. Pour cela, notons

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in (\mathbf{R}^n)^s,$$

$$\boldsymbol{x}(\cdot) = (x(\cdot), \dot{x}(\cdot), \ldots, x^{(s-1)}(\cdot)),$$

$$u(\cdot) = x^{(s)}(\cdot), \quad \boldsymbol{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), \ldots, p_s(\cdot)).$$

Alors le problème (1), (2) se met sous la forme usuelle pour les problèmes de 4.1.1

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \boldsymbol{x}(t), u(t))\, dt + \psi_0(t_0, \boldsymbol{x}(t_0), t_1, \boldsymbol{x}(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (1')$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(t, \boldsymbol{x}(t), u(t))\, dt + \psi_i(t_0, \boldsymbol{x}(t_0), t_1, \boldsymbol{x}(t_1)) \lesseqgtr 0,$$

$$i = 1, \ldots, m, \qquad (2')$$

$$\dot{x}_j = x_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, s-1, \quad \dot{x}_s = u \qquad (3)$$

à fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1; \boldsymbol{p}(\cdot), \lambda, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + l, \qquad (4)$$

où

$$L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, \boldsymbol{x}, u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-1} p_j(t)(\dot{x}_j - x_{j+1}) + p_s(t)(\dot{x}_s - u) \qquad (5)$$

et

$$l(t_0, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(s-1)}, \quad t_1, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(s-1)}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i (t_0, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(s-1)}, \quad t_1, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(s-1)}). \quad (6)$$

En paraphrasant dans ce cas le théorème de 4.1.2, on obtient une condition nécessaire d'extrémum:

Théorème. *Supposons que les fonctions* $f_i: V \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *et leurs dérivées partielles relativement à* $x, \ldots, x^{(s)}$ *sont continues dans l'ouvert* $U \subset \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)^{s+1}$, *tandis que les fonctions* $\psi_i: W \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *sont continûment différentiables dans l'ouvert* $W \subset \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)^s \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n)^s$ *et supposons que* $\hat{x}(\cdot) \in C^s(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $\hat{t}_0, \hat{t}_1 \in \operatorname{int} \Delta$ *vérifient*

$$(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(s)}(t)) \in V, \quad t \in \Delta;$$

$$(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \ldots, \hat{x}^{(s-1)}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1), \ldots, \hat{x}^{(s-1)}(\hat{t}_1)) \in W.$$

Si $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *est une solution locale de problème* (1), (2), *il existe des multiplicateurs de Lagrange* $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$ *pour le problème du minimum et* $\hat{\lambda}_0 \leqslant 0$ *pour le problème du maximum*

$$\hat{p}(\cdot) = (\hat{p}_1(\cdot), \ldots, \hat{p}_s(\cdot)) \in C^1(\Delta, (\mathbf{R}^n)^{s*}), \ \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n),$$

qui ne s'annulent pas simultanément et qui vérifient

a) *les conditions de stationnarité de la fonction de Lagrange*:

relativement à $x(\cdot)$ $(\hat{\mathscr{L}}_{x(\cdot)} = 0, \ \hat{\mathscr{L}}_{u(\cdot)} = 0)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{p}}_1(t) &= f_x(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(s)}(t)), \\ \dot{\hat{p}}_j(t) &= f_{x^{(j-1)}}(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(s)}(t)) - \hat{p}_{j-1}(t), \\ &\qquad j = 2, \ldots, s, \\ 0 &= f_{x^{(s)}}(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(s)}(t)) - \hat{p}_s(t), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\hat{p}_j(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_k^{(j-1)}}, \quad k = 0, 1; \quad (8)$$

relativement à t_k $(\hat{\mathscr{L}}_{t_k} = 0)$

$$\hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \hat{l}_{t_k}, \quad k = 0, 1; \quad (9)$$

b) *on a la condition de concordance des signes*

$$\hat{\lambda}_i \gtrless 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad (10)$$

c) *on a la condition de non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Ici

$$f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(s)}) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, x, \ldots, x^{(s)}), \tag{12}$$

$$\hat{H}(t) = \sum_{j=1}^{s} \hat{p}_j(t)\, \hat{x}^{(j)}(t) - f(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(s)}(t)) \tag{13}$$

et comme toujours

$$\hat{l}_{x_k^{(j)}} = l_{x_k^{(j)}}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \ldots, \hat{x}^{(s-1)}(\hat{t}_0,), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1), \ldots, \hat{x}^{(s-1)}(\hat{t}_1))$$

etc., tandis que les inégalités (10) signifient que $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, si on a $\mathcal{F}_i(\xi) \leqslant 0$ dans le problème (1) et $\hat{\lambda}_i \leqslant 0$ si on a $\mathcal{F}_i(\xi) \geqslant 0$ dans (1) et enfin $\hat{\lambda}_i$ peut être de signe arbitraire lorsque $\mathcal{F}_i(\xi) = 0$ dans (1).

Les détails des calculs qui amènent les conditions (7) à (12) de 4.1.1 aux conditions similaires de ce théorème sont laissés au lecteur en guise d'exercice.

Dans le cas particulier du problème à dérivées supérieures dans lequel les termes terminaux de (1′) et (2′) sont des constantes, les extrémités étant fixes, l'assertion du théorème peut être représentée sous une forme plus simple. Les conditions de transversalité (8) et (9) peuvent être omises, et le système (7) s'écrit sous forme d'une seule équation

$$\hat{f}_x(t) - \frac{d}{dt}\left(\hat{f}_{\dot{x}}(t) - \frac{d}{dt}\left(\hat{f}_{\ddot{x}} - \ldots - \frac{d}{dt}\hat{f}_{x^{(s)}}(t)\right)\right) = 0. \tag{14}$$

Enfin, si l'on stipule l'existence des dérivées nécessaires, l'équation (14) peut s'écrire sous forme d'équation d'Euler-Poisson

$$\hat{f}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{f}_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\hat{f}_{\ddot{x}}(t) - \ldots - (-1)^s \frac{d^s}{dt^s}\hat{f}_{x^{(s)}}(t) = 0. \tag{15}$$

La solution générale de cette équation d'ordre $2s$ contient $2s$ constantes arbitraires et dépend aussi des nombres $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, dont un peut être choisi arbitrairement. Ainsi nous avons à notre disposition $2s + m$ inconnues. Pour les déterminer, nous nous servirons de $2s$ conditions aux limites (pour les extrémités fixes) et également de m conditions obtenues à partir des conditions de non-rigidité complémentaire et des inégalités (1) et (10) (vérifiez que l'on en tire exactement m égalités). D'une manière analogue, on peut montrer que dans le cas général le nombre d'équations données par le théorème coïncide avec le nombre d'inconnues.

§ 4.2. Principe du maximum de Pontriaguine

4.2.1. Enoncé du problème de commande optimale. Le problème d'extrémum dont il s'agit dans ce paragraphe est de forme presque identique au problème de Lagrange (1)-(3) de 4.1.1. Ici nous verrons à nouveau la même fonctionnelle, la même relation différentielle, les mêmes contraintes du type d'inégalités que précédemment. L'énoncé du nouveau problème diffère de l'ancien là où il présente séparément la contrainte sur la commande de la forme $u(t) \in \mathfrak{U}$, où $\mathfrak{U}$ est un espace topologique.

Au premier abord, ceci semble ne rien donner de nouveau et même paraît moins général. En effet, dans le problème de Lagrange, il s'agissait de la condition $(t, x(t), u(t)) \in V$ que devaient satisfaire les processus admissibles. Dans le cas particulier où $V = G \times \mathfrak{U}$, nous pouvons séparer cette condition en deux: $(t, x(t)) \in G$ et $u(t) \in \mathfrak{U}$.

Toutefois la séparation des variables en variables de phase et de commande, et la mise en valeur des contraintes concernant la commande, s'avèrent particulièrement significatives. Dès lors nous avons affaire à une nouvelle branche de la théorie des problèmes d'extrémum, bientôt reconnue, grâce à son utilité pour les problèmes pratiques, par les spécialistes des mathématiques appliquées; en outre, tout ceci a permis de jeter un nouveau regard sur la théorie classique.

Qu'est-ce qui explique cette situation? En premier lieu, c'est la nécessité d'étudier les problèmes à contenu technique. La séparation des variables de phase et de commande et leur relation donnée par une équation différentielle est le modèle ordinaire pour un processus qui évolue selon les lois de la nature (équation différentielle!) tout en étant soumis à l'influence active de l'homme, qui commande ce processus à ses propres fins et essaie de le faire d'une manière optimale. Il est maintenant clair que les contraintes sur la commande de la forme $u(t) \in \mathfrak{U}$ sont liées aux possibilités limitées pour influencer le processus (par exemple, à cause de la rotation limitée des gouvernes d'un appareil commandé).

Si nous prenons en guise de $\mathfrak{U}$ un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^r$, nous n'obtiendrons rien de neuf. Toutefois, dans les problèmes techniques et autres problèmes appliqués, l'ensemble $\mathfrak{U}$ n'est pas nécessairement fermé. Souvent la commande peut être tout simplement discrète (branché-débranché). Pour certaines contraintes naturelles il s'avère que $\mathfrak{U}$ est un ensemble fermé: l'importance de ce fait a été notée en résolvant le problème de Newton (voir 1.6.2). Déjà dans les problèmes de commande optimale les plus simples, on rencontre des contraintes de la forme $|u(t)| \leqslant 1$ (voir le problème de temps minimal dans 1.6.3). Dans ce dernier cas, l'ensemble des commandes admissibles était une boule fermée dans l'espace $L_\infty(\Delta)$, espace dont

la structure est assez compliquée, et dans des cas typiques la commande optimale est située sur la frontière du polyèdre jouant le rôle de cette boule, ce polyèdre étant particulièrement peu différentiable et « multiédral » ou plus exactement « infiniment-édral »; il découle de ce qui a été dit dans 1.6.3 que le problème n'aurait pas de solution pour la contrainte $|u(t)| < 1$: le temps minimal est atteint pour une commande telle que $|u(t)| = 1$ presque partout. Tout ceci rend difficile l'application des méthodes usuelles du calcul différentiel, et les conditions de différentiabilité de la commande sont souvent fort peu naturelles. Par conséquent, nous n'allons plus postuler l'existence des dérivées f_{iu}, φ_u, etc., et l'ensemble même $\mathfrak{U}$ des valeurs possibles de la commande sera envisagé comme un espace topologique quelconque qui ne possède pas en général de structure vectorielle.

L'absence des dérivées relativement à u est la deuxième différence entre le nouveau problème et l'ancien. En voulant souligner ce fait, nous désignons les fonctionelles qui participent à l'énoncé du problème par une nouvelle lettre, quoique par la forme elles coïncident avec les fonctionnelles de Boltz.

Enfin, la dernière différence est le refus de postuler la continuité de la commande. Ceci est surtout lié au fait que le problème ne possède souvent pas de solution dans la classe des commandes continues (par exemple, dans la majorité des problèmes où $\mathfrak{U}$ est discret ou dans le problème de temps minimal de 1.6.3). Il faut toutefois remarquer que le passage à l'étude des extrémales brisées (ce qui correspond à une commande continue par morceaux) s'effectuait également dans le calcul des variations classique (voir 1.4.3). La possibilité même du choix libre de la commande à l'intérieur de l'ensemble $\mathfrak{U}$ (dont nous nous sommes déjà servis en laissant apparaître les variations en aiguille dans la déduction des conditions de Weierstrass dans 1.4.4 et pendant la démonstration du principe du maximum dans la situation la plus simple (voir 1.5.4)) engendre une convexité cachée de la commande, ce qui détermine la forme de l'hypothèse principale, du principe du maximum (voir (10), (11) dans 4.2.2), qui rappelle alors l'hypothèse correspondante dans les problèmes de programmation convexe. Ici cette relation ne sera pas complètement éclaircie, ce que nous ferons dans le paragraphe suivant, dans une variante plus particulière du problème général, il est vrai.

Ainsi, considérons le problème d'extrémum

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\,dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathfrak{U}, \qquad (2)$$

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_0,\ t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,\ x(t),\ u(t))\,dt+$$
$$+\psi_i(t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1))\lesseqgtr 0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{3}$$

Ici $f_i: G\times\mathfrak{U}\to\mathbf{R}$, $\psi_i: W\to\mathbf{R}$, $i=0, 1, \ldots, m$, $\varphi: G\times\mathfrak{U}\to\mathbf{R}^n$, où G et W sont des ensembles ouverts dans les espaces $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ respectivement, et $\mathfrak{U}$ est un espace topologique quelconque. Le symbole $\lesseqgtr$ a la même signification que dans les §§ 3.2 et 4.1. Toutes les fonctions f_i, ψ_j, φ sont supposées au moins continues.

Le quadruplet $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ sera appelé *processus de commande* pour le problème (1)-(3), si :

a) la *commande* $u(\cdot): [t_0, t_1]\to\mathfrak{U}$ est une fonction continue par morceaux. Ses valeurs aux points de discontinuité ne jouent aucun rôle ; pour fixer les idées, nous supposerons que $u(\cdot)$ est continue à droite pour $t_0\leqslant t<t_1$ et à gauche au point t_1 ;

b) la *trajectoire de phase* de $x(\cdot): [t_0, t_1]\to\mathbf{R}^n$ est continue et son graphique est contenu dans G:

$$\Gamma=\{(t,\ x(t))\mid t_0\leqslant t\leqslant t_1\}\subset G;$$

c) pour tous les $t\in[t_0, t_1]$, sauf peut-être aux points de discontinuité de la commande $u(\cdot)$, la fonction $x(\cdot)$ satisfait l'équation différentielle

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,\ x(t),\ u(t))$$

(dans ce cas, nous disons que $x(\cdot)$ correspond à la commande $u(\cdot)$; on voit facilement qu'aux points de discontinuité de la commande, $x(\cdot)$ possède des dérivées à droite et à gauche).

Un processus de commande est dit *admissible* lorsqu'il vérifie les conditions (3).

Un processus de commande admissible $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ est appelé (localement) *optimal* s'il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que pour chaque processus de commande admissible $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ vérifiant

$$|t_k-\hat{t}_k|<\varepsilon,\ k=0,\ 1,\ \text{et}\ \ |x(t)-\hat{x}(t)|<\varepsilon$$
$$\text{pour tous les } t\in[t_0,\ t_1]\cap[\hat{t}_0,\ \hat{t}_1] \tag{4}$$

on a l'inégalité

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_0,\ t_1)\geqslant\mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1). \tag{5}$$

Remarquons qu'ici un changement par rapport au problème de Lagrange s'est produit : nous ne postulons plus le fait que les dérivées $\dot{x}(t)$ et $\dot{\hat{x}}(t)$ sont proches l'une de l'autre. En calcul des variations

classique ceci correspond au passage de l'extrémum faible à l'extrémum fort (voir 1.4.3).

Il est utile de comparer le problème de Lagrange au problème de commande optimale pour le cas où $\mathfrak{U} = \mathbf{R}^r$ et $V = G \times \mathbf{R}^r$ dans 4.1.1, avec l'hypothèse suivante:

Chaque processus de commande admissible $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ du problème de Lagrange l'est également pour le problème de commande optimale (plus exactement, se transforme en celui-ci avec la contrainte de $u(\cdot)$ sur $[t_0, t_1]$).

Cela signifie que le problème est devenu plus général (comparez à 1.4.3). Par conséquent, la valeur du problème de commande optimale n'est pas supérieure à la valeur du problème de Lagrange ($\inf \mathcal{J}_0 \leqslant \leqslant \inf \mathcal{B}_0$). Par ailleurs, pour des hypothèses assez naturelles concernant les fonctions f_i, ψ_i et φ, ces deux valeurs coïncident (dans le cas trivial où $\dot{x} = u$, nous avons déjà démontré ce fait dans le lemme sur l'arrondissement des angles dans 1.4.3).

Lorsque $\inf \mathcal{J}_0 < \inf \mathcal{B}_0$, alors, comme on voit facilement, les solutions des deux problèmes peuvent exister ou non indépendamment l'une de l'autre. Si les valeurs des problèmes sont égales, un des trois cas suivants est possible:

a) Le problème de Lagrange a la solution $\inf \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$, dans ce cas, le même quadruplet est également la solution du problème de commande optimale, puisque

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \geqslant \inf \mathcal{J}_0 = \inf \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1).$$

b) Le problème de Lagrange n'a pas de solution, tandis que le problème de commande optimale en a une: $\inf \mathcal{J}_0$ est atteint sur une courbe différentiable par morceaux $\hat{x}(\cdot)$. Nous avons eu l'occasion d'observer cette situation dans l'exemple (6) de 1.4.3 (pour $\dot{x} = u$ le passage de la classe C^1 à la classe KC^1 correspond justement au passage aux problèmes de commande optimale).

c) Les deux problèmes n'ont pas de solution: la limite inférieure de la fonctionnelle n'est pas atteinte, même lorsqu'on élargit son domaine de définition. C'est le cas que l'on rencontre dans l'exemple de Boltz (1.4.3).

Dans les raisonnements précédents, nous avons admis, sans l'indiquer explicitement, qu'il s'agissait de la minimisation relativement à toute la classe des processus de commande admissibles. Toutefois, en considérant les problèmes d'extrémum, nous nous plaçons généralement au point de vue local, ce qui, d'ailleurs, est reflété par nos définitions. Dans 4.1.1 le processus de commande admissible $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ fut appelé optimal (dans le sens faible) s'il donne un minimum à la fonctionnelle $\mathcal{B}_0$ dans un certain C^1-voisinage

relativement à $x(\cdot)$ et dans un C-voisinage relativement à $u(\cdot)$. Mais maintenant la définition de l'optimalité présuppose que le minimum $\mathcal{J}_0$ a lieu dans un voisinage plus vaste, décrit par les inégalités (4). En fait, c'est un C-voisinage relativement à $x(\cdot)$, et il n'impose aucune contrainte du tout sur la commande. Comme nous avons déjà remarqué dans le cas classique, il s'agissait ici du minimum fort. Par conséquent, une solution locale du problème de Lagrange peut ne pas être un processus optimal pour le problème de commande optimale. Si la commande $\hat{u}(\cdot)$ est continue dans le processus optimal $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$, alors, sous nos hypothèses usuelles relativement aux fonctions qui participent au problème, ce processus sera également une solution locale du problème de Lagrange.

Les contraintes (3) ne sont pas les plus générales qu'il faut considérer en étudiant les problèmes de commande optimale. Nous laissons, par exemple, entièrement de côté les *contraintes de phase* de la forme

$$(t, x(t)) \in D, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{6}$$

où D est un certain sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Bien sûr, si D est ouvert, alors, en remplaçant dans la définition du processus de commande G par $G \cap D$ et en prenant, s'il le faut, un ε plus petit dans (4), nous aurons satisfait à la contrainte (6) automatiquement. Par conséquent, le cas le plus intéressant est celui où D n'est pas un

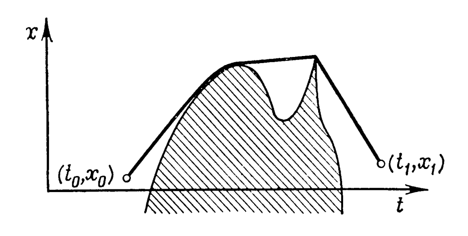


Fig. 37

ensemble ouvert et la trajectoire de phase optimale $x(t)$ sort, pour certains t, sur la frontière de D (voir figure 37, où il s'agit de minimiser la longueur de la courbe et la partie hachurée du plan n'appartient pas à D). Ceci nous amène à des effets totalement neufs, en particulier à la nécessité d'introduire dans l'équation d'Euler-Lagrange une fonction généralisée, la dérivée de la mesure non absolument continue (ou remplacer cette équation différentielle par une équation intégrale avec intégrale de Stieltjes relativement à cette mesure).

4.2.2. Enoncé du principe du maximum. Principe de Lagrange dans le problème de commande optimale. Considérons à nouveau le problème

$$\mathcal{J}_0(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_0,\ t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\ x(t),\ u(t))\,dt+$$
$$+\psi_0(t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1))\to\inf, \qquad (1)$$

$$\dot{x}=\varphi(t,\ x(t),\ u(t)),\quad u(t)\in\mathfrak{U}, \qquad (2)$$

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_0,\ t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,\ x(t),\ u(t))\,dt+$$
$$+\psi_i(t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1))\leqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \qquad (3)$$

Comme dans 4.1.1, la fonction de Lagrange de ce problème sera par définition la fonction

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_0,\ t_1;\ p(\cdot),\ \lambda,\ \lambda_0)=\int_{t_0}^{t_1} L\,dt+l, \qquad (4)$$

où

$$\lambda_0\in\mathbf{R},\quad \lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)\in\mathbf{R}^{m*},$$

$$L(t,\ x,\ \dot{x},\ u)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t,\ x,\ u)+p(t)(\dot{x}-\varphi(t,\ x,\ u)), \qquad (5)$$

$$l(t_0,\ x_0,\ t_1,\ x_1)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\psi_i(t_0,\ x_0,\ t_1,\ x_1). \qquad (6)$$

La fonction $p(\cdot)\colon[t_0,\ t_1]\to\mathbf{R}^{n*}$ est supposée continue. Là où ce sera nécessaire, nous supposerons que $p(\cdot)$ est définie sur un intervalle plus large que $[t_0,\ t_1]$ en la prolongeant en dehors de ce segment d'une manière arbitraire, mais de sorte qu'elle soit toujours continue. La fonction $p(\cdot)$ et les nombres λ_i, λ_0 seront appelés *multiplicateurs de Lagrange* du problème (1)-(3), la fonction (5) est le *lagrangien*, (6) est le *terminant*. Enfin la fonction

$$H(t,\ x,\ u,\ p)=L_{\dot{x}}\dot{x}-L=p\varphi(t,\ x,\ u)-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t,\ x,\ u) \qquad (7)$$

sera appelée *fonction de Pontriaguine*. Comme toujours, nous nous servirons des notations

$$\hat{L}_x(t)=L_x(t,\ \hat{x}(t),\ \dot{\hat{x}}(t),\ \hat{u}(t)),\quad \hat{\varphi}(t)=\varphi(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t)),$$
$$\hat{l}_{x_k}=l_{x_k}(\hat{t}_0,\ \hat{x}(\hat{t}_0),\ \hat{t}_1,\ \hat{x}(\hat{t}_1)),$$

etc.

Théorème (principe du maximum de Pontriaguine). *Soit G un ensemble ouvert dans l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, W un ensemble ouvert dans l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{U}$ un e pace topologique quelconque; les fonctions f_i: $G \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, et φ: $G \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}^n$ ainsi que leurs dérivées partielles relativement à x sont continues dans $G \times \mathfrak{U}$, tandis que les fonctions ψ_i: $W \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$, possèdent des dérivées continues dans W.*

Si $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ est un processus optimal pour le problème 1)-(3), *alors il existe des multiplicateurs de Lagrange*

$$\hat{\lambda}_0 \geqslant 0, \ \hat{p}(\cdot), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n),$$

qui ne s'annulent pas simultanément et tels que:

a) *on a les conditions de stationnarité et le principe du minimum pour la fonction de Lagrange:*

relativement à $x(\cdot)$ la condition de stationnarité ($\hat{\mathscr{L}}_{x(\cdot)} = 0$)

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0, \tag{8}$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_k}, \quad k = 0, 1; \tag{9}$$

relativement à $u(\cdot)$ le principe du minimum sous la forme de Lagrange

$$\hat{L}(t) \equiv L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \equiv \min_{v \in \mathfrak{U}} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), v), \tag{10}$$

ou sous la forme hamiltonienne (la forme de Pontriaguine) comme principe du maximum

$$\hat{H}(t) \equiv H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t)) \equiv \max_{v \in \mathfrak{U}} H(t, \hat{x}(t), v, \hat{p}(t)), \tag{11}$$

la fonction $\hat{H}(t)$ étant continue sur le segment $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$;
relativement à t_k la condition de stationnarité

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_k} = 0, \quad k = 0, 1; \tag{12}$$

b) *on a la condition de concordance des signes*

$$\lambda_i \gtrless 0; \tag{13}$$

c) *on a les conditions de non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i \mathscr{F}_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{14}$$

(comme dans le paragraphe précédent, l'inégalité (13) signifie que $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$ si l'on a $\mathscr{F}_i \leqslant 0$ dans la condition (3); $\hat{\lambda}_i \leqslant 0$ si l'on a $\mathscr{F}_i \geqslant 0$ dans (3) et $\hat{\lambda}_i$ est de signe quelconque lorsque $\mathscr{F}_i = 0$).

L'assertion sur l'existence des multiplicateurs de Lagrange qui vérifient l'ensemble des conditions a) à c) sera brièvement appelée ici *principe de Lagrange pour le problème de commande optimale* (1)-(3) ou *principe du maximum de Pontriaguine.* Comme précédemment, cette assertion correspond parfaitement au principe général de Lagrange énoncé dans 3.1.5. Puisque la fonction de Lagrange $\mathscr{L}$ est une fonction de trois variables $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ et (t_0, t_1), il faut considérer trois problèmes

$$(\alpha) \qquad \mathscr{L}(x(\cdot),\ \hat{u}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1;\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\lambda},\ \hat{\lambda}_0) \to \inf,$$

$$(\beta) \qquad \mathscr{L}(\hat{x}(\cdot),\ u(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1;\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\lambda},\ \hat{\lambda}_0) \to \inf,$$

$$(\gamma) \qquad \mathscr{L}(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1;\ \hat{p}(\cdot),\ \hat{\lambda},\ \hat{\lambda}_0) \to \inf.$$

Les problèmes (α) et (γ) sont ici les mêmes que dans 4.1.1. Par conséquent, les conditions de stationnarité relativement à $x(\cdot)$ et t_k y doivent être les mêmes que dans le problème de Lagrange, ce qui est justement le cas. En ce qui concerne le problème (β), c'est le problème élémentaire de commande optimale énoncé dans 3.1.4, et le principe du minimum (10) correspond exactement à la condition (1) de ce sous-paragraphe. Ainsi notre formulation du théorème est en accord complet avec le principe général de Lagrange.

On écrit généralement les conditions de stationnarité (8), (9) et (12) sous une autre forme : (8) comme l'équation d'Euler-Lagrange (que l'on appelle également équation duale)

$$d\hat{p}(t)/dt = -\hat{p}(t)\,\hat{\varphi}_x(t) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{ix}(t)\,; \tag{8a}$$

(9) et (12) comme les *conditions de transversalité*

$$\hat{p}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{x_1} = 0, \qquad -\hat{p}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{x_0} = 0 \tag{9a}$$

et

$$-\hat{H}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} = 0, \qquad \hat{H}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} = 0. \tag{12a}$$

Les transformations appropriées s'effectuent de la même manière que dans 4.1.1, il n'est pas nécessaire de les répéter. Aux points de discontinuité de la commande il faut prendre la dérivée à droite $\hat{p}'_+(\cdot)$ dans l'équation (8a) (celle à gauche existe également). La continuité de $\hat{p}(\cdot)$ et $\hat{H}(\cdot)$ aux points de discontinuité de la commande (i.e. aux points de cassure de $x(\cdot)$) est connue sous le titre de *condition de Weierstrass-Erdmann.*

Ici, on peut également effectuer l'analyse pour voir dans quelle mesure l'ensemble des conditions nécessaires exposées dans le théorème est complet. En fait, cette analyse sera la même que celle effectuée

pour le problème de Lagrange. Au lieu de définir $u(\cdot)$ comme une fonction de $x(\cdot)$ et $p(\cdot)$ à partir de la condition de $L_u = 0$, il faut maintenant le faire en se servant de la relation (10).

4.2.3. Variations en aiguille. Comme dans la situation la plus simple que nous avons étudiée dans 1.5.4, la principale méthode pour démontrer le principe du maximum, qui sera exposée par la suite, consiste à remplacer le problème de commande optimale considéré par un certain problème d'extrémum de dimension finie, ou plus exactement par toute une famille de tels problèmes. Pour cela, nous inclurons le processus optimal $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ dans une certaine famille de processus commandés — un « paquet » de variations en aiguille — et considérons la restriction du problème (1)-(3) de 4.2.2 à cette famille.

La famille de processus qui nous seront nécessaires dépend des paramètres suivants:

données initiales (t_0, x_0), temps terminal t_1;

la suite finie $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, où tous les $\alpha_i \in \mathbf{R}$ sont suffisamment petits, par souci de brièveté, nous notons $\bar{\alpha} = \sum \alpha_i$;

la suite finie $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$, où $\hat{t}_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N < \hat{t}_1$, les τ_i contenant tous les points de discontinuité de la commande optimale $\hat{u}(\cdot)$;

la suite finie $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_N)$, où $v_i \in \mathfrak{U}$.

Par la suite $\bar{\tau}$ et $\bar{v}$ sont fixes, tandis que $(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha})$ varient et ce sont les variables relativement auxquelles nous prendrons les dérivées de diverses fonctions.

Supposons d'abord que $N = 1$. La variation en aiguille élémentaire de la commande $\hat{u}(t)$ ou simplement « l'aiguille élémentaire » qui correspond à la paire (τ, v) se définit par les égalités

$$u(t;\ \alpha,\ \tau,\ v) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \notin [\tau,\ \tau+\alpha), \\ v, & t \in [\tau,\ \tau+\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

D'une manière analogue, la variation en aiguille $x(t;\ \alpha, \tau, v)$ de la trajectoire de phase $\hat{x}(t)$ se définit comme solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = \varphi(t,\ x,\ u(t;\ \alpha,\ \tau,\ v)), \qquad x(\tau) = \hat{x}(\tau). \tag{2}$$

A une différence sans importance près (à la place de $[\tau, \tau + \alpha)$ nous avons pris le semi-intervalle $[\tau - \lambda, \tau))$, nous avons considéré une variation semblable dans 1.5.4. Nous avons découvert que la fonction $x(t;\ \alpha, \tau, v)$ possède pour $\alpha = 0$ une dérivée à droite relati-

vement à α et pour $t \geqslant \tau$ cette dérivée $y(t) = x_\alpha(t;\, 0,\, \tau,\, v)$ est la solution de l'équation en variations

$$\dot{y} = \hat{\varphi}_x(t)\, y \tag{3}$$

à condition initiale

$$y(\tau) = \varphi(\tau,\, \hat{x}(\tau),\, v) - \varphi(\tau,\, \hat{x}(\tau),\, \hat{u}(\tau)). \tag{4}$$

En suivant 2.5.4, nous allons désigner ici et dans toute la suite du présent paragraphe par $\Omega(t,\, \tau)$ la matrice fondamentale des solutions de l'équation (3). En outre, pour simplifier l'écriture, nous introduisons une notation spéciale pour le deuxième membre de l'égalité (4) :

$$\Delta\hat{\varphi}(\tau,\, v) = \varphi(\tau,\, \hat{x}(\tau),\, v) - \varphi(\tau,\, \hat{x}(\tau),\, \hat{u}(\tau)). \tag{5}$$

Dans ces notations

$$y(t) = x_\alpha(t;\, 0,\, \tau,\, v) = \Omega(t,\, \tau)\, \Delta\hat{\varphi}(\tau,\, v). \tag{6}$$

Dans 1.5.4, nous nous sommes limités à une seule « aiguille ». Maintenant nous aurons besoin de tout un « paquet », puisque le problème est devenu plus compliqué, et il nous faut un plus grand nombre de paramètres libres. Dans un paquet, nous pouvons réunir un nombre fini quelconque d'aiguilles aux paramètres $(\tau_i,\, v_i,\, \alpha_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Il est alors important de noter que certaines aiguilles peuvent différer seulement par leur valeur de commande v_i, tout en ayant les mêmes τ_i. Ainsi, nous ne pouvons plus donner les aiguilles par les formules de la forme (1) : pour des τ_i égaux de différentes aiguilles peuvent se superposer les unes sur les autres. Pour éviter cette situation, nous déplacerons le semi-intervalle où agit la i-ième aiguille d'un nombre égal à $i\alpha = i \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$, de sorte que nous aurons maintenant $\Delta_i = [\tau_i + i\alpha,\ \tau_i + i\alpha + \alpha_i]$. (Il est évident que si $\alpha_j > 0$ et les α_j sont suffisamment petits, alors les Δ_i sont disjoints.)

En vertu des hypothèses posées dans 4.2.1, la commande optimale $\hat{u}(\cdot)$ est continue à gauche au point $\hat{t}_1$ et à droite au point $\hat{t}_0$. Prolongeons $\hat{u}(\cdot)$ en dehors du segment $[\hat{t}_0,\, \hat{t}_1]$ de manière continue (par exemple en posant $\hat{u}(t) \equiv \hat{u}(\hat{t}_0)$ pour $t < \hat{t}_0$ et $\hat{u}(t) \equiv \hat{u}(\hat{t}_1)$ pour $t > \hat{t}_1$) ; nous effectuerons ce prolongement par la suite sans mention explicite.

Supposons que tous les α_i sont positifs. Définissons la variation en aiguille de la commande $\hat{u}(\cdot)$ en posant

$$u(t;\, \bar{\alpha},\, \bar{\tau},\, \bar{v}) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \in (\hat{t}_0 - \delta,\ \hat{t}_1 + \delta) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Delta_i, \\ v_i, & t \in \Delta_i = [\tau_i + i \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j,\ \tau_i + i \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j + \alpha_i). \end{cases} \tag{7}$$

La famille correspondante des trajectoires de phase $x(t;\ t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ sera définie comme la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x}=\varphi(t, x, u(t;\ \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})), \quad x(t_0)=x_0. \tag{8}$$

Pour simplifier, nous écrirons $\hat{x}_0=\hat{x}(\hat{t}_0)$ par la suite.

L e m m e s u r l e p a q u e t d'a i g u i l l e s. 1) *Pour des* $\varepsilon_0>0$, $\delta>0$ *suffisamment petits, la solution du problème de Cauchy* (8) *vérifiant*

$$|t_0-\hat{t}_0|<\varepsilon_0, \quad |x_0-\hat{x}_0|<\varepsilon_0, \quad 0<\alpha_j<\varepsilon_0, \tag{9}$$

est définie pour $\hat{t}_0-\delta\leqslant t\leqslant\hat{t}_1+\delta$.

2) *Si* $t_0\to\hat{t}_0$, $x_0\to\hat{x}_0$ *et* $\alpha_j\downarrow 0$, *alors* $x(t;\ t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})\to$ $\to\hat{x}(t)$ *uniformément sur le segment* $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$.

3) *L'application* $(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha})\mapsto x(t_1;\ t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ *peut être prolongée à une application définie et continûment différentiable dans un certain voisinage du point* $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})$ *de manière à avoir*

$$\partial\hat{x}/\partial t_1=x_{t_1}(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}, \bar{\tau}, \bar{v})=\varphi(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1), \hat{u}(\hat{t}_1))=\hat{\varphi}(\hat{t}_1), \tag{10}$$

$$\partial\hat{x}/\partial t_0=x_{t_0}(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}, \bar{\tau}, \bar{v})=$$
$$=-\Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_0)\,\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{u}(\hat{t}_0))=-\Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0), \tag{11}$$

$$\partial\hat{x}/\partial x_0=x_{x_0}(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}, \bar{\tau}, \bar{v})=\Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_0), \tag{12}$$

$$\partial\hat{x}/\partial\alpha_k=x_{\alpha_k}(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}, \bar{\tau}, \bar{v})=\Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_0)\,\Delta\hat{\varphi}(\tau_k, v_k), \tag{13}$$

où $\Omega(t, \tau)$ *est la matrice fondamentale des solutions du système d'équations en variations* (3) *et* $\Delta\hat{\varphi}(\tau, v)$ *est défini par la formule* (5).

La démonstration de ce lemme sera effectuée dans 4.2.6. Il est clair qu'il garantit la différentiabilité des termes terminaux faisant partie des hypothèses du problème 4.2.2. En ce qui concerne les termes intégraux, ils nécessiteront, comme dans 1.5.4, un lemme particulier.

L e m m e s u r l e s f o n c t i o n n e l l e s i n t é g r a l e s. *Supposons que les fonctions* $f_i(t, x, u)$ *vérifient les mêmes hypothèses que dans l'énoncé du théorème de* 4.2.2.

Si $u(t;\ \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ *est défini pour* $\alpha_i>0$ *par les formules* (7), *tandis que* $x(t;\ t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ *est la solution du problème de Cauchy* (8), *alors les fonctions*

$$F_i(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha})=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t;\ t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}), u(t;\ \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}))\,dt, \quad i=0, 1, \ldots, m,$$

peuvent être prolongées à des fonctions continûment différentiables dans un certain voisinage du point $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \overline{0})$ *et l'on aura*

$$\partial \hat{F}_i/\partial t_1 = F_{it_1}(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \overline{0}) = f_i(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1), \hat{u}(\hat{t}_1)) = \hat{f}_i(\hat{t}_1), \quad (14)$$

$$\partial \hat{F}_i/\partial t_0 = F_{it_0}(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \overline{0}) = -f_i(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{u}(\hat{t}_0)) + p_{0i}(\hat{t}_0)\,\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{u}(\hat{t}_0)) = -\hat{f}_i(\hat{t}_0) + p_{0i}(\hat{t}_0)\,\hat{\varphi}(\hat{t}_0), \quad (15)$$

$$\partial \hat{F}_i/\partial x_0 = F_{ix_0}(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \overline{0}) = p_{0i}(\hat{t}_0), \quad (16)$$

$$\partial \hat{F}_i/\partial \alpha_k = F_{i\alpha_k}(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \overline{0}) = \Delta \hat{f}_i(\tau_k, v_k) - p_{0i}(\tau_k)\,\Delta\hat{\varphi}(\tau_k, v_k), \quad (17)$$

où $p_{0i}(\tau)$ *est la solution du problème de Cauchy*

$$dp_{0i}(\tau)/d\tau = -p_{0i}(\tau)\varphi_x(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) + f_{ix}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)), \quad (18)$$
$$p_{0i}(\hat{t}_1) = 0$$

pour un système linéaire non homogène dual du système d'équations en variations (3), *tandis que* $\Delta\hat{f}_i(\tau, v)$ *se détermine par une formule analogue à* (5). Nous exposons la démonstration de ce lemme dans 4.2.7.

4.2.4. Réduction à un problème de dimension finie. Le graphique de la trajectoire de phase optimale $\hat{x}(t)$ est situé à l'intérieur du domaine G et, en vertu de la deuxième assertion du lemme sur le paquet d'aiguilles (voir 4.2.3), le graphique de la solution $x(t; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})$ du problème de Cauchy (8) du même sous-paragraphe est également situé dans ce domaine pour $t \in [t_0, t_1]$, à condition d'avoir les inégalités (9) de 4.2.3 pour un ε_0 suffisamment petit. Par conséquent, le quadruplet $(x(\cdot; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v}), u(\cdot; \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v}), t_0, t_1)$ est un processus de commande admissible pour le problème (1)-(3) de 4.2.2.

Posons

$$\Psi_i(t_1, t_0, x_0, \overline{\alpha}) = \psi_i(t_0, x_0, t_1, x(t_1; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})), \quad (1)$$

$$F_i(t_1, t_0, x_0, \overline{\alpha}) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v}), u(t; \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v}))\,dt,$$
$$i = 0, 1, \ldots, m. \quad (2)$$

En vertu de la troisième assertion du lemme sur le paquet d'aiguilles et d'après le théorème de superposition, les fonctions (1) sont continûment différentiables dans un certain voisinage du point $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \overline{0})$.

Il en est de même pour la fonction (2) d'après le lemme des fonctionnelles intégrales de 4.2.3.

Nous pouvons maintenant considérer le problème d'extrémum de dimension finie — la restriction du problème (1)-(3) de 4.2.2 à la famille des processus de commande construite:

$$I_0(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) = F_0(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) + \Psi_0(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) \to \inf, \quad (3)$$

$$I_i(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) = F_i(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) + \Psi_i(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) \leqslant 0, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\alpha_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \quad (5)$$

Pour ce problème, le point $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})$ est une solution locale. En effet, si l'on a les contraintes (4), le quadruplet $(x(\cdot\,; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}),$ $u(\cdot\,; \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}), t_0, t_1)$ est un processus de commande admissible pour le problème (1)-(3) de 4.2.2. Si le nombre ε_0 dans les inégalités (9) de 4.2.3 est suffisamment petit, alors, en vertu de la seconde assertion du lemme sur le paquet d'aiguilles, nous avons les inégalités (4) de 4.2.1.

Par conséquent, l'inégalité (5) de 4.2.1 est vérifiée, et l'on en tire

$$I_0(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) =$$
$$= \mathcal{J}_0(x(\cdot\,; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}), u(\cdot, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}), t_0, t_1) \geqslant$$
$$\geqslant \mathcal{J}_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = I_0(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}),$$

ce qui signifie justement que $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})$ est une solution locale du problème (3)-(5).

En appliquant au problème (3)-(5) la règle des multiplicateurs de Lagrange du § 3.2, nous obtenons l'assertion suivante.

Lemme (méthode des multiplicateurs de Lagrange pour le problème de dimension finie auxiliaire). *Il existe des multiplicateurs de Lagrange*

$$\hat{\lambda}_0 \geqslant 0, \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbf{R}^{m*}, \quad \hat{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_N), \quad (6)$$

qui ne sont pas nuls simultanément, tels que pour la fonction de Lagrange

$$\Lambda(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}; \lambda, \mu, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (F_i + \Psi_i) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \alpha_k \quad (7)$$

on a:

1) *les conditions de stationnarité*

$$\hat{\Lambda}_{t_1} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{it_1} + \sum_{i+0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{it_1} = 0, \quad (8)$$

$$\hat{\Lambda}_{t_0} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{it_0} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{it_0} = 0, \quad (9)$$

$$\hat{\Lambda}_{x_0} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{ix_0} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{ix_0} = 0, \tag{10}$$

$$\hat{\Lambda}_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{i\alpha_k} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{i\alpha_k} + \mu_k = 0, \tag{11}$$

où l'on a désigné $\hat{\Lambda}_{\alpha_k} = \Lambda_{\alpha_k}(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}; \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}_0)$, *etc.*;

2) *les conditions de concordance des signes*

$$\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \quad \hat{\mu}_k \leqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, N; \tag{12}$$

3) *les conditions de non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i [F_i(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0}) + \Psi_i(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

4.2.5. Démonstration du principe de maximum. A l'exception d'un seul endroit, qui n'est pas tout à fait trivial, le reste de la démonstration est consacré au déchiffrage des conditions (8) à (13) de 4.2.4. Le principe du maximum proprement dit (ou, sous forme lagrangienne, le principe du minimum), i.e. la relation (11) (ou (10)) de 4.2.2, s'obtient alors des égalités (11) de 4.2.4, autrement dit, des conditions $\hat{\Lambda}_{\alpha_k} = 0$. Chaque telle condition correspond à une des aiguilles qui font partie du « paquet » et si cette aiguille se détermine par la paire (τ_k, v_k), nous obtenons l'inégalité

$$H(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k, \cdot) \leqslant H(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k), \cdot).$$

Ainsi, pour obtenir le principe du maximum, nous devons passer en revue les aiguilles qui correspondent à toutes les paires possibles (τ, v), tandis que notre « paquet » en contient seulement un nombre arbitraire mais fini. La situation est sauvée par des considérations topologiques très simples, basées sur la compacité. En appliquant le « lemme sur la famille centrée », nous pouvons choisir des multiplicateurs de Lagrange « universaux », valables pour l'ensemble de toutes les aiguilles.

A) Existence des multiplicateurs de Lagrange « universels ». Etudions plus en détail les conditions (8) à (13) de 4.2.4 en y substituant les valeurs des dérivées des fonctions F_i et Ψ_i, calculées à l'aide des deux lemmes de 4.2.3, et en prêtant une attention particulière aux termes qui contiennent les paramètres des aiguilles (τ_k, v_k).

Les dérivées des fonctions F_i sont données directement dans le lemme sur les fonctionnelles intégrales; si l'on désigne

$$\begin{aligned} A_i(\tau, v) = f_i(\tau, \hat{x}(\tau), v) - f_i(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) - \\ - p_{0i}(\tau)[\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)] = \\ = \Delta\hat{f}_i(\tau, v) - p_{0i}(\tau)\Delta\hat{\varphi}(\tau, v), \end{aligned} \tag{1}$$

on voit que

$$\hat{F}_{i\alpha_k} = A_i(\tau_k, v_k),$$

alors que les paramètres des aiguilles n'apparaissent pas dans $\hat{F}_{it_0}$, $\hat{F}_{it_1}$, $\hat{F}_{ix_0}$, de sorte que ces dérivées ont la même valeur pour tout « paquet d'aiguilles » de 4.2.3. D'une manière analogue, les dérivées des fonctions

$$\Psi_i(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) = \psi_i(t_0, x_0, t_1, x(t_1; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}))$$

se calculent à l'aide du théorème de composition et du lemme sur le paquet d'aiguilles, et seules les $\hat{\Psi}_{i\alpha_k}$ dépendent des paramètres des aiguilles. Si nous désignons

$$B_i(\tau, v) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) \times \\ \times \Omega(\hat{t}_1, \tau)[\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] = \\ = \hat{\psi}_{ix_1}\Omega(\hat{t}_1, \tau)\Delta\hat{\varphi}(\tau, v), \qquad (2)$$

alors

$$\hat{\Psi}_{i\alpha_k} = B_i(\tau_k, v_k),$$

tandis que les valeurs des dérivées $\hat{\Psi}_{it_0}$, $\hat{\Psi}_{it_1}$, $\hat{\Psi}_{ix_0}$ sont les mêmes pour tout «paquet d'aiguilles».

Nous avons maintenant

$$\hat{\Lambda}_{\alpha_k} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{i\alpha_k} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{i\alpha_k} + \hat{\mu}_k = \\ = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i (A_i(\tau_k, v_k) + B_i(\tau_k, v_k)) + \hat{\mu}_k.$$

Puisque, d'après les conditions (12) et (11) de 4.2.4, on a $\hat{\mu}_k \leqslant 0$ et $\hat{\Lambda}_{\alpha_k} = 0$, on doit avoir les inégalités

$$\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i [A_i(\tau_k, v_k) + B_i(\tau_k, v_k)] \geqslant 0. \qquad (3)$$

Considérons maintenant dans l'espace $\mathbf{R}^{(m+1)*}$ les ensembles suivants:

$$S = \{(\lambda, \lambda_0) \mid \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 = 1\},$$

$$K(\tau, v) = \{(\lambda, \lambda_0) \mid \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (A_i(\tau, v) + B_i(\tau, v)) \geqslant 0\},$$

$$T_l = \{(\lambda, \lambda_0) \mid \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\hat{F}_{it_l} + \hat{\Psi}_{it_l}) = 0\}, \quad l = 0, 1,$$

$$X = \{(\lambda, \lambda_0) \mid \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\hat{F}_{ix_0} + \hat{\Psi}_{ix_0}) = 0\},$$

et enfin l'ensemble Z constitué par tous les (λ, λ_0) pour lesquels $\lambda_0 \geqslant 0$, tandis que λ_i, $i = 1, \ldots, m$, vérifient les conditions de concordance des signes et de non-rigidité complémentaire (12) et (13) de 4.2.4, conditions qui sont identiques à celles (13) et (14) de 4.22.

Tous ces ensembles sont fermés, tandis que la sphère S est en outre compacte, étant un sous-ensemble fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathbf{R}^{(m+1)*}$.

Les conditions de stationnarité (8) à (10) de 4.2.4 correspondent aux inclusions $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in T_1, T_0, X$, les conditions de concordance des signes et de non-rigidité complémentaire, à l'inclusion $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in Z$ (toutes ces conditions sont les mêmes pour tous les paquets d'aiguilles). Les conditions (11) de 4.2.4, qui dépendent des aiguilles, sont vérifiées lorsque $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in K(\tau_k, v_k)$, $k = 1, \ldots, N$. Enfin, puisque les multiplicateurs de Lagrange sont définis à un coefficient de proportionnalité près et ne peuvent s'annuler simultanément, on peut les normer de manière à avoir $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in S$. Par conséquent, l'assertion du lemme du sous-paragraphe précédent signifie que

$$S \cap T_0 \cap T_1 \cap X \cap Z \cap \bigcap_{k=1}^{N} K(\tau_k, v_k) \neq \varnothing. \tag{4}$$

Considérons la famille de sous-ensembles fermés

$$\tilde{K}(\tau, v) = S \cap T_0 \cap T_1 \cap X \cap Z \cap K(\tau, v),$$
$$\tau \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \quad v \in \mathfrak{U}, \tag{5}$$

de l'ensemble compact S.

L e m m e s u r l a f a m i l l e c e n t r é e. *La famille d'ensembles $\tilde{K}(\tau, v)$ possède une intersection non vide.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après (4), tout nombre fini d'ensembles appartenant à $\tilde{K}(\tau, v)$ possède une intersection non vide. Une telle famille d'ensembles est dite *centrée*. D'après un théorème bien connu [voir KF, p. 97], l'intersection d'une famille centrée de sous-ensembles appartenant à un ensemble compact est non vide. ■

Ainsi on peut trouver

$$(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in \bigcap_{\substack{\tau \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \\ v \in \mathfrak{U}}} \tilde{K}(\tau, v) = S \cap T_0 \cap T_1 \cap X \cap Z \cap \bigcap_{\substack{\tau \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \\ v \in \mathfrak{U}}} K(\tau, v). \tag{6}$$

Ce sont précisément les multiplicateurs de Lagrange «universels». En effet, les $\hat{\lambda}_i$ ne s'annulent pas simultanément $((\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in S)$, vérifient les conditions de concordance des signes et de non-rigidité complémentaire $((\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in Z)$, vérifient les conditions $\hat{\Lambda}_{t_l} = 0$, $l = 0, 1$, et $\hat{\Lambda}_{x_0} = 0$ $((\hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \in T_0 \cap T_1 \cap X)$; enfin

$$\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i [A_i(\tau, v) + B_i(\tau, v)] \geqslant 0 \tag{7}$$

pour tous les $\tau \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, $v \in \mathfrak{U}$.

B) Démonstration du principe du maximum. En substituant (1) et (2) dans l'inégalité (7), on peut la mettre sous la forme

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i [\Delta\hat{f}_i(\tau, v) - p_{0i}(\tau)\, \Delta\hat{\varphi}(\tau, v)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1, \tau)\, [\Delta\hat{\varphi}(\tau, v)] =$$

$$= f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) -$$

$$- \hat{p}(\tau)\, [\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))] =$$

$$= -H(\tau, \hat{x}(\tau), v, \hat{p}(\tau)) + H(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \hat{p}(\tau)), \tag{8}$$

où

$$f(\tau, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\tau, x, u), \tag{9}$$

$$\hat{p}(\tau) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_{0i}(\tau) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1, \tau) \tag{10}$$

est la solution de l'équation d'Euler-Lagrange (8a) de 4.2.2, comme nous verrons par la suite, et

$$H(\tau, x, u, p) = p\varphi(\tau, x, u) - f(\tau, x, u) \tag{11}$$

est la fonction de Pontriaguine (comparer à (7) de 4.2.2).

L'inégalité (8), qui est valable pour tous les $\tau \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ et $v \in \mathfrak{U}$, est équivalente au principe du maximum (11) de 4.2.2

$$H(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \hat{p}(\tau)) = \max H(\tau, \hat{x}(\tau), v, \hat{p}(\tau)). \tag{12}$$

C) Démonstration des conditions de stationnarité relativement à $x(\cdot)$. En prenant la dérivée de (10) et en se servant du fait que $p_{0i}(\tau)$ vérifie les équations (18) de 4.2.3, alors que

$$\frac{\partial\Omega(t, \tau)}{\partial\tau} = \Omega(t, \tau)\, \hat{\varphi}_x(\tau)$$

(voir le théorème de 2.5.4), on obtient

$$d\hat{p}(\tau)/d\tau = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \{-p_{0i}(\tau)\hat{\varphi}_x(\tau) + \hat{f}_{ix}(\tau)\} + \\ + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1, \tau)\hat{\varphi}_x(\tau) = \\ = -\hat{p}(\tau)\hat{\varphi}_x(\tau) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_{ix}(\tau) = -\hat{p}(\tau)\hat{\varphi}_x(\tau) + \hat{f}_x(\tau),$$

i.e. $\hat{p}(\cdot)$ est la solution de l'équation d'Euler-Lagrange (8a) de 4.2.2. Ensuite il découle directement de (10) que

$$\hat{p}(\hat{t}_1) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_{0i}(\hat{t}_1) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_1) = \\ = -\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial\hat{l}}{\partial x_1}, \qquad (13)$$

puisque $p_{0i}(\hat{t}_1) = 0$ d'après (18) de 4.2.3, tandis que $\Omega(t, t) \equiv E$. Ici, de même que dans (6) de 4.2.2, l'expression

$$l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1) \qquad (14)$$

est le terminant, tandis que l'égalité (13) obtenue est équivalente à la première des égalités (9a) de 4.2.2.

Enfin la condition $\hat{\Lambda}_{x_0} = 0$, i.e. (10) de 4.2.4, nous donne, après substitution des valeurs des dérivées (12) et (16) de 4.2.3

$$0 = \hat{\Lambda}_{x_0} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{ix_0} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{ix_0} = \\ = -\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_{0i}(\hat{t}_0) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \left(\hat{\psi}_{ix_0} + \hat{\psi}_{ix_1} \frac{\partial\hat{x}}{\partial x_0}\right) = \\ = -\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_{0i}(\hat{t}_0) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\psi}_{ix_0} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\psi}_{ix_1} \Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_0) = \\ = -\hat{p}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{x_0},$$

de sorte que la deuxième condition de transversalité (9a) de 4.2.2 est également vérifiée.

D) Démonstration des conditions de stationnarité relativement à t_i. En substituant les valeurs des dérivées (10), (11), (14), (15) de 4.2.3 dans les conditions $\hat{\Lambda}_{t_0} = \hat{\Lambda}_{t_1} = 0$ [(8) et (9) de 4.2.4], nous obtenons, en nous servant des notations (9) à (11) et de l'égalité (13) déjà démontrée

$$0 = \hat{\Lambda}_{t_1} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{it_1} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{it_1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{f}_i(\hat{t}_1) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \left[\hat{\psi}_{it_1} + \hat{\psi}_{ix_1} \frac{\partial \hat{x}}{\partial t_1} \right] = \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x_1} \hat{\varphi}(\hat{t}_1) =$$

$$= \hat{f}(\hat{t}_1) - \hat{p}(\hat{t}_1) \hat{\varphi}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} = -\hat{H}(t_1) + \hat{l}_{t_1}$$

et

$$0 = \hat{\Lambda}_{t_0} = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{F}_{it_0} + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \hat{\Psi}_{it_0} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i [-\hat{f}_i(\hat{t}_0) + p_{0i}(\hat{t}_0) \hat{\varphi}(\hat{t}_0)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \left[\hat{\psi}_{it_0} + \hat{\psi}_{ix_1} \frac{\partial \hat{x}}{\partial t_0} \right] =$$

$$= -\hat{f}(\hat{t}_0) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_{0i}(\hat{t}_0) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x_1} [-\Omega(\hat{t}_1, \hat{t}_0) \hat{\varphi}(\hat{t}_0)] =$$

$$= -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{p}(\hat{t}_0) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} = \hat{H}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0}.$$

Ainsi nous avons démontré les deux formules (12a) de 4.2.2.

E) Continuité de la fonction $\hat{H}(\cdot)$. De même que la commande $\hat{u}(t)$, la fonction

$$\hat{H}(t) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t)) =$$

$$= -f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{p}(t) \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \hat{p}(t) \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$$

est continue à droite. En outre, chacune des fonctions $H(t, \hat{x}(t), v, \hat{p}(t))$ est continue relativement à t et, si l'on passe à la limite dans l'inégalité

$$H(t, \hat{x}(t), v, \hat{p}(t)) \leqslant H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t)) = \hat{H}(t), \qquad (15)$$

on obtient

$$H(\tau, \hat{x}(\tau), v, \hat{p}(\tau)) \leqslant \lim_{t\to\tau-0} \hat{H}(t) = \hat{H}(\tau-0),$$

d'où l'on tire

$$\hat{H}(\tau) = \sup_{v\in\mathfrak{U}} H(\tau, \hat{x}(t), v, p(\tau)) \leqslant \hat{H}(\tau-0). \tag{16}$$

D'autre part

$$\hat{H}(\tau-0) = \lim_{t\to\tau-0} H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t)) =$$

$$= H(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau-0), \hat{p}(\tau)) = \lim_{v\to\hat{u}(\tau-0)} H(\tau, \hat{x}(\tau), v, \hat{p}(\tau)) \leqslant$$

$$\leqslant H(\tau, \hat{x}(t), \hat{u}(\tau), \hat{p}(\tau)) = \hat{H}(\tau)$$

en vertu de la même inégalité (15). En comparant avec (16), on obtient $\hat{H}(\tau - 0) = \hat{H}(\tau)$, i.e. $\hat{H}(t)$ est également continue à gauche. ■

4.2.6. Démonstration du lemme sur le paquet d'aiguilles. Rappelons que la variation en aiguilles $x(t; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ de la trajectoire de phase optimale $\hat{x}(\cdot)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t; \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

où la variation $u(t; \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ de la commande optimale $\hat{u}(t)$ se détermine à son tour, pour $\alpha_j > 0$, à l'aide des formules

$$u(t; \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}) = \begin{cases} v_i, & t \in \Delta_i = [\tau_i + i\alpha, \tau_i + i\alpha + \alpha_i), \\ \hat{u}(t), & t \notin \bigcup_i \Delta_i; \quad \alpha = \sum_{j=1}^N \alpha_j. \end{cases} \tag{3}$$

Il est commode de diviser la démonstration du lemme sur le paquet d'aiguilles (le lemme de 4.2.3) en deux parties. La première, que nous énoncerons sous forme d'une assertion séparée, consiste à démontrer la convergence uniforme des trajectoires de phase après variation à la fonction $\hat{x}(\cdot)$. Ce n'est pas la continuité par morceaux de la commande qui joue ici le rôle essentiel, mais la convergence intégrale des deuxièmes membres correspondants des équations de relation différentielle (voir la formule (5) plus loin). Pour le souligner, nous généralisons notre assertion aux commandes mesurables (en définissant d'abord d'une manière appropriée la notion de mesurabilité dans le cas où les commandes prennent leur valeur dans un espace

topologique quelconque). La deuxième partie de la démonstration du lemme sur le paquet d'aiguilles est directement liée à la continuité par morceaux et se base sur le théorème classique affirmant que les solutions d'équations différentielles dépendent différentiablement des données initiales.

D é f i n i t i o n. Soient $\mathfrak{U}$ un espace topologique quelconque et I un intervalle fermé de la droite réelle. L'application $u: I \to \mathfrak{U}$ est appelée *mesurable* (dans le sens de Lebesgue) s'il existe une suite finie ou dénombrable de sous-ensembles A_n mesurables disjoints telle que:

a) la restriction $u \mid A_n$ se prolonge à une fonction continue sur l'adhérence $\bar{A}_n$;

b) $I \setminus \bigcup_n A_n$ possède une mesure de Lebesgue nulle.

Il est clair que chaque application continue par morceaux est mesurable dans le sens de cette définition (en guise de A_n il faut prendre les intervalles de continuité). Il est presque aussi évident qu'une fonction mesurable dans le sens de cette définition l'est également dans le sens usuel, quand $\mathfrak{U} \subset \mathbf{R}^r$ [KF, chapitre V, § 4].

En effet, soit $u_n(\cdot)$ une fonction continue sur $\bar{A}_n$ qui coïncide avec $u(\cdot)$ sur A_n. En posant $u_n(t) = 0$ en dehors de $\bar{A}_n$, nous obtenons une fonction mesurable sur $\mathbf{R}$. La fonction caractéristique $\chi_{A_n}(\cdot)$ de l'ensemble A_n est également mesurable et, puisque l'on a $u(t) = \sum_n \chi_{A_n}(t)\, u_n(t)$ presque partout sur I, la fonction $u(t)$ est mesurable elle aussi.

E x e r c i c e. Démontrer que si $\mathfrak{U} \subset \mathbf{R}^r$ et la fonction $u: I \to \mathfrak{U}$ est mesurable dans le sens usuel de Lebesgue, alors elle est également mesurable dans le sens de la définition donnée ci-dessus. I n d i c a t i o n: Servez-vous de la propriété (C) de Lousine ([KF], p. 284).

Dans l'énoncé du lemme suivant, $\mathfrak{A}$ est un espace topologique de Hausdorff [KF, p. 89].

L e m m e 1. *Supposons que les fonctions* φ *et* φ_x *sont continues dans* $G \times \mathfrak{U}$, $\hat{x}: [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to \mathbf{R}^n$ *est la solution de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = \varphi(t, x, \hat{u}(t)) \tag{4}$$

et son graphique $\Gamma = \{(t, \hat{x}(t)) \mid \hat{t}_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}_1\}$ *est contenu dans* G.

Supposons ensuite que $\delta_0 > 0$ *et* $u_\alpha: (\hat{t}_0 - \delta_0, \hat{t}_1 + \delta_0) \to \mathfrak{U}$ *est une famille de commandes mesurables telle que pour tous les* t *et tous les* $\alpha \in \mathfrak{A}$ *les valeurs* $u_\alpha(t)$ *sont contenues dans un certain compact* $\mathcal{K}_0 \subset \mathfrak{U}$.

Supposons enfin que $\hat{u}(t) \equiv u_{\hat{\alpha}}(t)$ *pour un certain* $\hat{\alpha} \in \mathfrak{A}$ *et*

$$\lim_{\alpha \to \hat{\alpha}} \int_{\hat{t}_0 - \delta_0}^{\hat{t}_1 + \delta_0} |\varphi(t, \hat{x}(t), u_\alpha(t)) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))|\, dt = 0. \tag{5}$$

Alors les solutions $X_\alpha(t, t_0, x_0)$ *du problème de Cauchy*

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_\alpha(t)),\ x(t_0) = x_0$$

pour un certain $\hat{\delta} > 0$ *sont définies sur l'intervalle fermé* $[\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 - \hat{\delta}]$ *pour tous les* (t_0, x_0, α) *provenant d'un certain voisinage du point* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{\alpha})$ *dans* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathfrak{A}$ *et pour* $t_0 \to \hat{t}_0$, $x_0 \to \hat{x}_0(\hat{t}_0)$, $\alpha \to \hat{\alpha}$ *on a*

$$X_\alpha(t, t_0, x_0) \to \hat{x}(t)$$

uniformément relativement à $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$.

D é m o n s t r a t i o n. Appliquons au cas considéré le théorème 2 de 2.5.5 en posant

$$F_\alpha(t, x) = \varphi(t, x, u_\alpha(t)). \tag{6}$$

A) Si les A_n sont les ensembles dont il s'agit dans la définition de la mesurabilité appliquée à $u_\alpha(\cdot)$, alors pour un x fixe les fonctions $t \mapsto \varphi(t, x, u_\alpha(t))$ sont continues sur A_n et, par conséquent, $t \mapsto F_\alpha(t, x)$ sont des fonctions mesurables, l'hypothèse A) de 2.5.1 étant remplie. Pour t fixe, les fonctions F_α sont différentiables relativement à x en même temps que φ, de sorte que l'on a également l'hypothèse B) de 2.5.1.

B) Pour chaque compact $\mathscr{K} \subset G$, les fonctions φ et φ_x sont continues sur le compact $\mathscr{K} \times \mathscr{K}_0$ et donc bornées. Désignons

$$M = \max_{\mathscr{K} \times \mathscr{K}_0} |\varphi(t, x, u)|, \quad M_x = \max_{\mathscr{K} \times \mathscr{K}_0} \|\varphi_x(t, x, u)\|;$$

nous voyons que l'on a l'hypothèse B′) du théorème 2 de 2.5.5 avec $\varkappa(t) \equiv M$ et $k(t) \equiv M_x$, puisque par hypothèse $u_\alpha(t) \in \mathscr{K}_0$. La condition D) de ce théorème coïncide avec (5).

Ainsi dans la situation envisagée le théorème 2 de 2.5.5 est appliquable, or il implique l'assertion à démontrer. ■

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e s u r l e p a q u e t d' a i g u i l l e s.

A) Vérifions les hypothèses du lemme précédent. Celles qui se rapportent à φ et $\hat{x}(\cdot)$ font partie des conditions du théorème sur le principe du maximum.

Ci-dessus nous avons déjà supposé que la commande $\hat{u}(\cdot)$ a été prolongée en dehors du segment $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, de sorte que pour $t \leqslant \hat{t}_0$ et pour $t \geqslant \hat{t}_1$ *c'est une fonction continue*. Nous supposerons donc par la suite que $\hat{u}(\cdot)$ est définie sur le segment $\Delta = [\hat{t}_0 - \delta_0, \hat{t}_1 + \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, et ses points de discontinuité sont situés dans l'intervalle ouvert $(\hat{t}_0, \hat{t}_1)$.

Supposons que $t^{(1)} < t^{(2)} < \ldots < t^{(s)}$ sont ces points $t^{(0)} = \hat{t}_0 - \delta_0$, $t^{(s+1)} = \hat{t}_1 + \delta_0$. La fonction

$$u_i(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t^{(i-1)} \leqslant t < t^{(i)}, \\ \hat{u}(t^{(i)} - 0), & t = t^{(i)}, \end{cases}$$

est continue sur le segment $I_i = [t^{(i-1)}, t^{(i)}]$ et l'image $\mathscr{K}_i$ de ce segment par l'application continue $u_i : I \to \mathfrak{U}$ est compacte dans $\mathfrak{U}$, puisque I_i est compact. En vertu des formules (3), les valeurs de la commande $u(t; \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ sont situées dans le compact

$$\mathscr{K}_0 = \bigcup_{i=1}^{s+1} \mathscr{K}_i \cup \{v_1, \ldots, v_N\}.$$

Il reste à vérifier la condition de convergence intégrale (5). Sur le compact

$$\mathscr{K} = \{(t, \hat{x}(t), u) \mid t \in \Delta, \ u \in \mathscr{K}_0\} = \Gamma \times \mathscr{K}_0$$

la fonction continue φ est bornée: $|\varphi| \leqslant M$. Pour des $\alpha_j > 0$ si petits que les semi-intervalles Δ_j ne se coupent pas, nous obtenons à partir des formules (3) la relation

$$\int_{\hat{t}_0 - \delta_0}^{\hat{t}_1 + \delta_0} |\varphi(t, \hat{x}(t), u(t; \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))| \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta_j} |\varphi(t, \hat{x}(t), v_j) - \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 2M\alpha \to 0,$$

avec $\alpha_j \downarrow 0$, de sorte que la condition (5) est satisfaite.

En appliquant le lemme 1, nous voyons que les deux premières assertions du lemme sur le paquet d'aiguilles de 4.2.3 sont valables: pour un $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, la solution $x(t; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ du problème de Cauchy (1), (2), avec (t_0, x_0, α) vérifiant les inégalités

(9) de 4.2.3, est définie sur $\Delta = [\hat{t}_0 - \hat{\delta}, \hat{t}_1 + \hat{\delta}]$ (première assertion), et avec $t_0 \to \hat{t}_0$, $x_0 \to \hat{x}_0$, $\alpha_j \downarrow 0$,

$$x(t;\ t_0,\ x_0,\ \bar{\alpha},\ \bar{\tau},\ \bar{v}) \to \hat{x}(t)$$

uniformément par rapport à $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ (deuxième assertion).

B) Passons maintenant à l'étude de l'application $(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) \to \to x(t_1;\ t_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$. Désignons comme toujours par $X(t, t_0, x_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = \varphi(t,\ x,\ \hat{u}(t)),\ x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

D'après le théorème 1 de 2.5.5, la fonction $X(\cdot, \cdot, \cdot)$ est définie et continue dans le domaine $(\hat{t}_0 - \delta_0, \hat{t}_1 + \delta_0) \times \hat{G}$, où $\hat{G}$ est un certain voisinage du graphique Γ de la solution $\hat{x}(\cdot)$. Si l'on restreint le domaine de définition de manière que t_0 et t ne puissent prendre des valeurs égales aux points de discontinuité $t^{(i)}$ de la commande $\hat{u}(\cdot)$, alors l'équation différentielle dans (7) vérifie les hypothèses du théorème classique sur la dépendance différentiable de la solution des données initiales (voir 2.5.7), de sorte que $X(t, t_0, x_0)$ sera une fonction continûment différentiable relativement à l'ensemble de ses variables. En particulier X est continûment différentiable dans certains voisinages des points $(\hat{t}_k, \hat{t}_k, \hat{x}(\hat{t}_k))$, puisque dans certains voisinages des points $\hat{t}_k$ la commande $\hat{u}(\cdot)$ est continue en vertu de nos hypothèses.

Désignons ensuite par $\Xi(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ la valeur, pour $t = \hat{t}_1$, de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) à condition initiale $x(\hat{t}_0) = \xi$, i. e.

$$\Xi(\xi,\ \bar{\alpha},\ \bar{\tau},\ \bar{v}) = x(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0,\ \xi,\ \bar{\alpha},\ \bar{\tau},\ \bar{v}). \tag{8}$$

D'après la formule (13) de 2.5.5 et les formules (3) qui déterminent la commande $u(t;\ \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$, on a

$$x(t_1;\ t_0,\ x_0,\ \bar{\alpha},\ \bar{\tau},\ \bar{v}) = X(t_1,\ \hat{t}_1,\ \Xi(X(\hat{t}_0,\ t_0,\ x_0),\ \bar{\alpha},\ \bar{\tau},\ \bar{v})) \tag{9}$$

(de t_0 à $\hat{t}_0$ nous trouvons la solution de l'équation $\dot{x} = \varphi(t, x, u)$ avec la commande $u = \hat{u}(t)$, ensuite de $\hat{t}_0$ à $\hat{t}_1$ avec la commande $u = u(t;\ \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{u})$ et, enfin, de $\hat{t}_1$ à t_1 à nouveau avec la commande $u = \hat{u}(t)$). Il est à noter que, de même que la formule (13) de 2.5.5, la formule (9) est valable pour toute disposition des points t_i relativement à $\hat{t}_i$.

Si nous pouvons maintenant prolonger l'application $(\xi, \bar{\alpha}) \mapsto \Xi(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ à une application de classe C^1 définie dans un certain voisinage du point $(\hat{x}(\hat{t}_0), \bar{0})$ (i.e. nous pouvons la prolonger aux valeurs négatives de α_j en conservant la continuité de la dérivée), alors, d'après la formule (9), l'application $(t_1, t_0, x_0, \bar{\alpha}) \mapsto x(t_1; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ sera prolongée également à un certain voisinage du point $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})$ et, en vertu du théorème de 2.2.2, elle sera continûment différentiable, étant la composée de trois applications continûment différentiables:

$$(t_0, x_0) \mapsto X(\hat{t}_0, t_0, x_0),\ (\xi, \bar{\alpha}) \mapsto \Xi(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}),\ (t_1, \eta_0) \mapsto X(t_1, \hat{t}_1, \eta_0).$$

C) Soit $\tau \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1)$, supposons que $v \in_j \mathfrak{U}$ sont fixes. Désignons par $Y_v(t, t_0, y_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{y} = \varphi(t, y, v), \quad y(t_0) = y_0. \tag{10}$$

En vertu du théorème d'existence local (voir 2.5.2) et du théorème classique sur la différentiabilité des solutions relativement aux données initiales (voir 2.5.7) $Y_v(t, t_0, y_0)$ est définie et continûment différentiable dans un certain voisinage du point $(\tau, \tau, \hat{x}(\tau))$.

Si τ est un point de discontinuité de la commande $\hat{u}(\cdot)$, i.e. $\hat{u}(\tau-0) \neq \hat{u}(\tau)$, nous envisageons en plus de $\hat{u}(\cdot)$ la commande

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \geqslant \tau, \\ \hat{u}(\tau), & t < \tau. \end{cases}$$

Puisque $\tilde{u}(\cdot)$ est continue dans un certain voisinage du point τ, la solution $\tilde{X}(t, t_0, x_0)$ du problème de Cauchy

$$\dot{x} = \varphi(t, x, \tilde{u}(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

est également définie et continûment différentiable dans un voisinage du point $(\tau, \tau, \hat{x}(\tau))$. Mais si τ est un point de continuité de $\hat{u}(\cdot)$, alors $X(t, t_0, x_0)$ elle-même possède la même propriété, et dans les formules qui suivent on peut supposer que $\tilde{X} \equiv X$.

Ajoutons à la famille $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$ les points $\tau_0 = \hat{t}_0$ et $\tau_{N+1} = \hat{t}_1$, de sorte que $\hat{t}_0 = \tau_0 < \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N < \tau_{N+1} = \hat{t}_1$; envisageons la composée des applications

$$\tilde{\Xi}(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}) = P \circ X_N \circ Z_N \circ \ldots \circ X_k \circ Z_k \circ X_{k-1} \circ \ldots \circ Z_1 \circ X_0, \tag{12}$$

où $P(\xi, \bar{\alpha}) = \xi$,

$$X_k(\xi, \bar{\alpha}) = (X(\tau_{k+1}, \tau_k, \xi), \bar{\alpha}) \tag{13}$$

et

$$Z_k(\xi, \bar{\alpha}) = (\tilde{X}(\tau_k, \tau_k + k\alpha + \alpha_k, Y_{v_k}(\tau_k + k\alpha + \alpha_k, \tau_k + k\alpha, \tilde{X}(\tau_k + k\alpha, \tau_k, \xi))), \bar{\alpha}). \quad (14)$$

Puisque X_k et Z_k sont continûment différentiables dans un voisinage du point $p_k = (\hat{x}(\tau_k), \bar{0})$ et de plus $X_k(p_k) = p_{k+1}$, $Z_k(p_k) = p_k$, tandis que P est linéaire, la composée (12) est définie et continûment différentiable dans un voisinage du point $p_0 = (\hat{x}(\hat{t}_0), \bar{0}) = (\hat{x}_0, \bar{0})$.

L e m m e 2. *Si tous les* $\alpha_k > 0$ *sont suffisamment petits, alors*

$$\tilde{\Xi}(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}) = \Xi(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}) = x(\hat{t}_1; \hat{t}_0, \xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}). \quad (15)$$

D é m o n s t r a t i o n. Désignons plus brièvement $x(t) = x(t; \hat{t}_0, \xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$. Si tous les $\alpha_k > 0$ sont suffisamment petits, les semi-intervalles Δ_i qui font partie de la définition (3) sont disjoints deux par deux et situés entre les points $\hat{t}_0$ et $\hat{t}_1$ en ordre croissant de numéros.

Soit $s_i = \tau_i + i\alpha = \tau_i + i \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$ l'extrémité gauche du semi-intervalle Δ_i, $s_0 = \tau_0 = \hat{t}_0$, $s_{N+1} = \tau_{N+1} = \hat{t}_1$. Démontrons par récurrence que

$$x(s_k) = X(s_k, \tau_k, \xi_k), \quad (16)$$

où $\xi_0 = \xi$ et

$$\xi_k = P \circ X_{k-1} \circ Z_{k-1} \circ X_{k-2} \circ \ldots \circ Z_1 \circ X_0(\xi, \bar{\alpha}), \qquad k \geqslant 1; \quad (17)$$

en particulier, $\xi_1 = P \circ X_0(\xi, \bar{\alpha}) = X(\tau_1, \tau_0, \xi)$. Puisque pour $\hat{t}_0 = \tau_0 \leqslant t < s_1$ les équations différentielles de (7) et (1) coïncident et $x(\tau_0) = \xi = X(\tau_0, \tau_0, \xi_0)$ nous obtenons $x(t) \equiv X(t, \tau_0, \xi_0)$ dans ce semi-intervalle; si l'on passe à la limite pour $t \to s_1$ en tenant compte de l'identité

$$X(s_1, \tau_0, \xi_0) = X(s_1, \tau_1, X(\tau_1, \tau_0, \xi_0)),$$

on obtient (16) pour $k = 1$.

Supposons maintenant que (16) est vérifié pour un certain k. Pour passer par la solution $x(\cdot)$ de s_k à s_{k+1}, il faut, en vertu de (3), procéder de la manière suivante. De s_k à $s_k + \alpha_k$, il faut trouver la solution de l'équation (10) avec $v = v_k$ et la condition initiale $y_0 = x(s_k)$, obtenant ainsi $x(s_k + \alpha_k) = Y_{v_k}(s_k + \alpha_k, s_k, x(s_k))$. Ensuite, de $s_k + \alpha_k$ (i.e. de l'extrémité droite de Δ_k) jusqu'à s_{k+1} (l'extrémité gauche de Δ_{k+1}), nous trouvons la solution de (7) à condition initiale $x_0 = x(s_k + \alpha_k)$, obtenant l'égalité

$$x(s_{k+1}) = X(s_{k+1}, s_k + \alpha_k, x(s_k + \alpha_k)) = X(s_{k+1}, s_k + \alpha_k, Y_{v_k}(s_k + \alpha_k, s_k, x(s_k))).$$

En vertu de (13) de 2.5.5, on a l'identité

$$X(t, \tau, X(\tau, t_0, x_0)) \equiv X(t, t_0, x_0).$$

En se servant de cette identité et de (16), valable par hypothèse de récurrence, on obtient successivement

$$x(s_{k+1}) = X(s_{k+1}, \tau_{k+1}, X(\tau_{k+1}, \tau_k, X(\tau_k, s_k + \alpha_k, x(s_k + \alpha_k)))) = X(s_{k+1}, \tau_{k+1}, X(\tau_{k+1}, \tau_k, X(\tau_k, s_k + \alpha_k, Y_{v_k}(s_k + \alpha_k, s_k, X(s_k, \tau_k, \xi_k))))). \quad (18)$$

Remarquons maintenant que si tous les α_k sont positifs, alors $\tau_k < s_k < s_k + \alpha_k$, et comme pour $t \geqslant \tau_k$ les équations (7) et (11) coïncident, on a $X(\tau_k, s_k + \alpha_k, \xi) = \tilde{X}(\tau_k, s_k + \alpha_k, \xi)$ et $X(s_k, \tau_k, \xi_k) = \tilde{X}(s_k, \tau_k, \xi_k)$. Par conséquent, en utilisant d'abord les définitions (13) et (14), et ensuite (17), nous obtenons

$$X(\tau_{k+1}, \tau_k, X(\tau_k, s_k + \alpha_k, Y_{v_k}(s_k + \alpha_k, s_k, X(s_k, \tau_k, \xi_k)))) = P \circ X_k \circ Z_k(\xi_k, \bar{\alpha}) = P \circ X_k \circ Z_k \circ X_{k-1} \circ \ldots \circ X_0(\xi, \bar{\alpha}) = \xi_{k+1}.$$

Ainsi (18) coïncide avec l'équation (16) dans laquelle k est remplacé par $k+1$, de sorte que (16) est démontré pour tous les $k \geqslant 1$. Il ne reste qu'à noter que (16) se transforme, pour $k = N+1$, en égalité

$$x(\hat{t}_1) = X(\hat{t}_1, \hat{t}_1, \xi_{N+1}) = \xi_{N+1} = P \circ X_N \circ Z_N \circ \ldots \circ X_0(\xi, \bar{\alpha}) = \tilde{\Xi}(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$$

(la dernière relation découle de (12)) et, puisque par définition $x(\hat{t}_1) = \Xi(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$, la relation (15) est démontrée. ■

Comme nous l'avons déjà remarqué, la composée (12) est continûment différentiable dans un voisinage du point $(\hat{x}_0, \bar{0})$. Par conséquent, $\Xi(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ (qui avait précédemment été définie pour $\alpha_j > 0$) possède un prolongement continûment différentiable à ce voisinage. En vertu de B), il en découle que $x(t_1; t_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v})$ possède (pour des $\bar{\tau}, \bar{v}$ fixes) un prolongement continûment différentiable à un voisinage du point $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})$.

Il ne reste qu'à démontrer les formules (10) à (13) de 4.2.3 pour les dérivées partielles de cette fonction au point $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \bar{0})$.

D) Remarquons tout d'abord que

$$x(t;\ t_0, x_0, \bar{0}, \bar{\tau}, \bar{v}) \equiv X(t, t_0, x_0), \quad (19)$$

$$x(t;\ t_0, \hat{x}(t_0), \bar{0}, \bar{\tau}, \bar{v}) \equiv X(t, t_0, \hat{x}(t_0)) = \hat{x}(t), \quad (20)$$

$$x(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0, x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}) \equiv \Xi(x_0, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}). \quad (21)$$

En vertu de (19) et (21), la dérivée partielle relativement à x_0 peut être trouvée en appliquant le théorème de 2.5.6

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0}(\hat{t}_1 ;\ \hat{t}_0,\ x_0,\ \overline{0},\ \overline{\tau},\ \overline{v})\Big|_{x_0=\hat{x}(\hat{t}_0)} = \frac{\partial \Xi\,(x_0,\ \overline{0},\ \overline{\tau},\ \overline{v})}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\hat{x}(\hat{t}_0)} =$$

$$= \frac{\partial X\,(\hat{t}_1,\ \hat{t}_0,\ x_0)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=\hat{x}(\hat{t}_0)} = \Omega\,(\hat{t}_1,\ \hat{t}_0), \qquad (22)$$

où $\Omega\,(t,\ \tau)$ est la matrice fondamentale des solutions de l'équation en variations

$$\dot{z} = \varphi_x(t,\ \hat{x}(t),\ \hat{u}(t))\,z$$

(dans la formule (2) de 2.5.6 il faut poser $F\,(t,\ x) = \varphi\,(t,\ x,\ \hat{u}\,(t))$ et se servir de (20)). Ainsi, la relation (12) de 4.2.3 est démontrée.

Servons-nous maintenant de la formule (9) en remarquant d'après B) que les dérivées de la fonction $X\,(t,\ t_0,\ x_0)$ peuvent être calculées dans un voisinage des points $(\hat{t}_k,\ \hat{t}_k,\ \hat{x}\,(\hat{t}_k))$, $k = 0,\ 1$, à l'aide du théorème classique sur la différentiabilité relativement aux données initiales (formules (3) à (6) de 2.5.7, dans lesquelles on a à nouveau posé $F\,(t,\ x) = \varphi\,(t,\ x,\ \hat{u}\,(t))$. En prenant la dérivée de (9) et en tenant compte de la formule (22) déjà trouvée et du fait que d'après (20) et (21)

$$\Xi\,(X\,(\hat{t}_0,\ \hat{t}_0,\ \hat{x}\,(\hat{t}_0)),\ \overline{0},\ \overline{\tau},\ \overline{v}) = \Xi\,(\hat{x}\,(\hat{t}_0),\ \overline{0},\ \overline{\tau},\ \overline{v}) =$$

$$= x\,(\hat{t}_1;\ \hat{t}_0,\ \hat{x}\,(\widehat{t_0}),\ \overline{0},\ \overline{\tau},\ \overline{v}) = \hat{x}\,(\hat{t}_1),$$

on obtient

$$\partial \hat{x}/\partial t_1 = \partial X\,(\widehat{t_1},\ \hat{t}_1,\ \hat{x}\,(\widehat{t_1}))/\partial t_1 = \varphi\,(\widehat{t_1},\ \widehat{x}\,(\widehat{t_1}),\ \widehat{u}\,(\hat{t}_1)),$$

$$\partial \widehat{x}/\partial t_0 = \partial \Xi\,(\xi,\ \overline{0},\ \overline{\tau},\ \overline{v})/\partial \xi\,|_{\xi=\hat{x}(\hat{t}_0)}\ \partial X\,(\widehat{t_0},\ t_0),$$

$$\hat{x}\,(\hat{t}_0)/\partial t_0|_{t_0=\widehat{t_0}} = \Omega\,(\widehat{t_1},\ \widehat{t_0})\,[-\varphi\,(\widehat{t_0},\ \widehat{x}\,(\widehat{t_0}),\ \widehat{u}\,(\widehat{t_0}))].$$

Ceci démontre les relations (10) et (11) de 4.2.3.

Supposons maintenant que $\alpha_i = 0$, $i \neq k$ et $\alpha_k > 0$. Désignons pour simplifier

$$x\,(t,\ \alpha_k) = x\,(t;\ \hat{t}_0,\ \widehat{x}\,(\hat{t}_0),\ (0,\ \ldots,\ 0,\ \alpha_k,\ \ldots,\ 0),\ \overline{\tau},\ \overline{v}).$$

Pour un tel choix de $\overline{\alpha}$, en vertu de (3), les équations différentielles (1) et (7) coïncident dans le semi-intervalle $\widehat{t_0} \leqslant t < \tau_k + k\alpha_k$ et l'on a $x\,(\widehat{t_0},\ \alpha_k) = \widehat{x}\,(t_0)$, donc, dans ce même semi-intervalle, $x\,(t,\ \alpha_k) \equiv \widehat{x}\,(t)$; en passant à la limite, on obtient

$$x\,(\tau_k + k\alpha_k,\ \alpha_k) = \widehat{x}\,(\tau_k + k\alpha_k). \qquad (23)$$

Ensuite pour $\tau_k + k\alpha_k \leqslant t < \tau_k + k\alpha_k + \alpha_k$ on trouve la solution de l'équation différentielle (10) à condition initiale (23) et avec $v = v_k$, d'où l'on tire

$$x(\tau_k + k\alpha_k + \alpha_k, \alpha_k) = \\ = Y_{v_k}(\tau_k + k\alpha_k + \alpha_k, \tau_k + k\alpha_k, \hat{x}(\tau_k + k\alpha_k)). \qquad (24)$$

Dans l'intervalle restant $\tau_k + (k+1)\alpha_k \leqslant t \leqslant \hat{t}_1$, nous faisons de nouveau appel à l'équation (7), mais maintenant avec la donnée initiale (24). Nous diviserons cet intervalle en deux en fixant s de manière que l'intervalle (τ_k, s) ne contienne pas de points de discontinuité de $\hat{u}(\cdot)$. La valeur de $\alpha_k > 0$ sera supposée si petite que l'on a $\tau_k < \tau_k + (k+1)\alpha_k < s$. Alors

$$x(\hat{t}_1, \alpha_k) = X(\hat{t}_1, s, x(s, \alpha_k)) = \\ = X(\hat{t}_1, s, X(s, \tau_k + (k+1)\alpha_k, x(\tau_k + (k+1)\alpha_k, \alpha_k))) = \\ = X(\hat{t}_1, s, X(s, \tau_k + (k+1)\alpha_k, Y_{v_k}(\tau_k + (k+1)\alpha_k, \tau_k + \\ + k\alpha_k, \hat{x}(\tau_k + k\alpha_k))).$$

En calculant la dérivée de cette formule, il faut prendre en considération les égalités suivantes:

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(\hat{t}_1, s, x_0)|_{x_0 = x(s,\,0) = \hat{x}(s)} = \Omega(\hat{t}_1, s)$$

(voir (1) de 2.5.6 ; $\hat{t}_1$ et s sont fixes) ;

$$\frac{\partial X}{\partial t_0}(s, t_0, x(\tau_k, 0))|_{t_0=\tau_k} = -\Omega(s, \tau_k)\,\varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k)),$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_0}(s, \tau_k, x_0)|_{x_0 = x(\tau_k,\,0) = \hat{x}(\tau_k)} = \Omega(s, \tau_k)$$

(voir (5) et (6) de 2.5 7 ; le théorème classique est applicable, puisque sur le segment $[\tau_k, s]$ la commande $\hat{u}(\cdot)$ est continue et $\tau_k < \tau_k + (k+1)\alpha_k < s$) ;

$$\frac{\partial Y_{v_k}}{\partial t}(t, \tau_k, \hat{x}(\tau_k))|_{t=\tau_k} = \varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k),$$

$$\frac{\partial Y_{v_k}}{\partial t_0}(\tau_k, t_0, \hat{x}(\tau_k))|_{t_0=\tau_k} = -\varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k),$$

$$\frac{\partial Y_{v_k}}{\partial y_0}(\tau_k, \tau_k, y_0) = E$$

(dans les formules (4) à (6) de 2.5.7 il faut poser $F(t, x) = \varphi(t, x, v_k)$ et prendre en considération le fait que toujours $\Omega(t, t) = E$) ; enfin $\dot{\hat{x}}(\tau_k) = \varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k))$ découle de (7).

Ainsi,

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial x}{\partial \alpha_k}(\hat{t}_1, \alpha_k)|_{\alpha_k=0} =$$

$$= \frac{\partial X}{\partial x_0}(\hat{t}_1, s, x_0)|_{x_0=\hat{x}(s)} \left\{ \frac{\partial X(s, \tau_k, \hat{x}(\tau_k))}{\partial t_0}(k+1) + \right.$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial x_0}(s, \tau_k, \hat{x}(\tau_k)) \left[\frac{\partial Y}{\partial t}(\tau_k, \tau_k, \hat{x}(\tau_k))(k+1) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial Y}{\partial t_0}(\tau_k, \tau_k, \hat{x}(\tau_k))\, k + \frac{\partial Y}{\partial y_0}(\tau_k, \tau_k, \hat{x}(\tau_k))\, \dot{\hat{x}}(\tau_k)\, k \right] \right\} =$$

$$= \Omega(\hat{t}_1, s)\{-\Omega(s, \tau_k)\, \varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k))(k+1) +$$

$$+ \Omega(s, \tau_k)\, [\varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k)(k+1) - \varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k)\, k +$$

$$+ \varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k)\, k]\} =$$

$$= \Omega(\hat{t}_1, \tau_k)\, [\varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k) - \varphi(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k))],$$

ce qui démontre (13) de 4.2.3; l'égalité $\Omega(\hat{t}_1, s)\, \Omega(s, \tau_k) = \Omega(\hat{t}_1, \tau_k)$ a lieu d'après la propriété principale de la matrice fondamentale (voir (11) de 2.5.4).

4.2.7. Démonstration du lemme sur les fonctionnelles intégrales. Soient $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, $f = (f_0, f_1, \ldots, f_m)$, $F = (F_0, F_1, \ldots$ $\ldots, F_m)$ (les fonctions F_i sont définies dans l'énoncé du lemme dans 4.2.3), $u(t; \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})$ et $x(t; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})$ ont la même signification que dans les sous-paragraphes 4.2.3 et 4.2.6.

Envisageons pour $\alpha_k > 0$ le problème de Cauchy pour le système d'ordre $(n + m + 1)$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t, x, \xi, u(t; \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})) = \begin{pmatrix} \varphi(t, x, u(t; \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})) \\ f(t, x, u(t; \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \xi(t_0) = 0.$$

Ici, les équations pour x ne contiennent pas ξ et coïncident avec (2), 4.2.6; $x(t; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v})$ est donc leur solution, alors, comme on voit facilement,

$$F(t_1, t_0, x_0, \overline{\alpha}) \equiv \xi(t_1; t_0, x_0, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{v}).$$

Par conséquent, la possibilité de prolonger cette fonction aux valeurs de α_k non positives et la différentiabilité continue dans un voisinage de $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0)$ découlent du lemme sur le paquet d'aiguilles appliqué au système (1), tandis que les valeurs des dérivées s'obtiennent des

formules semblables à (10) à (13) de 4.2.3:

$$\frac{\partial \widehat{\tilde{x}}}{\partial t_1} = \widehat{\tilde{\varphi}}(\widehat{t}_1), \quad \frac{\partial \widehat{\tilde{x}}}{\partial t_0} = -\tilde{\Omega}(\widehat{t}_1, \widehat{t}_0)\,\widehat{\tilde{\varphi}}(\widehat{t}_0),$$
$$\frac{\partial \widehat{\tilde{x}}}{\partial \tilde{x}_0} = \tilde{\Omega}(\widehat{t}_1, \widehat{t}_0), \quad \frac{\partial \widehat{\tilde{x}}}{\partial \alpha_k} = \tilde{\Omega}(\widehat{t}_1, \tau_k)\,\Delta\widehat{\tilde{\varphi}}(\tau_k, v_k), \tag{2}$$

où

$$\tilde{\Omega}(t, \tau) = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix},$$

est la matrice fondamentale des solutions du système d'équations en variations

$$\dot{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \widehat{\tilde{\varphi}}_{\tilde{x}}(t) \begin{pmatrix} z \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{3}$$

(Ω_{ij} sont des blocs rectangulaires dans la matrice $\tilde{\Omega}$ de dimensions $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ respectivement). Compte tenu du fait que $\tilde{\varphi}$ ne dépend pas de ξ, nous tirons de (3) que $\tilde{\Omega}$ est la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle des blocs de matrices

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_x(t) & 0 \\ \widehat{f}_x(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \Omega_{11}(\tau, \tau) & \Omega_{12}(\tau, \tau) \\ \Omega_{21}(\tau, \tau) & \Omega_{22}(\tau, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En trouvant successivement les solutions des quatre équations matricielles qui constituent (4), on obtient

$$d\Omega_{11}(t, \tau)/dt = \widehat{\varphi}_x(t)\,\Omega_{11}(t, \tau), \quad \Omega_{11}(\tau, \tau) = E_n,$$

d'où l'on voit que $\Omega_{11}(t, \tau) = \Omega(t, \tau)$ est la matrice fondamentale du système (3) de 4.2.3. Les équations

$$d\Omega_{12}(t, \tau)/dt = \widehat{\varphi}_x(t)\,\Omega_{12}(t, \tau), \; \Omega_{12}(\tau, \tau) = 0,$$

sont satisfaites par $\Omega_{12}(t, \tau) \equiv 0$ et il ne peut y avoir d'autres solutions d'après le théorème d'unicité. Par ailleurs

$$d\Omega_{21}(t, \tau)/dt = \widehat{f}_x(t)\,\Omega_{11} = \widehat{f}_x(t)\,\Omega(t, \tau), \; \Omega_{21}(t, \tau) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Omega_{21}(t, \tau) = \int_\tau^t \widehat{f}_x(s)\,\Omega(s, \tau)\,ds.$$

En particulier,

$$-\Omega_{21}(\hat{t}_1, \tau) = p_0(\tau) = (p_{00}(\tau), \ldots, p_{0m}(\tau))$$

est la solution du problème de Cauchy (18) de 4.2.3 (voir (14) dans 2.5.4 ; on peut aussi s'en convaincre directement en prenant la dérivée par rapport à τ et en se servant des propriétés de la matrice fondamentale décrites dans le même théorème de 2.5.4. Enfin

$$d\Omega_{22}(t, \tau)/dt = \hat{f}_x(t)\,\Omega_{12}(t, \tau) = 0, \quad \Omega_{22}(\tau, \tau) = E_m,$$

d'où $\Omega_{22}(t, \tau) \equiv E_m$. Ainsi

$$\widetilde{\Omega}(\widehat{t_1}, \tau) = \begin{pmatrix} \Omega(\widehat{t_1}, \tau) & 0 \\ -p_0(\tau) & E_m \end{pmatrix}.$$

Substituant ce résultat dans (2) et séparant tout ce qui se rapporte à $\xi(t_1;\ t_0,\ x_0,\ \overline{\alpha},\ \overline{\tau},\ \overline{v}) = F(t_1,\ t_0,\ \overline{x}_0,\ \overline{\alpha})$ nous obtenons

$$\partial\widehat{F}/\partial t_1 = \partial\widehat{\xi}/\partial t_1 = \widehat{f}(\widehat{t_1}),$$

$$\partial\widehat{F}/\partial t_0 = \partial\widehat{\xi}/\partial t_0 = -\Omega_{21}(\widehat{t_1}, \widehat{t_0})\,\widehat{\varphi}(\widehat{t_0}) - \Omega_{22}(\widehat{t_1}, \widehat{t_0})\,\widehat{f}(\widehat{t_0}) =$$

$$= p_0(\widehat{t_0})\,\widehat{\varphi}(\widehat{t_0}) - \widehat{f}(\widehat{t_0}),$$

$$\partial\hat{F}/\partial x_0 = \partial\hat{\xi}/\partial x_0 = \Omega_{21}(\hat{t}_1, \hat{t}_0) = -p_0(\hat{t}_0),$$

$$\partial\hat{F}/\partial\alpha_k = \partial\hat{\xi}/\partial\alpha_k = \Omega_{21}(\hat{t}_1, \tau_k)\,\Delta\hat{\varphi}(\tau_k, v_k) +$$

$$+\Omega_{22}(\hat{t}_1, \tau_k)\,\Delta\hat{f}(\tau_k, v_k) = -p_0(\tau_k)\,\Delta\hat{\varphi}(\tau_k, v_k) + \Delta\hat{f}(\tau_k, v_k),$$

ce qui coïncide avec (14) à (17) de 4.2.3. ∎

§ 4.3*. Problèmes de commande optimale linéaires relativement aux variables de phase

Ce paragraphe est consacré à une classe spéciale de problèmes de commande optimale. Cette classe est suffisamment importante du point de vue des applications, mais ce n'est pas seulement pour cela qu'elle nous intéresse. Sur l'exemple des problèmes à structure linéaire relativement aux variables de phase, on peut montrer le plus clairement une des idées les plus fondamentales de toute la théorie. Il s'agit de la « convexité cachée » qui est toujours présente dans les problèmes de commande optimale. En fin de compte, c'est justement elle qui donne la possibilité d'écrire la condition nécessaire sous forme de « principe du maximum », i.e. sous une forme typique pour les problèmes de programmation convexe. Et si dans le paragraphe précédent nous avions cherché à souligner la relation entre les problèmes de commande optimale et la théorie générale des problèmes d'extrémum différentiables, ici, c'est leur relation avec l'analyse convexe qui passe au premier plan.

Remarquons également que les conditions nécessaires d'extrémum rejoignent presque entièrement les conditions suffisantes, ce qui est typique des problèmes de programmation convexe. Enfin, et ceci est également d'importance pour faire apparaître la convexité cachée, dans ce paragraphe nous allons considérer non seulement les commandes continues par morceaux mais aussi les commandes mesurables.

4.3.1. Réduction du problème de commande optimale linéaire pour les variables de phase à un problème du type de Liapounov. Soient $\Delta = [t_0, t_1]$ un intervalle fermé fixe de la droite numérique $a_i: \Delta \to \mathbf{R}^{n*}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, et $A: \Delta \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ des fonctions vectorielle et matricielle intégrables; $\mathfrak{U}$ un espace topologique, $f_i: \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, et $F(\cdot, \cdot): \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}^n$ des fonctions continues; γ_{0i}, γ_{1i}, $i = 0, 1, \ldots, m$, des éléments de $\mathbf{R}^{n*}$ et c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, des nombres.

Le problème d'extrémum

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\Delta (a_0(t)\,x(t) + f_0(t, u(t)))\,dt + \gamma_{00}x(t_0) + \gamma_{10}x(t_1) \to \inf,$$

$$\dot{x} = A(t)\,x + F(t, u(t)), \quad u(t) \in \mathfrak{U}, \tag{1}$$

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\Delta (a_i(t)\,x(t) + f_i(t, u(t)))\,dt + \gamma_{0i}x(t_0) + \gamma_{1i}x(t_1) \leqslant c_i,$$

dans lequel les expressions qui se rapportent à la trajectoire de phase x apparaissent linéairement, est appelé *problème de commande optimale linéaire relativement aux variables de phase.* On peut, bien entendu, considérer ce problème comme un cas particulier du problème général de commande optimale (voir § 4.2). Toutefois ici nous allons quelque peu élargir la famille des processus admissibles.

Désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des applications $u: \Delta \to \mathfrak{U}$ mesurables (dans le sens de la définition de 4.2.6) telles que les fonctions $t \mapsto f_i(t, u(t))$ et $t \mapsto F(t, u(t))$ sont intégrables. La paire $(x(\cdot), u(\cdot))$ est appelée *processus admissible* si $x(\cdot): \Delta \to \mathbf{R}^n$ est une fonction vectorielle absolument continue (voir 2.1.8), $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, on a

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + F(t, u(t))$$

presque partout et les inégalités $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \leqslant c_i$ se vérifient. Un processus admissible $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ est appelé *optimal* s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout processus admissible $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifiant la condition $\| x(\cdot) - \hat{x}(\cdot) \|_{C(\Delta, \mathbf{R}^n)} < \varepsilon$ on a l'inégalité

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot)) \geqslant J_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)).$$

Nous montrerons maintenant que la structure linéaire permet de transformer le problème (1) en une forme dans laquelle $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$ sont dans un certain sens séparés (et, en particulier, il n'y a plus de relation différentielle).

Soit $\Omega(\cdot, \cdot)$ la matrice fondamentale (voir 2.5.4) des solutions du système linéaire homogène

$$\dot{x} = A(t)\,x. \qquad (2)$$

D'après la formule (13) de 2.5.4,

$$x(t) = \Omega(t, t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Omega(t, \tau)\,F(\tau, u(\tau))\,d\tau. \qquad (3)$$

Substituant (3), nous pouvons transformer les fonctionnelles du problème (1):

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{a_i(t)\left[\Omega(t, t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Omega(t, \tau)\,F(\tau, u(\tau))\,d\tau\right]\right\} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, u(t))\,dt + \gamma_{0i}x(t_0) +$$

$$+ \gamma_{1i}\left[\Omega(t_1, t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Omega(t_1, \tau)\,F(\tau, u(\tau))\,d\tau\right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t} a_i(t)\,\Omega(t, \tau)\,F(\tau, u(\tau))\,d\tau\,dt + \int_{t_0}^{t_1} f_i(\tau, u(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \left\{\int_{t_0}^{t_1} a_i(t)\,\Omega(t, t_0)\,dt + \gamma_{0i} + \gamma_{1i}\Omega(t_1, t_0)\right\} x(t_0) +$$

$$+ \gamma_{1i}\int_{t_0}^{t_1} \Omega(t_1, \tau)\,F(\tau, u(\tau))\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{\int_{\tau}^{t_1} a_i(t)\,\Omega(t, \tau)\,dt\,F(\tau, u(\tau)) +\right.$$

$$\left. + f_i(\tau, u(\tau)) + \gamma_{1i}\Omega(t_1, \tau)\,F(\tau, u(\tau))\right\} d\tau +$$

$$+ \left\{\int_{t_0}^{t_1} a_i(t)\,\Omega(t, t_0)\,dt + \gamma_{0i} + \gamma_{1i}\Omega(t_1, t_0)\right\} x(t_0) =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} G_i(\tau, u(\tau))\,d\tau + \beta_i x(t_0), \qquad (4)$$

où

$$G_i(\tau, u) = p_i(\tau) F(\tau, u) - f_i(\tau, u), \tag{5}$$

$$\beta_i = \gamma_{0i} - p_i(t_0), \tag{6}$$

$$p_i(\tau) = -\gamma_{1i}\Omega(t_1, \tau) - \int_\tau^{t_1} a_i(t)\,\Omega(t, \tau)\,dt, \tag{7}$$

$$i = 0, 1, \ldots, m.$$

Le problème (1) se met donc sous la forme

$$\begin{aligned} J_0(x(\cdot), u(\cdot)) &= -\int_\Delta G_0(t, u(t))\,dt + \beta_0 x(t_0) \to \inf, \\ J_i(x(\cdot), u(\cdot)) &= -\int_\Delta G_i(t, u(t))\,dt + \beta_i x(t_0) \lesseqgtr c_i. \end{aligned} \tag{8}$$

Un tel problème sera appelé problème du type de Liapounov ou simplement *problème de Liapounov.*

4.3.2. Théorème de Liapounov. Le théorème de Liapounov joue le rôle clé pour établir la relation entre les problèmes de commande optimale et ceux de programmation convexe. Il sera énoncé ici dans le cas d'une fonction vectorielle $p: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ et une mesure de Lebesgue m sur la droite $\mathbf{R}$. Des améliorations (sans trop d'importance) des démonstrations permettent de généraliser ce théorème au cas d'un espace arbitraire muni d'une σ-algèbre $\mathfrak{S}$ et d'une mesure vectorielle finie continue (non atomique) arbitraire $\mu: \mathfrak{S} \to \mathbf{R}^n$. Dans l'énoncé donné ci-dessous, $\mathfrak{S}$ est la σ-algèbre des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ mesurables selon Lebesgue, tandis que $\mu(A) = \int_A p(t)\,dt$.

Contrairement aux autres parties de ce livre, ici et dans le sous-paragraphe suivant, nous devons nous servir de certains faits d'analyse fonctionnelle et de théorie de la mesure qui, malgré leur importance fondamentale, ne font généralement pas partie des principaux cours universitaires en U.R.S.S. Commençons par les définitions. Les expressions « mesurabilité », « intégrabilité », « presque partout », etc., sont par la suite entendues dans le sens de Lebesgue (pour la mesurabilité il est commode de se servir de la définition donnée dans 4.2.6). Deux fonctions sont dites *équivalentes* si elles coïncident presque partout.

Définition 1. Soit Δ un intervalle arbitraire de la droite numérique. Nous désignerons par $L_1(\Delta)$ et $L_\infty(\Delta)$ les espaces normés dont les éléments sont les classes d'équivalence des fonctions $x: \Delta \to \mathbf{R}$ possédant une norme finie donnée par les égalités suivantes:

dans l'espace $L_1(\Delta)$:

$$\|x(\cdot)\| = \int_{\Delta} |x(t)|\,dt; \qquad (1)$$

dans l'espace $L_\infty(\Delta)$:

$$\|x(\cdot)\| = \sup_{\Delta} \text{vrai}\, |x(t)| = \inf_{N,\, m(N)=0} \sup_{t \in \Delta \setminus N} |x(t)|. \qquad (2)$$

P r o p o s i t i o n 1. *Les espaces* $L_1(\Delta)$ *et* $L_\infty(\Delta)$ *sont des espaces de Banach,* $L_1(\Delta)$ *étant séparable. L'espace* $L_\infty(\Delta)$ *est isométriquement isomorphe à l'espace dual* $L_1(\Delta)^*$, *de sorte que les boules fermées y sont *-faiblement compactes.*

Nous remplacerons la démonstration de ces assertions par les renvois suivants: la complétude et séparabilité de l'espace $L_1(\Delta)$: [KF], ch. VII, § 1 (l'existence d'une base dénombrable pour la mesure de Lebesgue sur un intervalle infini découle immédiatement de son existence sur les segments finis, puisque chaque tel intervalle se représente sous forme de réunion d'un nombre dénombrable de segments) ; la compacité dans la topologie *-faible des boules fermées dans un espace dual d'un espace séparable: [KF], p. 197; l'isomorphisme isométrique entre $L_1(\Delta)^*$ et $L_\infty(\Delta)$ (et donc le fait que ce dernier est complet): [5].

D é f i n i t i o n 2. Soit X un espace vectoriel et $A \subset X$. Alors le point x de l'ensemble A est appelé *point extrême* lorsque

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 = x_2.$$

E x e r c i c e 1. Démontrer qu'au moins un des points $x_1, \ldots, x_n$ est un point extrême de leur enveloppe convexe conv $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

T h é o r è m e d e K r e i n - M i l m a n. *Tout sous-ensemble compact convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe* X *contient au moins un point extrême et coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrêmes.*

Pour la démonstration de ce théorème, voir [5].

Passons maintenant au théorème principal du présent sous-paragraphe.

T h é o r è m e d e L i a p o u n o v. *Si* $p: \Delta \to \mathbf{R}^n$, $p(\cdot) = (p_1(\cdot), \ldots, p_n(\cdot))$ *est une fonction vectorielle intégrable, alors l'ensemble*

$$M = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \int_A p(t)\,dt, \quad A \in \mathfrak{S} \right\}$$

est un compact convexe de $\mathbf{R}^n$. (Rappelons que $\mathfrak{S}$ est la σ-algèbre des ensembles mesurables selon Lebesgue.)

Démonstration. A) Considérons l'application Λ: $L_\infty(\Delta) \to \mathbf{R}^n$ définie par l'égalité

$$\Lambda(\psi(\cdot)) = \int_\Delta \psi(t)\, p(t)\, dt = \left(\int_\Delta \psi(t)\, p_1(t)\, dt, \ldots, \int_\Delta \psi(t)\, p_n(t)\, dt \right).$$

Elle est linéaire et, en outre, elle est continue relativement à la topologie $*$-faible dans $L_\infty(\Delta)$ (par définition, cette topologie est la plus faible parmi celles pour lesquelles toutes les applications $\psi(\cdot) \mapsto \langle \psi(\cdot), p(\cdot) \rangle$, $p(\cdot) \in L_1(\Delta)$ sont continues).

L'ensemble

$$W = \{\psi(\cdot) \in L_\infty(\Delta) \mid 0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1, \quad t \in \Delta\}$$

est une boule fermée dans $L_\infty(\Delta)$ (de rayon $1/2$ et de centre au point $\hat\psi(\cdot)$, $\hat\psi(t) \equiv 1/2$). Par conséquent, il est convexe et, en vertu de la proposition 1, il est compact dans la topologie $*$-faible. Ainsi, son image linéaire et continue ΛW est également convexe et compacte.

La fonction caractéristique

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A, \end{cases}$$

d'un ensemble arbitraire $A \in \mathfrak{S}$ appartient évidemment à W, donc

$$\int_A p(t)\, dt = \int_\Delta \chi_A(t)\, p(t)\, dt = \Lambda(\chi_A(\cdot)) \in \Lambda W,$$

de sorte que $M \subset \Lambda W$. Il reste à démontrer que $M = \Lambda W$.

B) Supposons que le point ξ appartient à ΛW. Son image inverse $W_\xi = W \cap \Lambda^{-1}(\xi)$ est l'intersection d'un ensemble W convexe et compact dans la topologie $*$-faible et d'un ensemble $\Lambda^{-1}(\xi)$ convexe (une variété affine) fermé dans la même topologie (puisque Λ est continue relativement à celle-ci). Par conséquent, W_ξ est convexe et compact; en vertu du théorème de Krein-Milman W_ξ possède un point extrême $x(\cdot) \in W_\xi$.

Si nous démontrons que $x(\cdot)$ est la fonction caractéristique d'un certain ensemble A appartenant à $\mathfrak{S}$, alors

$$\xi = \int_\Delta x(t)\, p(t)\, dt = \int_A p(t)\, dt \in M$$

et le théorème sera démontré.

C) Si $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$ et $x(\cdot)$ n'est pas une fonction caractéristique, alors, pour un certain $\varepsilon > 0$, l'ensemble $B_\varepsilon = \{t \mid \varepsilon \leqslant x(t) \leqslant 1 - \varepsilon\}$ est de mesure positive. La fonction $\alpha \mapsto m(\alpha) = m[(t_0, \alpha) \cap B_\varepsilon]$ est continue et varie de $0 = m(t_0)$ à $m(B_\varepsilon) = m(t_1)$ ($m(B)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble B). Choisissant arbitrairement N, prenons α_k, $k = 1, \ldots, N-1$ de manière à

avoir $m(\alpha_k) = k/NB_\varepsilon$. Ceci détermine une décomposition $B_\varepsilon = B_1 \cup \ldots \cup B_N$ de l'ensemble B_ε en N sous-ensembles disjoints deux par deux

$$B_1 = (-\infty, \alpha_1] \cap B_\varepsilon, \ldots, B_k = (\alpha_{k-1}, \alpha_k] \cap B_\varepsilon, \ldots$$
$$\ldots, B_N = (\alpha_{N-1}, \infty) \cap B_\varepsilon$$

de mesure positive.

Posons maintenant

$$y(t) = \begin{cases} y_k, & t \in B_k, \\ 0, & t \notin B_\varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

Pour $N > n$ le système linéaire homogène

$$\int_\Delta y(t)\, p(t)\, dt = \sum_k y_k \int_{B_k} p_i(t)\, dt = 0$$

possède une solution non nulle $(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_N)$. La fonction (3) correspondante sera désignée par $\hat{y}(\cdot)$. Lorsque $0 < \lambda < \varepsilon \max\{|\hat{y}_k|\}^{-1}$, on a

$$|\lambda y(t)| \begin{cases} \leqslant \varepsilon, & t \in B_\varepsilon, \\ = 0, & t \notin B_\varepsilon, \end{cases}$$

et donc $x(\cdot) \pm \lambda\hat{y}(\cdot) \in W$. On a de plus

$$\Lambda(x(\cdot) \pm \lambda\hat{y}(\cdot)) = \Lambda(x(\cdot)) \pm \lambda\Lambda\hat{y}(\cdot) = \xi \pm \lambda \int_\Delta \hat{y}(t)\, p(t)\, dt = \xi.$$

Par conséquent, $x(\cdot) \pm \lambda\hat{y}(\cdot) \in W_\varepsilon$ et puisque $\lambda \neq 0$, on voit que $x(\cdot)$ n'est pas un point extrême.

Ainsi $x(\cdot)$ est une fonction caractéristique et le théorème est démontré. ■

4.3.3. Principe de Lagrange pour les problèmes de Liapounov. Dans ce sous-paragraphe Δ est un intervalle fixe de la droite numérique (fini ou infini), $\mathfrak{U}$, un espace topologique.

L e m m e s u r l a m e s u r a b i l i t é c o m p o s é e. *Si la fonction $f: \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$ est continue, tandis que $u: \Delta \to \mathfrak{U}$ est mesurable (dans le sens de la définition de 4.2.6), alors la fonction $t \mapsto f(t, u(t))$ est également mesurable.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que les $A_n \subset \Delta$ sont choisis de manière à avoir $m(\Delta \setminus \bigcup_n A_n) = 0$ (m est la mesure de Lebesgue), les contraintes $u(\cdot)|_{A_n}$ possédant des prolongements à des fonctions continues sur $\overline{A}_n$. Alors les fonctions $t \mapsto f(t, u(t))$, $t \in A_n$ peuvent être prolongées à des fonctions continues sur $\overline{A}_n$. ■

Supposons maintenant que les fonctions continues $f_i : \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$ sont données. Désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble de toutes les applications mesurables $u : \Delta \to \mathfrak{U}$ pour lesquelles les composées $t \mapsto f_i(t, u(t))$ sont non seulement mesurables mais intégrables sur Δ, de sorte que les fonctions $u(\cdot) \to \int_\Delta f_i(t, u(t))\,dt$ sont définies sur $\mathcal{U}$.

D'autre part, soient X un espace vectoriel, $g_i : X \to \overline{\mathbf{R}}$ des fonctions convexes pour $i = 0, 1, \ldots, m'$ et affines à valeurs finies pour $i = m' + 1, \ldots, m$, $A \subset X$, un ensemble convexe.

Le problème d'extrémum

$$\mathcal{F}_0(u(\cdot)) + g_0(x) = \int_\Delta f_0(t, u(t))\,dt + g_0(x) \to \inf,$$

$$\mathcal{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x) = \int_\Delta f_i(t, u(t))\,dt + g_i(x) \begin{cases} \leqslant 0, & i = 1, \ldots, m', \\ = 0, & i = m' + 1, \ldots, m, \end{cases} \quad (1)$$

$$x \in A, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}$$

sera appelé *problème de Liapounov*. En guise de cas particulier, le problème de Liapounov comprend le problème standard de programmation convexe, que nous avons étudié dans 1.3.3 (il faut poser $m' = m$ et $f_i = 0$), et nous verrons par la suite que le théorème de Liapounov permet d'étendre à la situation plus générale considérée ici les raisonnements qui ont permis de démontrer le théorème de Kuhn-Tucker.

La fonction

$$\mathcal{L}(u(\cdot), x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\mathcal{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x)) \quad (2)$$

est appelée *fonction de Lagrange* pour le problème (1).

Théorème (principe de Lagrange pour le problème de Liapounov). *Supposons que les fonctions $f_i : \Delta \times \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ sont continues, les $g_i : X \to \overline{\mathbf{R}}$ sont convexes pour $i = 0, 1, \ldots, m'$ et affines pour $i = m' + 1, \ldots, m$, $A \subset X$ est convexe.*

1. *Si la paire $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ est une solution du problème* (1), *alors on peut trouver un vecteur $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbf{R}^{m*}$ et un nombre $\hat{\lambda}_0$ qui ne s'annulent pas simultanément et tels que*

a) $$\min_{u \in U} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, u) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i (t, \hat{u}(t)) \text{ presque partout}, \quad (3)$$

$$\min_{x \in A} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) \quad (4)$$

(*principe du minimum*) ;

b) $$\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m' \tag{5}$$

(*condition de concordance des signes*) ;

c) $$\hat{\lambda}_j \{\mathscr{F}_j(\hat{u}(\cdot)) + g_j(\hat{x})\} = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{6}$$

(*condition de non-rigidité complémentaire*).

2. *Si* $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}) \in \mathscr{U} \times A$ *et il existe des* $\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{m*}$ *et* $\hat{\lambda}_0 > 0$ *tels que les conditions* (3) *à* (6) *sont remplies, alors* $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ *est la solution du problème* (1).

Démonstration. A) Lemme sur la convexité de l'image.

L'image

$$\operatorname{im} \mathscr{F} = \{\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_m) \mid \xi_i = \mathscr{F}_i(u(\cdot)), \ u(\cdot) \in \mathscr{U}\}$$

de l'application $u(\cdot) \mapsto \mathscr{F}(u(\cdot)) = \mathscr{F}_0(u(\cdot)), \ldots, \mathscr{F}_m(u(\cdot)))$ *est un ensemble convexe de* $\mathbf{R}^{m+1}$.

Démonstration. Soit

$$\xi^k = (\xi_0^k, \xi_1^k, \ldots, \xi_m^k) = \mathscr{F}(u^{(k)}(\cdot)), \quad k = 1, 2.$$

La fonction $p(\cdot) = (p_0(\cdot), \ldots, p_m(\cdot)) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{m+1}$ définie par les égalités

$$p_i(t) = \begin{cases} f_i(t, u^{(1)}(t)) - f_i(t, u^{(2)}(t)), & t \in \Delta, \\ 0, & t \notin \Delta, \end{cases}$$

est intégrable, puisque $u^{(k)}(\cdot) \in \mathscr{U}$. D'après le théorème de Liapounov, l'ensemble

$$M = \left\{\xi \mid \xi = \int\limits_A p(t)\, dt, \quad A \in \mathfrak{S}\right\}$$

est convexe et, les points 0 ($A = \varnothing$) et $\xi^1 - \xi^2$ ($A = \Delta$) appartenant à cet ensemble, on peut trouver pour tout $\alpha \in [0, 1]$ des $A_\alpha \in \mathfrak{S}$ (i.e. des ensembles mesurables selon Lebesgue) tels que

$$\alpha(\xi_i^1 - \xi_i^2) = \\ = \int\limits_{A_\alpha} p_i(t)\, dt = \int\limits_{A_\alpha \cap \Delta} [f_i(t, u^{(1)}(t)) - f_i(t, u^{(2)}(t))]\, dt = \\ = \int\limits_{A_\alpha \cap \Delta} f_i(t, u^{(1)}(t))\, dt + \int\limits_{\Delta \setminus A_\alpha} f_i(t, u^{(2)}(t))\, dt - \xi_i^2,$$

d'où

$$\int\limits_{A_\alpha \cap \Delta} f_i(t, u^{(1)}(t))\, dt + \int\limits_{\Delta \setminus A_\alpha} f_i(t, u^{(2)}(t))\, dt = \\ = \alpha \xi_i^1 + (1 - \alpha) \xi_i^2, \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Posons maintenant

$$u_\alpha(t)=\begin{cases} u^{(1)}(t), & t\in A_\alpha\cap\Delta,\\ u^{(2)}(t), & t\in\Delta\setminus A_\alpha.\end{cases}$$

Alors d'après (7)

$$\mathcal{F}_i(u_\alpha(\cdot)) = \alpha\xi_i^1 + (1-\alpha)\,\xi_i^2,$$

de sorte que $\mathcal{F}(u_\alpha(\cdot)) = \alpha\xi^1 + (1-\alpha)\,\xi^2$. ■

B) Existence des multiplicateurs de Lagrange. Comme nous avons déjà remarqué, nos raisonnements iront parallèlement à la démonstration du théorème de Kuhn-Tucker de 1.3.3.

Par hypothèse, la paire $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ est une solution du problème (1); sans perte de généralité on peut supposer que $\mathcal{F}_0(\hat{u}(\cdot)) + g_0(\hat{x}) = 0$ (dans le cas contraire on peut soustraire cette constante de $\mathcal{F}_0 + g_0$). Démontrons que l'ensemble

$$C = \{\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \mid \exists(\bar{u}(\cdot), \bar{x}) \in \mathcal{U}\times A,$$
$$\mathcal{F}_0(\bar{u}(\cdot)) + g_0(\bar{x}) < \alpha_0,\quad \mathcal{F}_i(\bar{u}(\cdot)) + g_i(\bar{x}) \leqslant \alpha_i,$$
$$i=1,\ldots,m',\quad \mathcal{F}_i(\bar{u}(\cdot)) + g_i(\bar{x}) = \alpha_i,\quad i=m'+1,\ldots,m\} \qquad (8)$$

est convexe. En effet, supposons que $\alpha^k = (\alpha_0^k, \ldots, \alpha_m^k) \in C$, $k=1, 2$, $0<\theta<1$, $(u^{(k)}(\cdot), x^{(k)})$ sont des éléments de $\mathcal{U}\times A$ tels que

$$\mathcal{F}_0(u^{(k)}(\cdot)) + g_0(x^{(k)}) < \alpha_0^k,$$
$$\mathcal{F}_i(u^{(k)}(\cdot)) + g_i(x^{(k)}) \begin{cases} \leqslant \alpha_i^k, & i=1,\ldots,m',\\ = \alpha_i^k, & i=m'+1,\ldots,m.\end{cases}$$

D'après le lemme sur la convexité de l'image, il existe une fonction $u_\theta(\cdot) \in \mathcal{U}$ telle que

$$\mathcal{F}_i(u_\theta(\cdot)) = \theta\mathcal{F}_i(u^{(1)}(\cdot)) + (1-\theta)\,\mathcal{F}_i(u^{(2)}(\cdot)),$$
$$i = 0, 1, \ldots, m.$$

En outre $x_\theta = \theta x^{(1)} + (1-\theta)\,x^{(2)} \in A$ d'après la convexité de A et

$$g_i(x_\theta) = g_i(\theta x^{(1)} + (1-\theta)\,x^{(2)}) = \theta g_i(x^{(1)}) + (1-\theta)\,g_i(x^{(2)})$$

pour $i = m'+1, \ldots, m$, puisque ces fonctions sont affines. Par conséquent,

$$\mathcal{F}_i(u_\theta(\cdot)) + g_i(x_\theta) =$$
$$= \theta\,[\mathcal{F}_i(u^{(1)}(\cdot)) + g_i(x^{(1)})] + (1-\theta)\,[\mathcal{F}_i(u^{(2)}(\cdot)) + g_i(x^{(2)})] =$$
$$= \theta\alpha_i^1 + (1-\theta)\,\alpha_i^2,\quad i = m'+1, \ldots, m.$$

Ensuite, g_0 étant une fonction convexe, on a

$$\mathscr{F}_0(u_\theta(\cdot)) + g_0(x_\theta) =$$
$$= \theta\mathscr{F}_0(u^{(1)}(\cdot)) + (1-\theta)\mathscr{F}_0(u^{(2)}(\cdot)) + g_0(\theta x^{(1)} + (1-\theta)x^{(2)}) \leqslant$$
$$\leqslant \theta(\mathscr{F}_0(u^{(1)}(\cdot)) + g_0(x^{(1)})) + (1-\theta)(\mathscr{F}_0(u^{(2)}(\cdot)) + g_0(x^{(2)})) <$$
$$< \theta\alpha_0^1 + (1-\theta)\alpha_0^2.$$

On démontre d'une manière analogue que

$$\mathscr{F}_j(u_\theta(\cdot)) + g_j(x_\theta) \leqslant \theta\alpha_j^1 + (1-\theta)\alpha_j^2, \quad j = 1, \ldots, m'.$$

Mais alors on voit de la définition de l'ensemble C que $\theta\alpha^1 + (1-\theta)\alpha^2 \in C$, i.e. C est convexe.

En posant $(\bar{u}(\cdot), \bar{x}) = (\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ dans (8), on obtient l'inclusion

$$C \supset \{\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \mid \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m',$$
$$\alpha_i = 0, \quad i = m'+1, \ldots, m\}. \qquad (9)$$

En particulier, C est non vide. En outre $0 \notin C$, car autrement, en vertu de (8), on aurait

$$\mathscr{F}_0(\bar{u}(\cdot)) + g_0(\bar{x}) < 0, \quad \mathscr{F}_i(\bar{u}(\cdot)) + g_i(\bar{x}) \leqslant 0,$$
$$i = 1, \ldots, m',$$
$$\mathscr{F}_i(\bar{u}(\cdot)) + g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = m'+1, \ldots, m,$$

pour une certaine paire $(\bar{u}(\cdot), \bar{x})$ et, par conséquent, $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ ne serait pas une solution du problème (1).

Appliquons le théorème de séparabilité en dimension finie (voir 1.3.3) ; nous obtenons des nombres $\hat{\lambda}_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, qui ne sont pas nuls simultanément, tels que pour tous les $\alpha \in C$ on a l'inégalité $\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i\alpha_i \geqslant 0$.

Puisque $(\varepsilon, 0, \ldots, 0, \alpha_j = 1, 0, \ldots, 0) \in C$, où $1 \leqslant j \leqslant m'$ et $\alpha_i = 0$ pour $i \neq 0, j$, on a l'inégalité $\varepsilon\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_j \geqslant 0$. En passant à la limite lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, on obtient $\hat{\lambda}_j \geqslant 0$. De même

$$(\varepsilon, 0, \ldots, 0) \in C \Rightarrow \hat{\lambda}_0 \geqslant 0$$

et donc (5) est démontré.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(\varepsilon, 0, \ldots, 0, \alpha_j = \mathscr{F}_j(\hat{u}(\cdot)) + g_i(\hat{x}), 0, \ldots, 0) \in$$
$$\in C \Rightarrow \hat{\lambda}_0\varepsilon + \hat{\lambda}_j[\mathscr{F}_j(\hat{u}(\cdot)) + g_j(\hat{x})] \geqslant$$
$$\geqslant 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_j[\mathscr{F}_j(\hat{u}(\cdot)) + g_j(\hat{x})] \geqslant 0. \qquad (10)$$

Puisque $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ est une paire admissible,

$$\mathcal{F}_j(\hat{u}(\cdot)) + g_j(\hat{x}) \begin{cases} \leqslant 0, & 1 \leqslant j \leqslant m', \\ 0, & j = m'+1, \ldots, m. \end{cases} \tag{11}$$

A l'aide de (10) et des inégalités $\hat{\lambda}_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant m'$, déjà démontrées ceci nous donne (6).

Ensuite, pour tous les $\varepsilon > 0$, $(u(\cdot), x) \in \mathcal{U} \times A$, on a, en vertu de (8),

$$(\mathcal{F}_0(u(\cdot)) + \\ + g_0(x) + \varepsilon, \mathcal{F}_1(x(\cdot)) + g_1(x), \ldots, \mathcal{F}_m(u(\cdot)) + g_m(x)) \in \\ \in C \Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i (\mathcal{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x)) + \varepsilon\hat{\lambda}_0 = \\ = \mathcal{L}(u(\cdot), x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) + \varepsilon\hat{\lambda}_0 \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{L}(u(\cdot), x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \geqslant 0.$$

Mais d'après (6) et l'hypothèse concernant $\mathcal{F}_0 + g_0$ faite précédemment, on a $\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = 0$. Par conséquent, pour la fonction de Lagrange (2) on a le principe du minimum

$$\min_{\mathcal{U} \times A} \mathcal{L}(u(\cdot), x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = \mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0). \tag{12}$$

Mais si $\hat{\lambda}_0 > 0$, on a (12) et les conditions (5) et (6) sont vérifiées, alors pour toute paire admissible $(u(\cdot), x)$

$$\hat{\lambda}_0 (\mathcal{F}_0(u(\cdot)) + g_0(x)) \overset{(5)}{\geqslant} \sum_{i=0}^{m'} \hat{\lambda}_i (\mathcal{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x)) = \\ = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i (\mathcal{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x)) = \mathcal{L}(u(\cdot), x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \overset{(12)}{\geqslant} \\ \geqslant \mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i (\mathcal{F}_i(\hat{u}(\cdot)) + g_i(\hat{x})) \overset{(6)}{=} \\ = \hat{\lambda}_0 (\mathcal{F}_0(\hat{u}(\cdot)) + g_0(\hat{x})) \Rightarrow \mathcal{F}_0(u(\cdot)) + g_0(x)) \geqslant \\ \geqslant \mathcal{F}_0(\hat{u}(\cdot) + g_0(\hat{x})),$$

de sorte que $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ est une solution du problème (1).

C) R é d u c t i o n a u p r o b l è m e é l é m e n t a i r e. On voit facilement que la relation (12) est équivalente à la conjonc-

tion des relations (4) et de la relation

$$\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(u(\cdot)) =$$

$$= \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_{\Delta} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, u, (t))\, dt = \int_{\Delta} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, \hat{u}(t))\, dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(\hat{u}(\cdot)). \qquad (13)$$

En effet, si l'on a (4) et (13), alors

$$\mathcal{L}(u(\cdot), x, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(u(\cdot)) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(x) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(\hat{u}(\cdot)) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) = \mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$$

pour tous les $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ et $x\in A$, i.e. on a (12). Si, par contre, par exemple $\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\bar{x}) < \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x})$ pour un certain $\bar{x}\in A$, alors

$$\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot), \bar{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(\hat{u}(\cdot)) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\bar{x}) < \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \mathcal{F}_i(\hat{u}(\cdot)) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}),$$

de sorte que (12) ne peut avoir lieu.

Pour passer maintenant de (4) et (13) au principe du minimum, i.e. à (3) et (4), il faut montrer que l'on peut « introduire le min sous le signe de l'intégrale » dans (13), en d'autres termes, montrer que la fonction $\hat{u}(\cdot)$ est une solution du problème de commande optimale auxiliaire

$$\int_{\Delta} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, u(\cdot))\, dt \to \inf, \quad u(\cdot)\in\mathcal{U}, \qquad (14)$$

si et seulement si on a la relation (3).

Une assertion analogue a été déjà démontrée dans 3.1.4. Toutefois nous avions alors supposé que la fonction $\hat{u}(\cdot)$ est continue par morceaux, tandis qu'ici elle est seulement mesurable, et il faudra faire appel à des raisonnements plus délicats.

D) Problème élémentaire à commandes mesurables.

Lemme sur les conditions de minimum dans le problème élémentaire de commande optimale. *Soient* Δ *un intervalle de* $\mathbf{R}$, $\mathfrak{U}$ *un espace topologique,* $f\colon \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$ *une fonction continue et* $\mathcal{U}$ *l'ensemble des applications mesurables* $u\colon \Delta \to \mathfrak{U}$ *telles que les fonctions* $t \mapsto f(t, u(t))$ *sont intégrables sur* Δ.

Pour que $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ *soit une solution du problème*

$$\mathcal{F}(u(\cdot)) = \int_{\Delta} f(t, u(t))\, dt \to \inf, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{15}$$

il est nécessaire et suffisant d'avoir l'égalité

$$f(t, \hat{u}(t)) = \min_{u \in \mathfrak{U}} f(t, u) \tag{16}$$

presque partout sur Δ.

Démonstration. Suffisance. D'après (16) on a $f(t, u(t)) \geqslant f(t, \hat{u}(t))$ presque partout pour chaque $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, d'où l'on tire $\mathcal{F}(u(\cdot)) \geqslant \mathcal{F}(\hat{u}(\cdot))$.

Nécessité. Soit $\hat{u}(\cdot)$ une solution du problème (15). Puisque $\hat{u}(\cdot)$ est mesurable, il existe (voir 4.2.6) des ensembles mesurables $A_n \subset \Delta$ tels que $m(\Delta \setminus \bigcup_n A_n) = 0$ et $\hat{u}|_{A_n}$ se prolonge à une fonction continue sur $\bar{A}_n$. Nous dirons que le point $\tau \in A_n$ est *essentiel* lorsque $m((\tau - \delta, \tau + \delta) \cap A_n) > 0$ pour tout $\delta > 0$ et nous montrerons que l'égalité (16) est vérifiée en tous les points essentiels.

En effet, si pour un point essentiel $\tau \in A_n$ et un $v \in \mathfrak{U}$ on avait l'inégalité $f(\tau, v) < f(\tau, \hat{u}(\tau))$, alors, les fonctions $\hat{u}(\cdot)|_{A_n}$ et $t \mapsto f(t, v)$ étant continues, on aurait la même inégalité dans un certain δ-voisinage du point τ dans l'ensemble A_n, i.e.

$$f(t, v) < f(t, \hat{u}(t)), \quad \forall t \in (\tau - \delta, \tau + \delta) \cap A_n.$$

La fonction

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \notin (\tau - \delta, \tau + \delta) \cap A_n, \\ v, & t \in (\tau - \delta, \tau + \delta) \cap A_n, \end{cases}$$

appartient évidemment à $\mathcal{U}$ et

$$\mathcal{F}(u(\cdot)) - \mathcal{F}(\hat{u}(\cdot)) = \int_{(\tau-\delta, \tau+\delta) \cap A_n} [f(t, v) - f(t, \hat{u}(t))]\, dt < 0,$$

puisque $f(t, v) < f(t, \hat{u}(t))$ et $m((\tau - \delta, \tau + \delta) \cap A_n) > 0$.

Il reste à démontrer que l'ensemble des points non essentiels est de mesure nulle. Si $\tau \in A_n$ est non essentiel, alors il existe par définition un δ_τ pour lequel $m((\tau - \delta_\tau, \tau + \delta_\tau) \cap A_n) = 0$. En rétrécissant l'intervalle, trouvons des nombres rationnels $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$ tels que $\tau \in (\alpha_\tau, \beta_\tau)$ et $m((\alpha_\tau, \beta_\tau) \cap A_n) = 0$. L'ensemble de tous les intervalles à extrémités rationnelles est dénombrable et, par consé-

quent, l'ensemble de ceux d'entre eux qui sont de la forme $(\alpha_\tau, \beta_\tau)$ pour un certain point non essentiel $\tau \in A_n$ est au plus dénombrable. Désignons ces intervalles par $I_1, I_2, \ldots$ Alors $A_n \cap \bigcup_k I_k$ contient tous les points non essentiels de A_n et $m(A_n \cap \bigcup_k I_k) \leqslant \leqslant \sum_k m(A_n \cap I_k) = 0$.

Puisqu'il y a au plus une famille dénombrable d'ensembles A_n, la réunion des ensembles de points non essentiels de chacun d'entre eux est également de mesure nulle. D'après ce que nous avons démontré, la relation (16) peut être fausse seulement sur $\Delta \setminus \bigcup_n A_n$ et ceci dans les points non essentiels, i.e. elle est vraie presque partout.

E) Conclusion de la démonstration. D'après C) et D), pour avoir la condition (12), il est nécessaire et suffisant d'avoir simultanément (3) et (4). En remplaçant dans le dernier alinéa de la partie B) de la démonstration (12) par (3), (4), nous obtenons toutes les assertions du théorème. ■

4.3.4. Théorème de dualité. Les notations dans ce sous-paragraphe sont les mêmes que dans le précédent. Rappelons que la notion de dualité pour les problèmes de programmation convexe a été introduite dans 3.3.2. Elle se rapportait à la méthode des perturbations, i.e. à l'inclusion d'un problème d'extrémum séparé dans une famille entière de problèmes du même type. Ici, nous procéderons de la même manière en nous limitant pour simplifier aux seules fonctionnelles intégrales. En outre, nous supposerons (ce qui sera très nécessaire à la démonstration) que Δ est un intervalle fermé de la droite numérique, tandis que l'espace topologique $\mathfrak{U}$, dans lequel prennent leurs valeurs les diverses commandes $u(\cdot)$, est séparable, i.e. contient un sous-ensemble $\{u_n\}$ dénombrable partout dense. Par exemple, en guise de $\mathfrak{U}$ on peut prendre un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}^r$, $C(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $L_1(\Delta)$, mais l'espace $L_\infty(\Delta)$ (voir 4.3.2) n'est plus séparable.

Exercice 1. Démontrer ces assertions.

Ainsi, considérons le problème de Liapounov

$$\mathcal{F}_0(u(\cdot)) = \int_\Delta f_0(t, u(t))\, dt \to \inf$$
$$\mathcal{F}_i(u(\cdot)) = \int_\Delta f_i(t, u(t))\, dt \leqslant 0, \quad u(t) \in \mathfrak{U}, \qquad (\mathfrak{z})$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

En fixant f_i incluons-la dans la famille

$$\mathcal{F}_0(u(\cdot)) \to \inf, \quad \mathcal{F}_i(u(\cdot)) + \alpha_i \leqslant 0. \qquad (\mathfrak{z}(\alpha))$$

De même que dans 3.3.2, la S-fonction de la famille $\mathfrak{z}(\alpha)$ se définit par l'égalité

$$S(\alpha) =$$
$$= \inf \{\mathcal{F}_0(u(\cdot)) \mid \mathcal{F}_i(u(\cdot)) + \alpha_i \leqslant 0, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}\}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^m. \quad (1)$$

L'analogie qui existe entre les problèmes de Liapounov et les problèmes de programmation convexe a toujours lieu ici, et, quoique les fonctions $\mathcal{F}_i$ ne sont pas convexes, on a le

L e m m e 1. *La fonction $\alpha \mapsto S(\alpha)$ est convexe.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme de 4.3.3, l'ensemble

$$\operatorname{im} \mathcal{F} = \{\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_m) \mid \xi_i = \mathcal{F}_i(u(\cdot)), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}\}$$

est convexe dans $\mathbf{R}^{m+1}$. Récrivons (1) sous la forme

$$S(\alpha) = \inf \{\xi_0 \mid \xi_i + \alpha_i \leqslant 0, \quad \xi \in \operatorname{im} \mathcal{F}\};$$

en posant $g_i(\xi) = g_i(\xi_0, \ldots, \xi_m) = \xi_i$, nous voyons que $S(\alpha)$ est la valeur du problème de programmation convexe suivant

$$g_0(\xi) \to \inf, \quad g_i(\xi) + \alpha_i \leqslant 0, \quad \xi \in \operatorname{im} \mathcal{F}.$$

Ce dernier problème est un cas particulier du problème considéré dans 3.3.2 (les contraintes du type d'égalités sont absentes, et donc il faut omettre Y, Λ, etc.), de sorte que la convexité de S est garantie par le corollaire 1 de 3.3.2.

T h é o r è m e d e d u a l i t é p o u r l e s p r o b l è m e s d e L i a p o u n o v. *Soient Δ un intervalle fermé de $\mathbf{R}$, $\mathfrak{U}$ un espace topologique séparable, $f_i\colon \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, des fonctions continues, $\mathcal{U}$ une famille d'applications mesurables $u\colon \Delta \to \mathfrak{U}$ telles que les fonctions $t \mapsto f_i(t, u(t))$ sont intégrables sur Δ.*

Si la S-fonction de la famille $\mathfrak{z}(\alpha)$ est continue au point $\alpha = 0$, alors pour tout $\alpha \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} S)$ nous avons

$$S(\alpha) = \sup_{\lambda \geqslant 0} \left(\lambda\alpha + \int_\Delta \Phi(t, \lambda)\, dt\right), \qquad (2)$$

où

$$\Phi(t, \lambda) = \inf_{u \in \mathfrak{U}} \left(f_0(t, u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(t, u)\right). \qquad (3)$$

D é m o n s t r a t i o n. A) D'après le lemme, la fonction $\alpha \mapsto S(\alpha)$ est convexe, tandis que sa continuité en un seul point implique (proposition 3 de 2.6.2) sa continuité et l'égalité $S(\alpha) = (\overline{\operatorname{conv}}\, S)(\alpha)$ pour tous les $\alpha \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} S)$. D'après le théorème

de Fenchel-Moreau (voir 2.6.3), on a $\overline{\text{conv}}\, S = S^{**}$, de sorte que pour les mêmes α

$$S(\alpha) = S^{**}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}^{m*}} \{\lambda\alpha - S^*(\lambda)\}. \tag{4}$$

Calculons maintenant $S^*(\lambda)$. Par définition,

$$S^*(\lambda) = \sup_{\alpha} (\lambda\alpha - S(\alpha)) =$$

$$= \sup_{\alpha} \left\{\lambda\alpha - \inf\left(\int_\Delta f_0(t, u(t))\, dt \,\middle|\, \int_\Delta f_i(t, u(t))\, dt + \alpha_i \leqslant 0, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}\right)\right\} =$$

$$= \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \ \sup_{\alpha_i \leqslant -\int_\Delta f_i(t, u(t))\, dt} \left\{\lambda\alpha - \int_\Delta f_0(t, u(t))\, dt\right\} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \lambda \notin \mathbf{R}^m_+, \\ -\inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \displaystyle\int_\Delta \left[f_0(t, u(t)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(t, u(t))\right] dt. \end{cases}$$

Substituons maintenant l'expression trouvée dans (4), nous voyons que l'égalité (2), et donc le théorème tout entier, seront démontrés si l'on vérifie l'égalité

$$\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_\Delta \left[f_0(t, u(t)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(t, u(t))\right] dt = \int_\Delta \Phi(t, \lambda)\, dt, \tag{5}$$

où $\Phi(t, \lambda)$ est définie par l'égalité (3).

B) L e m m e 2. *Soient Δ un intervalle fermé de* $\mathbf{R}$, $\mathfrak{U}$ *un espace topologique séparable*, $f: \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$ *une fonction continue et* $\mathcal{U}$ *une famille d'applications mesurables* $u: \Delta \to \mathfrak{U}$ *telles que la fonction* $t \mapsto f(t, u(t))$ *est intégrable sur* Δ.

Alors la fonction

$$\varphi(t) = \inf_{v \in \mathfrak{U}} \{f(t, v)\} \tag{6}$$

est mesurable sur Δ, *l'intégrale* $\int_\Delta \varphi(t)\, dt$ *(finie ou égale à* $-\infty$*) existe et l'on a*

$$\int_\Delta \varphi(t)\, dt = \int_\Delta \inf_{u \in \mathcal{U}} f(t, u)\, dt = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_\Delta f(t, u(t))\, dt. \tag{7}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{v_k \mid k \geqslant 1\}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense dans $\mathfrak{U}$. La fonction f étant continue,

les fonctions

$$\varphi_n(t) = \min_{1\leqslant k\leqslant n} f(t, v_k) \tag{8}$$

sont continues et pour $n \to \infty$ on a

$$\varphi_n(t) \downarrow \lim_{n\to\infty} \inf_{1\leqslant k\leqslant n} f(t, v_k) = \inf_k f(t, v_k) = \\ = \inf_{v\in U} f(t, v) = \varphi(t). \tag{9}$$

En outre, il existe des fonctions $u_n(\cdot) \in \mathcal{U}$ telles que $\varphi_n(t) = f(t, u_n(t))$. En effet, pour $n = 1$ ceci est vrai, et lorsque $\varphi_{n-1}(t) = f(t, u_{n-1}(t))$, on a

$$\varphi_n(t) = \min_{1\leqslant k\leqslant n} [f(t, v_k)] = \min[\varphi_{n-1}(t), f(t, v_n)] = \\ = \min[f(t, u_{n-1}(t)), f(t, v_n)] = f(t, u_n(t)),$$

où la fonction

$$u_n(t) = \begin{cases} u_{n-1}(t) & \text{si } \varphi_{n-1}(t) \leqslant f(t, v_n), \\ v_n & \text{si } \varphi_{n-1}(t) > f(t, v_n), \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{U}$ (en vertu de la continuité des fonctions l'inégalité $\varphi_{n-1}(t) > f(t, v_n)$ est satisfaite sur un ensemble ouvert et donc $u_n(\cdot)$ est mesurable ; l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto f(t, u_n(t)) = \varphi_n(t)$ découle de la continuité de $\varphi_n(t)$).

Etant en vertu de (9) la limite point par point de fonctions continues (et donc mesurables), la fonction $\varphi(\cdot)$ est mesurable ([KF], p. 277). Représentons-la sous forme de différence

$$\varphi(t) = f(t, v) - [\varphi(t) - f(t, v)]$$

d'une fonction continue et d'une fonction non négative ; nous voyons que l'intégrale $\int_\Delta \varphi(t)\,dt$ existe : elle est finie ou égale à $(-\infty)$ (la fonction $f(t, v)$, continue sur le segment Δ, possède une intégrale finie, tandis que l'intégrale d'une fonction mesurable non négative $\varphi(t) - f(t, v)$ existe, mais peut être égale à $+\infty$).

Puisque $f(t, u(t)) \geqslant \varphi(t)$ pour toute $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, l'inégalité

$$\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_\Delta f(t, u(t))\,dt \geqslant \int_\Delta \varphi(t)\,dt \tag{10}$$

est évidente. Si le premier membre est égal à $-\infty$, l'égalité (7) est vérifiée. S'il est fini, on voit qu'en vertu des inégalités

$$\int_\Delta \varphi_1(t)\,dt \geqslant \int_\Delta \varphi_n(t)\,dt = \\ = \int_\Delta f(t, u_n(t))\,dt \geqslant \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_\Delta f(t, u(t))\,dt$$

la suite d'intégrales $\int_\Delta \varphi_n(t)\,dt$ est bornée. En appliquant le théorème de B. Levi ([KF], p. 296) à la suite non décroissante $-\varphi_n(\cdot)$, nous voyons que la fonction $\varphi(\cdot)$ est intégrable et

$$\int_\Delta \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta \varphi_n(t)\,dt \geqslant \inf_n \int_\Delta \varphi_n(t)\,dt =$$

$$= \inf_n \int_\Delta f(t, u_n(t))\,dt \geqslant \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_\Delta f(t, u(t))\,dt.$$

Avec (10), ceci nous donne (7).

D'après le lemme 2, on a (5), donc, comme nous l'avons constaté, ceci démontre le théorème. ■

Exercice 2. Enoncer et démontrer le théorème de dualité pour le problème de Liapounov sous forme générale (voir (1) de 4.3.3).

4.3.5. Principe du maximum pour les problèmes de commande optimale linéaires relativement aux variables de phase. Revenons au problème posé dans 4.3.1

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\Delta [a_0(t)\,x(t) + f_0(t, u(t))]\,dt + \\ + \gamma_{00}x(t_0) + \gamma_{10}x(t_1) \to \inf, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = A(t)\,x + F(t, u(t)), \quad u(t) \in \mathfrak{U}, \qquad (2)$$

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\Delta [a_i(t)\,x(t) + f_i(t, u(t))]\,dt + \\ + \gamma_{0i}x(t_0) + \gamma_{1i}x(t_1) \gtreqless c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3)$$

Théorème (principe du maximum pour les problèmes linéaires relativement aux variables de phase). *Supposons que les fonctions* $a_i: \Delta \to \mathbf{R}^{n*}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $A: \Delta \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *sont intégrables sur le segment* $\Delta = [t_0, t_1] \subset R$; *soient* $\mathfrak{U}$ *un espace topologique*; $f_i: \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $F: \Delta \times \mathfrak{U} \to \mathbf{R}^n$ *des fonctions continues,* $\mathcal{U}$ *l'ensemble des applications mesurables* $u: \Delta \to \mathfrak{U}$ *telles que les fonctions* $t \mapsto f_i(t, u(t))$ *et* $t \mapsto F(t, u(t))$ *sont intégrables.*

1. *Si* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *est un processus optimal pour le problème* (1)-(3), *alors il existe un nombre* $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$, *un vecteur* $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbf{R}^{m*}$ *et une fonction absolument continue* $\hat{p}: \Delta \to \mathbf{R}^{m*}$, *qui ne s'annulent pas simultanément, tels que l'on a:*

a) *l'équation d'Euler-Lagrange* (*l'équation duale*)

$$\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t)\,A(t) + \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i a_i(t); \qquad (4)$$

b) *la condition de transversalité*

$$\hat{p}(t_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \gamma_{ki}, \quad k = 0, 1; \tag{5}$$

c) *le principe du maximum*

$$\max_{v \in \mathfrak{U}} G(t, v) = G(t, \hat{u}(t)) \text{ presque partout}; \tag{6}$$

ici

$$G(t, v) = \hat{p}(t) F(t, v) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, v); \tag{7}$$

d) *la condition de concordance des signes*

$$\hat{\lambda}_i \gtrless 0, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{8}$$

e) *les conditions de non-rigidité complémentaire*

$$\hat{\lambda}_i [J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) - c_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

2. *Si, pour un processus admissible* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, *il existe des* $\hat{\lambda}_0 > 0$, $\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{m*}$ *et une fonction absolument continue* $\hat{p}(\cdot): \Delta \to \mathbf{R}^{m*}$ *vérifiant les conditions* (4) *à* (9), *alors* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *est un processus optimal pour le problème* (1)-(3).

Du point de vue formel, les conditions (4) à (9) sont ici les mêmes que les conditions correspondantes dans 4.2.2 (le lecteur effectuera sans difficulté les transformations nécessaires pour passer d'un groupe de conditions à l'autre), mais il faut rappeler que leur contenu est quelque peu différent. La commande $\hat{u}(\cdot)$ est supposée ici seulement mesurable, par conséquent, les conditions nécessaires (4) à (9) ne découlent pas des résultats du § 4.2.

En outre, la deuxième partie du théorème nous donne des conditions suffisantes d'optimalité, ce qui n'avait pas lieu dans le § 4.2.

Démonstration. A) Réduction au problème de Liapounov. Dans 4.3.1, nous avions déjà réduit le problème (1)-(3) à un problème d'extrémum du type de Liapounov (voir (8) de 4.3.1), qui diffère des problèmes de 4.3.3 par la présence éventuelle d'inégalités $\geqslant$ dans les contraintes. Il n'y a toutefois rien de grave ici, puisque les derniers termes de (8) dans 4.3.1 sont linéaires; en changeant les signes là où il le faut, nous obtiendrons à nouveau des fonctions convexes.

Renumérotons les indices de manière que les contraintes du type d'égalités soient situées dans (3) à la fin et posons, comme dans le § 3.2, $\varepsilon_i = 1$ pour $i = 0$ et pour tous les i tels que l'on a les signes $\leqslant$ et $=$ dans (3), et $\varepsilon_i = -1$ pour tous les i tels que l'on a le signe

$\geqslant$ dans (3). Posons ensuite $g_0(x(\cdot)) = \beta_0 x(t_0)$ et $g_i(x(\cdot)) = \varepsilon_i(\beta_i x(t_0) - c_1)$, $i \geqslant 1$.

Maintenant le problème (8) de 4.3.1 acquiert la forme standard de Liapounov:

$$\tilde{J}_0(x(\cdot),\ u(\cdot)) = -\varepsilon_0 \int_\Delta G_0(t,\ u(t))\,dt + g_0(x(\cdot)) \to \inf.$$

$$\tilde{J}_i(x(\cdot),\ u(\cdot)) = -\varepsilon_i \int_\Delta G_i(t,\ u(t))\,dt + g_i(x(\cdot)) \begin{cases} \leqslant 0, & i = 1, \ldots, m', \\ = 0, & i = m'+1, \ldots, m, \end{cases} \qquad (10)$$

où les G_i sont déterminés par la formule (5) de 4.3.1.

B) Nécessité. Si $(\hat{x}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot))$ est un processus optimal, alors il existe, en vertu du théorème de 4.3.3, des nombres $\tilde{\lambda}_i$ non négatifs (pour $0 \leqslant i \leqslant m'$) qui ne s'annulent pas simultanément et vérifient

$$-\sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i G_i(t,\ \hat{u}(t)) = \min_v \left(-\sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i G_i(t,\ v)\right) \qquad (11)$$

presque partout

$$\sum_{i=0}^{m} \tilde{\lambda}_i g_i(\hat{x}(\cdot)) = \min_{x(\cdot)} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i g_i(x(\cdot)) \qquad (12)$$

et

$$\tilde{\lambda}_i \tilde{J}_i(\hat{x}(\cdot))\hat{u}(\cdot), = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (13)$$

On voit facilement qu'en posant $\tilde{\lambda}_i = \varepsilon \tilde{\lambda}_i$ on satisfait à la condition (8), tandis que (13) implique (9).

Posons ensuite

$$\hat{p}(t) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_i(t), \qquad (14)$$

où les $p_i(\cdot)$ sont déterminés par les formules (7) de 4.3.1 d'où l'on tire compte tenu de (6) de 4.3.1

$$p_i(t_1) = -\gamma_{1i}, \quad p_i(t_0) = \gamma_{0i} - \beta_i. \qquad (15)$$

En calculant la dérivée, ou en se servant de la formule (14) de 2.5.4, on vérifie directement que $\hat{p}(\cdot)$ est la solution de l'équation (4) tandis que (5) est valable pour $k = 1$.

A partir de (7), (14) et de la relation (5) dans 4.3.1, on obtient

$$G(t, v) = \hat{p}(t) F(t, v) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, v) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i [p_i(t) F(t, v) - f_i(t, v)] = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i G_i(t, v),$$

et alors (11) se transforme dans (6).

Enfin, en substituant dans (12) la définition de g_i, on a

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i \beta_i\right) \hat{x}(t_0) = \min_x \left(\sum \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i \beta_i\right) x.$$

Cette égalité est possible seulement si $\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \beta_i = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i \beta_i = 0$, ceci étant ((5), $k = 0$) découle de (14) et (15).

C) Suffisance. Supposons que pour un processus admissible $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ il existe des $\hat{\lambda}_0 > 0$, $\hat{\lambda}_i$, $\hat{p}(\cdot)$ vérifiant les conditions (4) à (9). Supposons en outre que les ε_i sont les mêmes que précédemment, $\tilde{\lambda}_i = \varepsilon_i \hat{\lambda}_i$ et $p_i(\cdot)$ étant toujours définis par les égalités (7) de 4.3.1, de sorte que l'on a (15). Les fonctions $p(\cdot) = \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_i(\cdot)$ et $\hat{p}(\cdot)$ vérifient l'équation (4) et, en vertu de (5) avec $k = 1$, coïncident lorsque $t = t_1$. D'après le théorème d'unicité $p(t) \equiv \hat{p}(t)$ et donc

$$G(t, v) \overset{(7)}{=} \hat{p}(t) F(t, v) - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(t, v) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i [p_i(t) F(t, v) - f_i(t, v)] = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i G_i(t, v) \qquad (16)$$

et

$$\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \beta_i \overset{(15)}{=} \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i (\gamma_{0i} - p_i(t_0)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \gamma_{0i} - \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i p_i(t_0) \overset{(5)}{=} \hat{p}(t_0) - p(t_0) = 0. \qquad (17)$$

Les relations (16) et (6) impliquent (11), tandis que (9) implique (13), enfin (8), vu les égalités $\hat{\lambda}_i = \varepsilon_i \tilde{\lambda}_i$, signifie que $\tilde{\lambda}_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. En outre, on déduit de (17) et de la définition des

$g_i(\cdot)$ les égalités

$$\sum_{i=0}^{m} \tilde{\lambda}_i g_i(x(\cdot)) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{\lambda}_i \varepsilon_i \beta_i x(t_0) - \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \varepsilon_i c_i =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \beta_i\right) x(t_0) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i c_i = -\sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i c_i,$$

donc (12) a également lieu. D'après le théorème de 4.3.3, les conditions (11) à (13) avec les inégalités $\tilde{\lambda}_0 > 0$, $\tilde{\lambda}_i \geqslant 0$, $i \geqslant 1$, sont suffisantes pour l'optimalité de $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. ■

§ 4.4. Application de la théorie générale au problème le plus simple du calcul des variations classique

Nous appliquons ici la théorie générale au problème le plus simple du calcul des variations classique, auquel tant de place est consacré dans le manuel. On peut obtenir d'une manière analogue des conditions nécessaires et suffisantes d'extrémum faible et des conditions nécessaires d'extrémum fort dans le problème général de Lagrange. Mais ceci aurait pris trop de place sans introduire quoique ce soit de neuf en principe. Nous nous limiterons par conséquent à un cas particulier dans lequel on peut mener notre étude jusqu'à la fin et montrer la relation entre les théories ancienne et nouvelle.

4.4.1. Equation d'Euler. Condition de Weierstrass. Condition de Legendre. *Le problème (vectoriel) le plus simple du calcul des variations classique* est (comparer à 1.2.6) le problème d'extrémum suivant :

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{2}$$

Ici la fonction $L: V \to \mathbf{R}$ est au moins continue sur l'ensemble ouvert $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; x_0, x_1, t_0, t_1 sont fixes.

Le problème (1), (2) est étudié en deux variantes. Dans la première $x(\cdot)$ appartient à l'espace $C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ et l'extrémum local dans ce cas est appelé *faible* (comparer à 1.4.1). Dans la deuxième, $x(\cdot)$ appartient à l'espace $KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ des fonctions à dérivée continue par morceaux, muni de la norme $\| x(\cdot) \| = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} | x(t) |$, l'extrémum local dans ce cas est dit *fort*.

Exercice 1. Vérifier que l'espace $KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ est normé, mais n'est pas un espace de Banach (i.e. n'est pas complet).

Dans les deux variantes $x(\cdot)$ est appelée *admissible lorsque son graphique élargi* $\{(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ est contenu dans V et vérifie les conditions aux limites (2). L'ensemble des fonctions admissibles $x(\cdot)$ sera désigné par $\mathcal{V}$. Les notations introduites ici et par la suite, ainsi que la terminologie, seront conservées dans le paragraphe entier. Par souci de brièveté, nous appellerons le problème (1), (2) *problème le plus simple*, laissant de côté les autres qualificatifs.

E x e r c i c e 2. Démontrer que

$$\inf_{\mathcal{V}\cap C^1([t_0,t_1],\, \mathbf{R}^n)} \mathcal{J}(x(\cdot)) = \inf_{\mathcal{V}\cap KC^1([t_0,\, t_1],\, \mathbf{R}^n)} \mathcal{J}(x(\cdot)).$$

I n d i c a t i o n. Servez-vous du lemme sur l'arrondissement des angles (voir 1.4.3).

Si $x(\cdot)$ donne un extrémum fort au problème (1) et la fonction $\dot{x}(\cdot)$ est continue, alors, évidemment, $x(\cdot)$ donne également un extrémum faible. Par conséquent, les conditions nécessaires d'extrémum faible le sont également (dans le cas où $\dot{x}(\cdot)$ est continue) pour l'extrémum fort. Nous connaissons déjà certaines des conditions nécessaires. Dans le § 1.4, par des méthodes élémentaires, nous avons établi: l' é q u a t i o n d' E u l e r, condition nécessaire d'extrémum faible, et (pour $n = 1$) la c o n d i t i o n d e W e i e r s t r a s s, condition nécessaire de minimum fort. Voyons maintenant comment se présente le problème le plus simple du point de vue général. D'une part, (1), (2) se réduit au problème de Lagrange suivant:

$$\mathcal{J}(x(\cdot),\ u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x(t),\ u(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{3}$$

$$\dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Si l'on suppose que non seulement L, mais aussi ses dérivées par rapport à x, u sont continues dans V, on peut appliquer à (3) le théorème d'Euler-Lagrange du § 4.1. Alors, l'optimalité faible du processus $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ dans le problème (3) signifie exactement la même chose que l'extrémalité faible de $\hat{x}(\cdot)$ dans le problème (1), (2).

Si $\hat{x}(\cdot)$ donne un extrémum faible au problème (1), (2), alors, en vertu du théorème d'Euler-Lagrange, il existe un $\hat{\lambda}_0$ et une fonction $\hat{p}(\cdot) \in C^1([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^{n*})$ tels que

$$\dot{\hat{p}}(t) = \hat{\lambda}_0 L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)),\ \hat{p}(t) = \hat{\lambda}_0 L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)).$$

Si $\hat{\lambda}_0 = 0$, tous les multiplicateurs de Lagrange s'annulent, par conséquent, on peut poser $\hat{\lambda}_0 = 1$. En éliminant $\hat{p}(\cdot)$, on obtient le système d'équations d'Euler

$$\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) = \hat{L}_x(t) \tag{4}$$

(comme toujours, on a ici $\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$, etc.).

D'autre part, on peut considérer le problème (3) (en supposant, pour fixer les idées, que c'est un problème de minimum; dans le problème de maximum il faut remplacer L par $-L$), comme un problème de commande optimale avec $\mathfrak{U} = \mathbf{R}^n$.

Si l'on suppose que L et L_x sont continues relativement à l'ensemble de toutes les variables, on peut appliquer à (1), (2) le principe du maximum du § 4.2. Dans ce cas l'optimalité du processus $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ signifie que la fonction

$$\hat{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$$

donne un minimum fort au problème (1), (2).

Il découle du principe du maximum que l'on peut trouver un $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$ et une fonction différentiable par morceaux $\hat{p}(\cdot): [t_0, t_1] \to \to \mathbf{R}^{n*}$ tels que

$$\dot{\hat{p}}(t) = \hat{\lambda}_0 \hat{L}_x(t), \tag{5}$$

$$\min_{u \in \mathbf{R}^n} \{\hat{\lambda}_0 L(t, \hat{x}(t), u) - \hat{p}(t) u\} =$$

$$= \hat{\lambda}_0 L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{p}(t)\dot{\hat{x}}(t). \tag{6}$$

L'égalité $\hat{\lambda}_0 = 0$ est ici impossible, puisque on tire de (5) les relations $\hat{\lambda}_0 = 0 \Rightarrow \hat{p}(t) \equiv \text{Cte}$ et $\hat{p}(t) \neq 0$ (autrement tous les multiplicateurs de Lagrange seraient nuls). Mais lorsque $\hat{\lambda}_0 = 0$ et $\hat{p} \neq 0$, la relation (6) ne peut avoir lieu (une fonction linéaire non triviale ne possède pas de minimum sur $\mathbf{R}^n$). Ainsi $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ et l'on peut supposer que $\hat{\lambda}_0 = 1$.

La condition (6) se récrit sous forme subdifférentielle

$$\hat{p}(t) \in (\partial_{\dot{x}} L)(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)). \tag{7}$$

Si L est différentiable relativement à $\dot{x}$ aussi, alors (6) implique l'égalité $\hat{p}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)$ et nous obtenons d'une part l'équation d'Euler (4), et d'autre part, nous tirons de (6) la *condition nécessaire*

de Weierstrass

$$L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geqslant 0, \quad \forall u \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{8}$$

Introduisons (comparer à 1.4.4) la *fonction de Weierstrass* $\mathscr{E}$ (du latin *excessus*, excédent)

$$\mathscr{E}(t, x, \xi, u) = L(t, x, u) - L(t, x, \xi) - L_{\dot{x}}(t, x, \xi)(u - \xi). \tag{9}$$

Alors la condition de Weierstrass (8) peut se mettre sous la forme

$$\mathscr{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) \geqslant 0, \quad \forall u \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{10}$$

Si l'on suppose que non seulement L et $L_{\dot{x}}$, mais aussi $L_{\dot{x}\dot{x}}$, sont continues dans V, on tire de (8) l'inégalité

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{11}$$

La condition (11) est appelée *condition de Legendre.*

Ainsi l'équation d'Euler est une condition nécessaire d'extrémum faible aussi bien que fort. En outre, nous avons déduit du principe du maximum encore deux conditions nécessaires de minimum fort: la condition de Weierstrass et celle de Legendre (dans le sous-paragraphe suivant nous verrons que cette dernière doit également être satisfaite pour le minimum faible).

4.4.2. Conditions de deuxième ordre pour l'extrémum faible. Conditions de Legendre et Jacobi.

Lemme. *Supposons que la fonction L est continue dans V et en outre ses dérivées L_{x_i}, $L_{\dot{x}_i}$, $L_{x_i x_j}$, $L_{x_i \dot{x}_j}$, $L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}$ existent et sont continues dans V.*

Si $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ vérifie l'équation d'Euler, on a la formule asymptotique suivante pour $\|h(\cdot)\|_{C^1} \to 0$:

$$\mathscr{J}(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) = \mathscr{J}(\hat{x}(\cdot)) + \int_{t_0}^{t_1} \{h(t)^{\mathrm{T}} \hat{L}_{xx}(t) h(t) + 2h^{\mathrm{T}}(t) \hat{L}_{x\dot{x}}(t) \dot{h}(t) + \dot{h}(t)^{\mathrm{T}} \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{h}(t)\} dt + o\left(\int_{t_0}^{t_1} [|h(t)|^2 + |\dot{h}(t)|^2] dt\right), \tag{1}$$

$$\forall h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n), \quad h(t_0) = h(t_1) = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme dans le sous-paragraphe 2.4.2, en entourant le graphique de $\hat{x}(\cdot)$ par un compact entièrement contenu dans V, et en nous servant ensuite de la continuité uniforme des dérivées secondes de la fonction L sur ce compact pour donner une estimation du terme résiduel dans la formule de Taylor, nous obtenons la décomposition

$$L(t, \hat{x}(t)+h(t), \dot{\hat{x}}(t)+\dot{h}(t)) = \\ = \hat{L}(t)+\hat{L}_x(t)\,h(t)+\hat{L}_{\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t)+ \\ +\frac{1}{2}\{h^{\mathrm{T}}(t)\,\hat{L}_{xx}(t)\,h(t)+2h^{\mathrm{T}}(t)\,\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t)+ \\ +\dot{h}^{\mathrm{T}}(t)\,\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t)\}+\varepsilon(t,\ h(\cdot))\,[|h(t)|^2+|\dot{h}(t)|^2], \qquad (2)$$

où $\varepsilon(t; h(\cdot))$ tend vers zéro uniformément sur Δ lorsque $\|h(\cdot)\|_{C^1}\to 0$.

Prenant l'intégrale de cette relation de t_0 à t_1, en intégrant comme d'habitude par parties le terme linéaire en $\dot{h}(t)$ et en appliquant ensuite l'équation d'Euler, on obtient (1). ■

Si $\hat{x}(\cdot)$ donne un minimum faible au problème (1), (2) de 4.4.1, alors en remplaçant $h(\cdot)$ par $\alpha h(\cdot)$ dans (1) et en calculant la limite $\lim\,[\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)+\alpha h(\cdot))-\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))]/\alpha^2$ pour $\alpha\downarrow 0$, nous voyons que la fonctionnelle quadratique Q vérifie

$$Q(h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\{h^{\mathrm{T}}(t)\,\hat{L}_{xx}(t)\,h(t)+2h^{\mathrm{T}}(t)\,\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t)+ \\ +\dot{h}^{\mathrm{T}}(t)\,\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t)\}\,dt\geqslant 0, \qquad (3)$$

$$\forall h(\cdot)\in C^1([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^n),\quad h(t_0)=h(t_1)=0.$$

Cela signifie que la fonction $\hat{h}(\cdot)\equiv 0$ donne un minimum faible au problème d'extrémum secondaire

$$Q(h(\cdot))\to\inf,\quad h(t_0)=h(t_1)=0. \qquad (4)$$

D'après le lemme sur l'arrondissement des angles (voir 1.4.3), les bornes inférieures de la fonctionnelle Q sur les ensembles de fonctions admissibles dans les espaces $C^1([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^n)$ et $KC^1([t_0,\ t_1],\ \mathbf{R}^n)$ coïncident. Par conséquent $\hat{h}(\cdot)\equiv 0$ donne également un minimum fort au problème (4) (remarquons qu'en vertu de l'homogénéité de Q, les minimums locaux sont également des minimums globalement et la différence entre les minimums faibles et forts se réduit au changement de l'ensemble des fonctions admissibles).

D'après ce que nous avons démontré dans 4.4.1, nous devons avoir pour le problème (4) la condition de Legendre qui a évidemment la même forme

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{5}$$

que pour (1), (2). Ainsi la condition de Legendre s'avère nécessaire non seulement pour le minimum fort, comme dans 4.4.1, mais aussi pour le minimum faible.

L'équation d'Euler pour le problème secondaire (4)

$$\frac{d}{dt}[\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t) + \hat{L}_{\dot{x}x}(t)\,h(t)] = \hat{L}_{x\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t) + \hat{L}_{xx}(t)\,h(t) \tag{6}$$

est appelée *équation de Jacobi* pour le problème de départ (1), (2) de 4.4.1.

Définition. Le point τ est appelé point *conjugué au point* t_0 (relativement à la fonctionnelle Q) si l'équation de Jacobi (6) possède une solution $\bar{h}(\cdot)$ pour laquelle $\bar{h}(t_0) = \bar{h}(\tau) = 0$, mais [1])

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\,\dot{\bar{h}}(\tau) \neq 0. \tag{7}$$

Théorème 1 (conditions nécessaires d'extrémum faible pour le problème le plus simple). *Supposons que la fonction L vérifie les hypothèses du lemme.*

Si $\hat{x}(\cdot)$ *donne un minimum faible au problème* (1), (2) *de* 4.4.1, *alors*

1) $\hat{x}(\cdot)$ *vérifie l'équation d'Euler* (4) *dans* 4.4.1 ;
2) *on a la condition de Legendre* (5) ;
3) *on a la condition de Jacobi: dans l'intervalle* (t_0, t_1) *il n'y a pas de points conjugués à* t_0 ;
4) *on a l'inégalité* (3).

Dans le cas où $\hat{x}(\cdot)$ *donne un maximum faible, il faut remplacer le signe* $\geqslant$ *par* $\leqslant$ *dans* (3) *et* (5).

Démonstration. Les assertions 1), 2) et 4) ont déjà été démontrées: voir (1) dans le sous-paragraphe précédent. Par conséquent, il ne reste qu'à démontrer 3). Supposons le contraire: soit $\tau \in (t_0, t_1)$ le point conjugué à t_0 et $\bar{h}(\cdot)$ la solution correspondante de l'équation de Jacobi $\bar{h}(t_0) = \bar{h}(\tau) = 0$, (7) ayant lieu.

---

[1]) En général, dans les manuels de calcul des variations on définit les points conjugués en posant la condition de Legendre sous forme plus forte: $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$. Sous cette hypothèse $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\,\dot{\bar{h}}(\tau) = 0 \Rightarrow \dot{\bar{h}}(\tau) = 0$ et, puisque $\bar{h}(\tau) = 0$, le théorème d'unicité implique $\bar{h}(\cdot) \equiv 0$. La condition (7) est donc équivalente à la non-trivialité de $\bar{h}(\cdot)$, on la remplace généralement par cette hypothèse.

Posons

$$\tilde{h}(t)=\begin{cases}\bar{h}(t), & t_0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant t_1.\end{cases} \tag{8}$$

Alors

$$Q(\tilde{h}(\cdot))=\int_{t_0}^{\tau}\{\bar{h}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{xx}(t)\bar{h}(t)+2\bar{h}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{\bar{h}}(t)+$$
$$+\dot{\bar{h}}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\bar{h}}(t)\}\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{\tau}\bar{h}(t)^{\mathrm{T}}[\hat{L}_{xx}(t)\bar{h}(t)+\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{\bar{h}}(t)]\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{\tau}\dot{\bar{h}}(t)^{\mathrm{T}}[\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\bar{h}}(t)+\hat{L}_{\dot{x}x}(t)\bar{h}(t)]\,dt$$

(nous nous sommes servis ici du fait que $\bar{h}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{\bar{h}}(t)=$ $=\dot{\bar{h}}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{\dot{x}x}(t)\bar{h}(t)$). En nous rappelant que $\bar{h}(\cdot)$ vérifie l'équation (6), calculons par parties la première intégrale (les égalités $\bar{h}(t_0)=\bar{h}(\tau)=0$ étant prises en considération); nous voyons alors que les intégrales s'annulent. Ainsi $Q(\tilde{h}(\cdot))=0$, ce qui signifie que $\tilde{h}(\cdot)$ donne (ainsi que la fonction $\hat{h}(\cdot)\equiv 0$) un minimum fort au problème (4). Appliquons à nouveau le principe du maximum du § 4.2. Nous en tirons l'existence d'un $\hat{\lambda}_0\geqslant 0$ et d'une fonction $\tilde{p}(\cdot)$: $[t_0, t_1]\to\mathbf{R}^{n*}$ différentiable par morceaux, tels que

$$\dot{\tilde{p}}(t)=2\hat{\lambda}_0\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{\tilde{h}}(t)+2\hat{\lambda}_0\hat{L}_{xx}(t)\tilde{h}(t),$$

$$\min_{u\in\mathbf{R}^n}\{\hat{\lambda}_0u^{\mathrm{T}}\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)u+2\hat{\lambda}_0\tilde{h}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}(t)u-\tilde{p}(t)u\}=$$
$$=\hat{\lambda}_0\dot{\tilde{h}}^{\mathrm{T}}(t)\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\tilde{h}}(t)+2\hat{\lambda}_0\tilde{h}(t)^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{\tilde{h}}(t)-\tilde{p}(t)\dot{\tilde{h}}(t). \tag{9}$$

On démontre par le même raisonnement que précédemment que $\hat{\lambda}_0\neq$ $\neq 0$ et l'on peut supposer que $\hat{\lambda}_0=1/2$.

Il découle des relations (9) que

$$\tilde{p}(t)=\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\tilde{h}}(t)+\hat{L}_{\dot{x}x}(t)\tilde{h}(t). \tag{10}$$

Mais pour $t \geqslant \tau$ la fonction $\tilde{h}(\cdot)$ est identiquement nulle, il découle donc de (10) que $\tilde{p}(\tau + 0) = 0$. D'autre part,

$$\tilde{p}(\tau - 0) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{\tilde{h}}(\tau - 0) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{\bar{h}}(\tau) \neq 0$$

en vertu de (7). Par conséquent, $\tilde{p}$ est discontinue, mais en vertu du principe du maximum elle doit être continue. La contradiction obtenue démontre la condition de Jacobi. ■

Ainsi nous avons établi que toutes les conditions nécessaires d'extrémum dans le problème le plus simple envisagées d'habitude dans les cours de calcul des variations, à savoir celles d'Euler, de Legendre, de Jacobi et de Weierstrass, sont des conséquences du principe du maximum. Passons maintenant aux conditions suffisantes d'extrémum faible.

T h é o r è m e 2 (c o n d i t i o n s s u f f i s a n t e s d'e x t r é m u m f a i b l e p o u r l e p r o b l è m e l e p l u s s i m p l e). *Supposons que la fonction L vérifie les conditions du lemme, la fonction* $\hat{x}(\cdot)$ *appartient à* $C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ *et son graphique élargi* $\{t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ *est contenu dans V.*

Si:

1) *la fonction* $\hat{x}(\cdot)$ *vérifie l'équation d'Euler* ((4) *dans* 4.4.1);

2) *les conditions aux limites* $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_1) = x_1$ *sont vérifiées*;

3) *on a la condition de Legendre sous la forme forte*

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \tag{11}$$

4) *on a la condition de Jacobi sous la forme forte: dans le semi-intervalle* $(t_0, t_1]$ *il n'y a pas de points conjugués à* t_0, *alors* $\hat{x}(\cdot)$ *donne un minimum faible strict* (*un maximum, si l'on remplace le signe* $>$ *par* $<$ *dans* (11)) *au problème le plus simple* (1), (2) *de* 4.4.1.

La démonstration de ce théorème sera effectuée dans 4.4.5.

4.4.3. Formalisme hamiltonien. Théorème sur l'invariant intégral. Nous avons déjà mentionné dans 4.1.1 que les équations d'Euler-Lagrange avec les équations de relation différentielle peuvent être amenées à un *système hamiltonien* (ou *canonique*) de la forme

$$\dot{x} = \mathscr{H}_p(t, x, p), \quad \dot{p} = -\mathscr{H}_x(t, x, p), \tag{1}$$

où la fonction $\mathscr{H}$ est appelée *hamiltonien* (ou *fonction de Hamilton*) du problème donné. Ici, nous étudions cette transformation plus en détail, en restant dans le cadre du problème le plus simple (1),

(2) de 4.4.1. Le passage de l'équation d'Euler pour ce problème ((4) dans 4.4.1) au système canonique (1) s'effectue à l'aide de la transformation de Legendre. C'est d'elle que nous allons maintenant nous occuper.

Définition 1. Supposons que la fonction $l: v \to \mathbf{R}$ est de classe $C^1(v)$ dans l'ouvert v de l'espace normé X et sa dérivée applique biunivoquement v sur $d = \{p \mid p = l'(\xi),\ \xi \in v\} \subset X^*$; $\Xi: d \to v$ est l'application inverse à l'. La fonction $h: d \to \mathbf{R}$, définie par l'égalité

$$h(p) = \langle p, \Xi(p)\rangle - l(\Xi(p)), \tag{2}$$

est appelée *transformée de Legendre classique* de la fonction l.

Proposition 1. *Supposons que la fonction $l: v \to \mathbf{R}$ est de classe $C^2(v)$ dans l'ouvert convexe v de l'espace normé X. Si l'' est définie positive, i.e.*

$$d^2 l(\xi; \eta) = l''(\xi)[\eta, \eta] > 0, \quad \forall \xi \in v, \quad \forall \eta \in X, \quad \eta \neq 0, \tag{3}$$

alors la transformée de Legendre $h(\cdot)$ de la fonction $l(\cdot)$ est définie et coïncide dans d avec la transformée de Young-Fenchel (*voir* 2.6.3) *de la fonction*

$$\tilde{l} = \begin{cases} l(\xi), & \xi \in v, \\ +\infty, & \xi \notin v, \end{cases} \tag{4}$$

qui est convexe.

Démonstration. La convexité de $\tilde{l}$ a été démontrée dans 2.6.1 (exemple 2), la biunivocité de l'application $\xi \mapsto l'(\xi)$ se démontre de manière analogue à la partie B) de la démonstration de la proposition 2 ci-dessous.

Par définition de la fonction conjuguée (voir 2.6.3), on a

$$\tilde{l}^*(p) = \sup_{\xi}\{\langle p, \xi\rangle - \tilde{l}(\xi)\} = -\inf\{\tilde{l}(\xi) - \langle p, \xi\rangle\}.$$

Si $p \in d$, alors $p = l'(\bar{\xi}) = \tilde{l}'(\bar{\xi})$ pour un certain $\bar{\xi} \in v$. Par conséquent, $0 = (\tilde{l}'(\bar{\xi}) - p) \in \partial[\tilde{l}(\cdot) - \langle p, \cdot\rangle](\bar{\xi})$, d'où l'on tire que $\bar{\xi}$ est un point de minimum de la fonction $\tilde{l}(\cdot) - \langle p, \cdot\rangle$ et

$$\tilde{l}^*(p) = -(\tilde{l}(\bar{\xi}) - \langle p, \bar{\xi}\rangle) = \langle p, \bar{\xi}\rangle - \tilde{l}(\bar{\xi}).$$

Puisque $p = l'(\bar{\xi})$, on a $\bar{\xi} = \Xi(p)$ et par définition $\tilde{l}^*(p) = h(p)$. ■

En nous rappelant l'inégalité de Young (voir 2.6.3) nous obtenons le

Corollaire 1. *Dans les hypothèses de la proposition* 1

$$l(\xi) + h(p) \geqslant \langle p, \xi\rangle, \quad \forall p \in d, \quad \forall \xi \in v. \tag{5}$$

Pour obtenir à partir du lagrangien $L(t, x, \dot{x})$ du problème le plus simple son hamiltonien $\mathscr{H}(t, x, p)$, il faut effectuer une transformation de Legendre relativement à la variable $\dot{x}$. Ainsi

$$\mathscr{H}(t, x, p) = p\dot{x} - L(t, x, \dot{x}), \tag{6}$$

où $\dot{x}$ doit être exclue à l'aide de la relation

$$p = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}), \tag{7}$$

de sorte que la formule (6) définit $\mathscr{H}$ correctement lorsque l'application $\dot{x} \mapsto L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$ est biunivoque. (Dans les formules (6) et (7) $\dot{x}$ joue le rôle d'une variable indépendante ; pour ne pas la confondre avec dx/dt, nous la désignerons $\dot{x} = \xi$ par la suite, tout en gardant dans les notations pour les dérivées de L le symbole $\dot{x}$, par exemple $L_{\dot{x}}$, $\partial L/d\dot{x}_i$, etc.).

* Proposition 2. *Supposons que la fonction* $(t, x, \xi) \mapsto \mapsto L(t, x, \xi)$ *est de classe* $C^r(V)$, $r \geqslant 2$, *dans l'ouvert* $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

1) *Si :*

a) *la dérivée seconde* $L_{\dot{x}\dot{x}}$ *dans* V *est non dégénérée, i.e.*

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i\, \partial \dot{x}_j}(t, x, \xi)\right) \neq 0, \quad \forall (t, x, \xi) \in V;$$

b) *l'application* P *définie par l'égalité*

$$P(t, x, \xi) = (t, x, L_{\dot{x}}(t, x, \xi))$$

est une bijection de V *sur* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n*}$, *alors* D *est ouvert,* $P^{-1} \in C^{r-1}(D)$ *et la fonction* $\mathscr{H}: D \to \mathbf{R}$, *définie par les égalités* (6) *et* (7), *est de classe* $C^r(D)$.

2) *Si pour tous* (t, x) *la section* $V_{t,x} = \{\xi \mid (t, x, \xi) \in V\}$ *est convexe et pour tous* $(t, x, \xi) \in V$ *la matrice de* $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \xi)$ *est définie positive, alors les conditions* a) *et* b) *sont remplies et la conclusion de* 1) *reste valable.*

Démonstration. A) L'application inverse à P qui existe en vertu de b) est évidemment de la forme

$$(t, x, p) \mapsto (t, x, \Xi(t, x, p)),$$

de sorte que

$$p = L_{\dot{x}}(t, x, \xi) \Leftrightarrow \xi = \Xi(t, x, p). \tag{8}$$

Puisque $L \in C^r(V)$, $r \geqslant 2$, l'application P appartient à $C^{r-1}(V) \subset \subset C^1(V)$. Sa matrice de Jacobi est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ L_{\dot{x}t} & L_{\dot{x}x} & L_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix},$$

et son déterminant, égal à $\det L_{\dot{x}\dot{x}}$, est non nul en vertu de a).

Supposons que $(t_0, x_0, p_0) = P(t_0, x_0, \xi_0)$ est un point quelconque de D. D'après le théorème des applications inverses, il existe un voisinage $U \ni (t_0, x_0, \xi_0)$ dont l'image $P(U) \subset D$ est un voisinage de (t_0, x_0, p_0). Par conséquent, D est ouvert. D'après le même théorème, P^{-1} (qui est bien définie) coïncide sur $P(U)$ avec une application de classe C^1. Puisque le point $(t_0, x_0, p_0) \in D$ était arbitraire, on a $P^{-1} \in C^1(D)$. En outre, il découle de (8) que $\Xi(t, x, p)$, en tant que fonction implicite, se détermine par l'équation

$$F(t, x, p, \xi) = p - L_{\dot{x}}(t, x, \xi) = 0;$$

cette dernière étant la composée de fonctions de classe C^{r-1}, on voit que Ξ, ainsi que P^{-1}, est de classe $C^{r-1}(D)$ (voir la remarque qui suit le théorème des fonctions implicites dans 2.3.4).

Nous déduisons de (6), (7) et (8) l'identité

$$\mathscr{H}(t, x, p) = p\Xi(t, x, p) - L(t, x, \Xi(t, x, p)). \tag{9}$$

En prenant sa dérivée, nous obtenons

$$\mathscr{H}_t = p\Xi_t - L_t - L_{\dot{x}}\Xi_t = [p - L_{\dot{x}}(t, x, \Xi)]\,\Xi_t - L_t =$$
$$= -L_t(t, x, \Xi(t, x, p)), \tag{10}$$

$$\mathscr{H}_x = p\Xi_x - L_x - L_{\dot{x}}\Xi_x = -L_x(t, x, \Xi(t, x, p)), \tag{11}$$

$$\mathscr{H}_p = \Xi + p\Xi_p - L_{\dot{x}}\Xi_p = \Xi(t, x, p). \tag{12}$$

Les formules (10) à (12) montrent que les dérivées premières de la fonction $\mathscr{H}$ sont des composées de fonctions de classe C^{r-1}, par conséquent, elles appartiennent également à cette classe. Ainsi $\mathscr{H} \in C^r(D)$.

B) Si la matrice de $L_{\dot{x}\dot{x}}$ est définie positive, alors, d'après le critère de Sylvester (voir [9], p. 187), on a det $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$, de sorte que a) est établie. Supposons que les sections $V_{t,x}$ sont convexes. Alors, pour tout couple de points $(t, x, \xi_k) \in V$, $k = 1, 2$, on a $(t, x, \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2) \in V$, $\alpha \in [0, 1]$. En désignant $p_k = L_{\dot{x}}(t, x, \xi_k)$, on obtient

$$p_1 - p_2 = L_{\dot{x}}(t, x, \xi_1) - L_{\dot{x}}(t, x, \xi_2) =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} L_{\dot{x}}(t, x, \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2)\, d\alpha =$$
$$= \int_0^1 L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2)(\xi_1 - \xi_2)\, d\alpha.$$

Si $\xi_1 \neq \xi_2$, mais $P(t, x, \xi_1) = (t, x, p_1) = (t, x, p_2) = P(t, x, \xi_2)$, alors $p_1 = p_2$ et

$$0 = \langle p_1 - p_2, \xi_1 - \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} (p_{1i} - p_{2i})(\xi_{1i} - \xi_{2i}) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} (t, x, \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2)(\xi_{1i} - \xi_{2i})(\xi_{1j} - \xi_{2j})\, d\alpha > 0,$$

puisque par hypothèse la fonction sous le signe de l'intégrale est positive ($L_{\dot{x}\dot{x}}$ est définie positive). Cette contradiction montre que $p_1 = p_2 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$, i.e. b) est vérifiée. ■

En se rappelant le corollaire 1, on obtient le

C o r o l l a i r e 2. *Dans les hypothèses de la deuxième partie de la proposition* 2 *pour des* $(t, x, \xi) \in V$, $(t, x, p) \in D$ *quelconques, on a l'inégalité*

$$\mathscr{H}(t, x, p) + L(t, x, \xi) \geqslant \langle p, \xi \rangle.$$

Passons maintenant aux relations entre l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = L_x(t, x, \dot{x}) \tag{13}$$

et le système de Hamilton (1). Nous appelons par la suite $x: \Delta \to \mathbf{R}^n$ solution de l'équation (13) (ou la paire $(x, p): \Delta \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n*}$, solution du système (1)), nous sous-entendons sans le dire explicitement que $(t, x(t), \dot{x}(t)) \in V$ pour tous les $t \in \Delta$ (respectivement $(t, x(t), p(t)) \in D$). Plus brièvement, la solution $x: \Delta \to \mathbf{R}^n$ de l'équation d'Euler (13), ainsi que son graphique $\{(t, x(t)) \mid t \in \Delta\}$, sera appelée *extrémale*, et la solution $(x, p): \Delta \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n*}$ du système de Hamilton (1) et son graphique $\{(t, x(t), p(t)) \mid t \in \Delta\}$, *extrémale canonique* (le contexte permettra toujours de distinguer s'il s'agit de fonctions ou de leurs graphiques).

P r o p o s i t i o n 3. *Supposons que la fonction* $L \in C^2(V)$ *vérifie les conditions* a) *et* b) *de la proposition 2.*

La paire $(x(\cdot), p(\cdot))$ *est une extrémale canonique si et seulement si* $x(\cdot)$ *est une extrémale et*

$$p(t) \equiv L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{14}$$

D é m o n s t r a t i o n. A) Supposons que $x(\cdot)$ est une extrémale. Si $p(\cdot)$ est définie par l'égalité (14), on a d'après (8) $\dot{x}(t) = \Xi(t, x(t), p(t))$. Maintenant la première des équations (1) découle de (12) et la deuxième de (11) et (13).

B) Supposons que $(x(\cdot), p(\cdot))$ est une extrémale canonique. Alors la première des équations (1) implique (14) à l'aide de (12), (8), tandis que la deuxième des équations (1) se transforme en (13) en vertu de (11). ■

R e m a r q u e. L'hypothèse $L \in C^2(V)$ est ici plus forte qu'il n'est réellement nécessaire: de même que dans 4.4.2, il aurait suffi de postuler l'existence et la continuité des dérivées premières et secondes relativement à $\dot{x}_i$ et x_j seulement. Nous laissons au lecteur le soin d'établir la validité de cette remarque ; pour cela, il lui faudra introduire des modifications appropriées dans l'énoncé des théorèmes des fonctions implicites et des fonctions inverses (voir 2.3.4).

Les systèmes hamiltoniens (1) possèdent de nombreuses propriétés remarquables (voir, par exemple, [2]). Nous nous limiterons à une seule, qui se rapporte à la démonstration des conditions suffisantes d'extrémum.

T h é o r è m e s u r l'i n v a r i a n t i n t é g r a l. *Supposons que la fonction $\mathscr{H}$ est de classe C^2 dans l'ouvert $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n*}$, la forme différentielle ω est définie dans D par l'égalité*

$$\omega = p\,dx - \mathscr{H}\,dt = \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i - \mathscr{H}(t, x, p)\,dt, \qquad (15)$$

$\Gamma_k = \{(t_k(\alpha), x_k(\alpha), p_k(\alpha)) \mid a \leqslant \alpha \leqslant b\}$, $k = 0, 1$, *sont deux courbes fermées différentiables par morceaux dans D (de sorte que $t_k(a) = t_k(b)$, $x_k(a) = x_k(b)$, $p_k(a) = p_k(b)$).*

Si Γ_1 s'obtient de Γ_2 par translation le long d'une extrémale canonique, i.e. si pour chaque α les points $\mathscr{P}_0(\alpha) = (t_0(\alpha), x_0(\alpha), p_0(\alpha))$ et $\mathscr{P}_1(\alpha) = (t_1(\alpha), x_1(\alpha), p_1(\alpha))$ sont situés sur une même extrémale canonique, alors

$$\oint_{\Gamma_0} \omega = \oint_{\Gamma_1} \omega. \qquad (16)$$

D é m o n s t r a t i o n. A) En vertu du théorème classique sur la différentiabilité des solutions relativement aux données initiales (voir 2.5.7) et le théorème de superposition (voir 2.2.2), la solution du problème de Cauchy pour le système (1) à données initiales $(t_0(\alpha), x_0(\alpha), p_0(\alpha))$, que nous désignerons par $(x(t, \alpha), p(t, \alpha))$, sera continûment différentiable par morceaux relativement à α et continûment différentiable relativement à t. L'application

$$\sigma\colon \{(t, \alpha) \mid a \leqslant \alpha \leqslant b, \quad t \in [t_0(\alpha), t_1(\alpha)]\} \to D$$

(pour $t_1(\alpha) < t_0(\alpha)$ il faut écrire ici $[t_1(\alpha), t_0(\alpha)]$) définie par l'égalité $\sigma(t, \alpha) = (t, x(t, \alpha), p(t, \alpha))$ détermine dans D une surface Σ de dimension deux (fig. 38). Ayant choisi une orientation appropriée de Σ, nous obtiendrons $\partial\Sigma = \Gamma_1 - \Gamma_0$ (les deux arcs qui correspondent à $\alpha = a$ et $\alpha = b$ coïncident géométriquement mais possèdent des orientations opposées, de sorte que les intégrales le long de ces arcs s'annulent mutuellement). En vertu de la formule

de Stockes

$$\oint_{\Gamma_1} \omega - \oint_{\Gamma_0} \omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega = \int_a^b \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} d\omega\,[\sigma_t, \sigma_\alpha]\,dt\,d\alpha$$

et l'égalité (16) sera démontrée si l'on vérifie que $d\omega\,[\sigma_t, \sigma_\alpha] \equiv 0$.

B) En prenant la dérivée de la forme (15), nous obtenons

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i - \left[\mathscr{H}_t\,dt + \sum_{i=1}^{n} (\mathscr{H}_{x_i}\,dx_i + \mathscr{H}_{p_i}\,dp_i)\right] \wedge dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [dp_i \wedge dx_i - \mathscr{H}_{x_i}\,dx_i \wedge dt - \mathscr{H}_{p_i}\,dp_i \wedge dt]. \qquad (17)$$

(Rappelons que pour la multiplication extérieur on a $dt \wedge dt = 0$.)

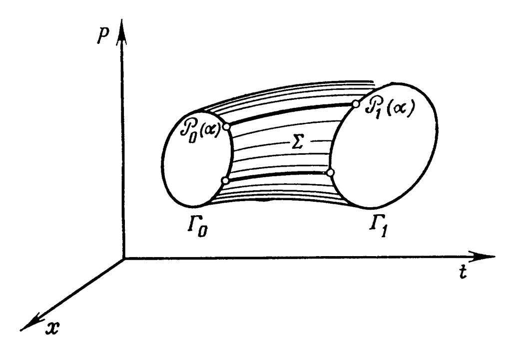


Fig. 33

Lorsque $\xi = (\xi_t, \xi_x, \xi_p)$, $\eta = (\eta_t, \eta_x, \eta_p)$ sont deux vecteurs tangents, nous obtenons de (17)

$$d\omega\,[\xi, \eta] = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{vmatrix} \xi_{p_i} & \xi_{x_i} \\ \eta_{p_i} & \eta_{x_i} \end{vmatrix} - \mathscr{H}_{x_i} \begin{vmatrix} \xi_{x_i} & \xi_t \\ \eta_{x_i} & \eta_t \end{vmatrix} - \mathscr{H}_{p_i} \begin{vmatrix} \xi_{p_i} & \xi_t \\ \eta_{p_i} & \eta_t \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= -\sum_i \begin{vmatrix} 1 & \mathscr{H}_{p_i} & -\mathscr{H}_{x_i} \\ \xi_t & \xi_{x_i} & \xi_{p_i} \\ \eta_t & \eta_{x_i} & \eta_{p_i} \end{vmatrix}.$$

Par conséquent,

$$d\omega\,[\sigma_t, \sigma_\alpha] = -\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & \mathscr{H}_{p_i} & -\mathscr{H}_{x_i} \\ 1 & x_{it}(t, \alpha) & p_{it}(t, \alpha) \\ 0 & x_{i\alpha}(t, \alpha) & p_{i\alpha}(t, \alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

puisque $\tilde{\sigma}(t, \alpha) = (x(t, \alpha), p(t, \alpha))$ relativement à la variable t est une solution du système (1); par conséquent, les deux premières lignes du déterminant coïncident. ■

En vue de la relation (16), on appelle la forme différentielle (15) *invariant intégral de Poincaré-Cartan.*

Définition 2. L'ensemble $A \subset D$ est appelé *ensemble de Legendre* si

$$\oint_\gamma \omega = 0 \tag{18}$$

pour toute courbe fermée différentiable par morceaux $\gamma \subset A$. Autrement dit, la contrainte $\omega \mid A$ est une forme fermée.

(Il faut préciser ici la notion de différentiabilité par morceaux. Nous allons supposer que A est l'image d'un ouvert $G \subset \mathbf{R}^k$ par l'application $\varphi: G \to D$ de classe $C^1(G)$ et que γ est l'image par cette application d'une courbe fermée différentiable par morceaux dans le sens usuel et γ est contenue dans G.)

Les trois exemples suivants d'ensembles de Legendre joueront un rôle essentiel par la suite.

1) Choisissons un point $(t_0, x_0, p_0) \in D$ et considérons la famille d'extrémales canoniques $\{(x(t, \lambda), p(t, \lambda)) \mid \alpha < t < \beta\}$ à conditions initiales

$$x(t_0, \lambda) = x_0, \quad p(t_0, \lambda) = \lambda. \tag{19}$$

L'ensemble

$$\Sigma = \{(t, x, p) \mid x = x(t, \lambda),\ p = p(t, \lambda),\ |p_0 - \lambda| < \varepsilon,\ \alpha < t < \beta\}$$

est l'ensemble cherché ; $\varepsilon > 0$ et l'intervalle $(\alpha, \beta) \ni t_0$ sont choisis de manière à avoir $\Sigma \subset D$.

En effet, comme nous l'avons noté ci-dessus, la courbe fermée différentiable par morceaux $\gamma \subset \Sigma$ est l'image d'une courbe fermée différentiable par morceaux

$$\Gamma = \{(t(s), \lambda(s)) \mid a \leqslant s \leqslant b,\ t(a) = t(b),\ \lambda(a) = \lambda(b)\} \subset \subset (\alpha, \beta) \times (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon)$$

par l'application $(t, \lambda) \mapsto (t, x(t, \lambda), p(t, \lambda))$. Ayant projeté Γ sur le plan $t = t_0$, on obtient la courbe fermée

$$\Gamma_0 = \{(t_0, \lambda(s)) \mid a \leqslant s \leqslant b,\ \lambda(a) = \lambda(b)\}$$

dont l'image vérifie

$$\gamma_0 = \{(t_0, x(t_0, \lambda(s)), p(t_0, \lambda(s)) \mid a \leqslant s \leqslant b\} = = \{(t_0, x_0, \lambda(s)) \mid a \leqslant s \leqslant b\} \tag{20}$$

en vertu de (19). Puisque γ_0 s'obtient de γ par une translation le long des extrémales canoniques, on a, d'après le théorème sur l'invariant intégral,

$$\oint_\gamma \omega = \oint_{\gamma_0} \omega = \oint_{\gamma_0} p\,dx - \mathscr{H}\,dt = 0,$$

car $dx = 0$, $dt = 0$ sur γ_0 en vertu de (20). Puisque (18) est vérifié pour tout $\gamma \subset \Sigma$, cet ensemble est un ensemble de Legendre.

2) Soit $x(\cdot)$ une fonction numérique, une famille d'extrémales $x(\cdot, \lambda): (\alpha, \beta) \mapsto \mathbf{R}$, $\lambda \in (\alpha_1, \beta_1)$ vérifiant $x(\cdot, \cdot) \in C^1((\alpha, \beta) \times \times (\alpha_1, \beta_1))$ étant donnée.

L'ensemble

$$\Sigma = \{(t, x, p) \mid x = x(t, \lambda),\ p = p(t, \lambda) = \\ = L_{\dot{x}}(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)),\ t \in (\alpha, \beta),\ \lambda \in (\alpha_1, \beta_1)\}$$

est l'ensemble cherché. En effet, soient γ, γ_0, Γ et Γ_0 les mêmes que précédemment. Alors

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma_0} \omega = \oint_{\gamma_0} p\,dx = \int_a^b p(t_0, \lambda(s)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t_0, \lambda(s)) \lambda'(s)\,ds. \tag{21}$$

Ayant désigné par $\Phi(\lambda)$ la primitive de la fonction $\lambda \mapsto \mapsto p(t_0, \lambda)\, x_\lambda(t_0, \lambda)$, nous pouvons continuer l'égalité (21):

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_a^b \Phi'(\lambda(s)) \lambda'(s)\,ds = \Phi(\lambda(s)) \Big|_{s=a}^{s=b} = 0,$$

puisque $\lambda(a) = \lambda(b)$ (la courbe est fermée).

3) Proposition 4. *Supposons que dans l'ouvert* $G \subset \mathbf{R} \times \times \mathbf{R}^n$ *on se donne une fonction* $p: G \to \mathbf{R}^{n*}$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, *dont le graphique* $\Sigma = \{(t, x, p(t, x)) \mid (t, x) \in G\}$ *est contenu dans* D. *Pour que* Σ *soit un ensemble de Legendre:*

a) *en supposant que* p *est continue, il faut et il suffit qu'il existe une fonction* $S \in C^1(G)$ *telle que*

$$p(t, x) = \frac{\partial S(t, x)}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathscr{H}\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \equiv 0; \tag{23}$$

b) *en supposant que* $p \in C^1(G)$, *il est nécessaire et, dans un domaine* G *simplement connexe, il est aussi suffisant qu'en chaque point* $(t, x) \in G$ *on ait les relations*

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

Démonstration. En substituant $p = p(t, x)$ dans (15), nous obtenons la forme

$$\tilde{\omega} = p(t, x)\,dx - \mathscr{H}(t, x, p(t, x))\,dt.$$

L'ensemble Σ étant de Legendre, il s'ensuit que $\oint_{\Gamma} \tilde{\omega} = 0$ pour tout $\Gamma \subset G$. Conformément au théorème classique d'analyse, ceci est équivalent au fait que $\tilde{\omega}$ est une forme exacte, i.e. il existe une forme S telle que $\tilde{\omega} = dS$. D'où l'on tire a).

Lorsque $p \in C^1(G)$, on a $\tilde{\omega} \in C^1(G)$ et $d\tilde{\omega} = d(dS) = 0$, ce qui est équivalent à (24). La suffisance de cette condition pour G simplement connexe découle du même théorème classique que a). ■

L'équation (23) est appelée *équation de Hamilton-Jacobi.* Si nous connaissons une de ses solutions dans le domaine G, alors (22) détermine une fonction à graphique de Legendre.

4.4.4. Conditions suffisantes d'extrémum absolu dans le problème le plus simple. Envisageons à nouveau le problème le plus simple du calcul des variations classique

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \to \text{extr}, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{2}$$

Nous supposerons que le lagrangien L est de classe C^2 dans l'ensemble ouvert $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Nous prendrons en guise de fonctions admissibles pour le problème (1), (2) les fonctions $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ à dérivées continues par morceaux dont le graphique élargi $\{(t, x(t), \dot{x}(t) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ est contenu dans V. Pour fixer les idées, tous les raisonnements seront effectués pour le minimum, les modifications nécessaires dans les énoncés pour le cas du maximum seront facilement effectuées par le lecteur en remplaçant L par $-L$.

Dans 4.4.1 et 4.4.2 nous avons déjà vu que la condition de Legendre $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \geqslant 0$ est nécessaire pour qu'une fonction admissible $\hat{x}(\cdot)$ donne un minimum au problème (1), (2). D'autre part, la condition de Legendre forte $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$ fait partie des conditions suffisantes de minimum. Il en découle à son tour que les fonctions $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$ sont convexes près des points $(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ et ceci donne à penser que la convexité du lagrangien L relativement à $\dot{x}$ dans tout le domaine de définition doit faire partie des conditions suffisantes de minimum absolu. Le théorème de Bogolioubov (1.4.3) confirme cette considération. Nous supposerons donc que

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \xi) > 0, \quad \forall (t, x, \xi) \in V \tag{3}$$

et que pour tous les (t, x) la section

$$V_{t,x} = \{\xi \mid (t, x, \xi) \in V\} \quad \text{est convexe.} \tag{4}$$

Il découle alors de la proposition 1 de 4.4.3 que la fonction

$$\tilde{L}(t, x, \xi) = \begin{cases} L(t, x, \xi), & (t, x, \xi) \in V, \\ +\infty, & (t, x, \xi) \notin V \end{cases} \tag{5}$$

est convexe relativement à ξ.

Conformément à la proposition 2 de 4.4.3, les conditions (3) et (4) garantissent le fait que le hamiltonien $\mathscr{H} \in C^2(D)$ est bien défini par les relations

$$\begin{gathered} \mathscr{H}(t, x, p) = p\dot{x} - L(t, x, \dot{x}), \\ p = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}), \end{gathered} \tag{6}$$

desquelles il faut éliminer $\dot{x}$. D'après le corollaire 2 du même sous-paragraphe, on a

$$\begin{gathered} L(t, x, \xi) + \mathscr{H}(t, x, p) \geqslant p\xi, \\ \forall (t, x, \xi) \in V, \quad \forall (t, x, p) \in D. \end{gathered} \tag{7}$$

Enfin, il nous faudra à nouveau nous servir de la forme différentielle de Poincaré-Cartan

$$\omega = p\,dx - \mathscr{H}(t, x, p)\,dt. \tag{8}$$

Théorème 1 (conditions suffisantes de minimum). *Supposons que L est de classe C^2 dans l'ouvert $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, les conditions* (3) *et* (4) *étant remplies. Supposons ensuite que D se définit comme dans la proposition* 2 *de* 4.4.3, *tandis que G est un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.*

Si :

1) $\hat{x}(\cdot): [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ *est une extrémale admissible du problème* (1), (2) *et son graphique*

$$\hat{\Gamma} = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

est contenu dans G ;

2) *il existe une fonction $p: G \to \mathbf{R}^{n*}$ de classe $C^1(G)$ dont le graphique*

$$\Sigma = \{(t, x, p(t, x)) \mid (t, x) \in G\}$$

est contenu dans D, tout en étant un ensemble de Legendre ;

3) $$\hat{p}(t) \overset{\text{def}}{=} p(t, \hat{x}(t)) \equiv L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t));$$

alors

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt > \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\,dt \tag{9}$$

pour toute fonction admissible $x(\cdot):[t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ *vérifiant les conditions aux limites* (2) *et ayant un graphique*

$$\Gamma = \{(t, x(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

contenu dans G.

R e m a r q u e. De la proposition 3 de 4.4.3, on tire l'égalité $\dot{\hat{x}}(t) = \mathscr{H}_p(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t))$; par conséquent, la dérivée $\dot{\hat{x}}(t)$ est continue en même temps que $\hat{x}(t)$ et $\hat{p}(t) = p(t, \hat{x}(t))$. Ainsi, $\hat{x}(\cdot)$ est continûment différentiable quoique nous avons considéré admissibles toutes les courbes différentiables par morceaux. Ce fait ne restreint pas l'applicabilité du théorème. En effet, nous avons montré dans 4.4.1 l'existence d'une fonction $\hat{p}(\cdot)$ continue (et même différentiable par morceaux) telle que $\hat{p}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ est la condition nécessaire d'un minimum (fort) qui découle du principe du maximum. Lorsqu'on a les conditions (3) et (4), cela signifie, comme nous l'avons vu, que $\dot{\hat{x}}(\cdot)$ doit être continue.

D é m o n s t r a t i o n. Désignons $p(t) = p(t, x(t))$ et considérons les courbes

$$\gamma = \{(t, x(t), p(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \subset \Sigma,$$
$$\hat{\gamma} = \{(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \subset \Sigma.$$

Puisque $x(t_i) = \hat{x}(t_i)$, $i = 0, 1$, et par conséquent $p(t_i) = p(t_i, x(t_i)) = p(t_i, \hat{x}(t_i)) = \hat{p}(t_i)$, les extrémités de ces courbes coïncident et l'on peut considérer la courbe fermée $\gamma - \hat{\gamma} \subset \Sigma$ que l'on obtient si l'on parcourt d'abord la courbe γ de $(t_0, x(t_0), p(t_0))$ à $(t_1, x(t_1), p(t_1))$ et ensuite on retourne suivant $\hat{\gamma}$. Puisque Σ est un ensemble de Legendre,

$$0 = \oint_{\gamma - \hat{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\hat{\gamma}} \omega. \tag{10}$$

En se servant de l'inégalité (7), on obtient

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} p\,dx - \mathscr{H}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \{p(t)\dot{x}(t) - \mathscr{H}(t, x(t), p(t))\}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt = \mathscr{J}(x(\cdot)), \tag{11}$$

l'égalité étant ici possible seulement lorsque

$$p(t)\dot{x}(t) - \mathscr{H}(t, x(t), p(t)) \equiv L(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

i.e. (en se servant à nouveau de (7)) dans le cas où

$$p(t)\dot{x}(t)-\mathscr{H}(t, x(t), p(t))=\max_{\{p|(t, x(t), p)\in D\}}\{p\dot{x}(t)-\mathscr{H}(t, x(t), p)\}.$$

D'après le théorème de Fermat,

$$\dot{x}(t)=\mathscr{H}_p(t, x(t), p(t)). \qquad (12)$$

Puisque p a un graphique de Legendre, nous devons avoir les égalités (24) de 4.4.3, d'où, compte tenu de (12),

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=\frac{d}{dt}p_i(t, x(t))=$$

$$=\frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_k\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}=-\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_i}+\sum_k\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right)+$$

$$+\sum_k\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_k}=-\mathscr{H}_{x_i}(t, x(t), p(t)). \qquad (13)$$

D'après (12) et (13), $(x(\cdot), p(\cdot))$ est une extrémale canonique. Mais $(x(t_0), p(t_0))=(\hat{x}(t_0), \hat{p}(t_0))$ et, puisque $(\hat{x}(\cdot), \hat{p}(\cdot))$ est également une extrémale canonique (proposition 3 de 4.4.3), on tire du théorème d'unicité les relations $x(t)\equiv\hat{x}(t)$, $p(t)\equiv\hat{p}(t)$.

Ainsi il découle de (11) que

$$\int_{\hat{\gamma}}\omega=\int_{t_0}^{t_1}L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\,dt=\mathscr{J}(\hat{x}(\cdot)),$$

et, pour les autres $x(\cdot)$ admissibles dont les graphiques sont contenus dans G et qui vérifient les conditions (2), on a

$$\int_{\gamma}\omega<\mathscr{J}(x(\cdot)).$$

En vertu de (10) on obtient $\mathscr{J}(x(\cdot))>\mathscr{J}(\hat{x}(\cdot))$. ■

Corollaire. *Dans les hypothèses du théorème, si G coïncide avec la projection de D sur* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n=\{(t, x)\}$, *alors* $\hat{x}(\cdot)$ *donne un minimum strict absolu au problème* (1), (2).

Une partie des hypothèses du théorème que nous venons de démontrer sont généralement présentées dans les cours de calcul des variations sous une forme quelque peu différente, en relation avec la notion de champ d'extrémales.

Définition. Supposons que Λ et G sont des ouverts dans $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ respectivement. La famille de fonctions

$$\{x(\cdot, \lambda): [t_0(\lambda), t_1(\lambda)]\to\mathbf{R}^n \mid \lambda\in\Lambda\}$$

forme un *champ d'extrémales recouvrant G* si:

1) $x(\cdot, \lambda)$ est une extrémale (solution de l'équation d'Euler) du problème (1), (2) pour tout $\lambda\in\Lambda$;

2) l'application $(t, \lambda) \mapsto (t, x(t, \lambda))$ est bijective et son image
$$\{(t, x) \mid x = x(t, \lambda),\ t_0(\lambda) \leqslant t \leqslant t_1(\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$$
contient G.

3) la fonction $p: G \to \mathbf{R}^{n*}$ définie par les égalités
$$\begin{gathered} p(t, x) = L_{\dot{x}}(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)), \\ (t, x) = (t, x(t, \lambda)), \end{gathered} \tag{14}$$
est de classe $C^1(G)$ et possède un graphique de Legendre.

La fonction $u: G \to \mathbf{R}^n$ définie par les égalités
$$u(t, x) = \dot{x}(t, \lambda), \quad (t, x) = (t, x(t, \lambda)), \tag{15}$$
est appelée *fonction d'inclinaison du champ*. L'extrémale $\hat{x}(\cdot)$: $[t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ fait partie du champ $x(\cdot, \cdot)$ si son graphique est contenu dans G et $\hat{x}(t) \equiv x(t, \hat{\lambda})$ pour un certain $\hat{\lambda} \in \Lambda$.

En substituant (14) et (15) dans (8) et en nous rappelant la définition d'un ensemble de Legendre (voir 4.4.3), nous pouvons reformuler la condition 3) de la manière suivante:

3′) Dans le domaine G l'intégrale
$$\int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} \{L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x))\, dx - \\ - [L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x))\, u(t, x) - L(t, x, u(t, x))]\}\, dt \tag{16}$$
ne dépend pas de la courbe entre les points (t_0, x_0) et (t_1, x_1) le long de laquelle on la calcule (en vertu d'un théorème classique d'analyse, cette dernière condition est équivalente à l'hypothèse que toute intégrale le long d'une courbe fermée s'annule). L'intégrale (16) est appelée *intégrale invariante de Hilbert*.

Théorème 1′. *Supposons que la fonction L satisfait aux hypothèses du théorème* 1 *et soit $\hat{x}(\cdot)$: $[t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ une extrémale admissible dont le graphique est contenu dans G.*

Si $\hat{x}(\cdot)$ peut être inclue dans un champ d'extrémales recouvrant G, alors $\hat{x}(\cdot)$ donne un minimum à la fonctionnelle (1) *dans la classe des fonctions admissibles vérifiant les conditions* (2) *et telles que leurs graphiques sont contenus dans G.*

Les lecteurs vérifieront sans difficulté que ceci n'est qu'une reformulation du théorème 1. Elle est particulièrement commode lorsque $n = 1$, car dans ce cas la condition 3) de la définition donnée ci-dessus découle de 1) et 2) (voir le deuxième exemple d'ensembles de Legendre dans 4.4.3). Cette remarque peut être utile dans la solution de nombreux problèmes.

4.4.5. Points conjugués. Conditions suffisantes d'extrémum fort et faible. Dans ce sous-paragraphe, nous supposons toujours que $L \in C^2(V)$; $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ est une extrémale admissible du problème (1), (2) de 4.4.4, le long de laquelle on a la condition de Legendre forte

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \qquad (1)$$

D'après la continuité, la matrice de $L_{\dot{x}\dot{x}}$ reste définie positive dans un certain voisinage $\hat{V}$ du graphique élargi $\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_1\}$. Choisissons le voisinage $\hat{V}$ de manière que ses sections $\hat{V}_{t,x} = \{\xi \mid (t, x, \xi) \in \hat{V}\}$ soient convexes. Alors on a les hypothèses de la proposition 2 de 4.4.3 conformément à laquelle nous pouvons déterminer un domaine $\hat{D} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n*}$ et un hamiltonien $\mathscr{H}: \hat{D} \to \mathbf{R}$ de classe C^2.

Les deuxièmes membres du système canonique

$$\dot{x} = \mathscr{H}_p(t, x, p), \quad \dot{p} = -\mathscr{H}_x(t, x, p) \qquad (2)$$

sont continûment différentiables dans $\hat{D}$. L'extrémale canonique $(\hat{x}(\cdot), \hat{p}(\cdot))$ qui correspond à l'extrémale $\hat{x}(\cdot)$ et, par conséquent, celle-ci elle-même, peuvent être prolongées à un certain intervalle ouvert qui contient le segment $[t_0, t_1]$. En prenant ensuite, s'il le faut, le voisinage $\hat{V}$ plus petit, nous pouvons supposer que $\hat{V}$ est de la forme

$$\hat{V} = \{(t, x, \xi) \mid |x - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \ |\xi - \dot{\hat{x}}(t)| < \varepsilon, \ t_0 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon\}.$$

Soit

$$(t_0, x_0, p_0) = (t_0, \hat{x}(t_0), L_{\dot{x}}(t_0, \hat{x}(t_0), \dot{\hat{x}}(t_0))).$$

Construisons la famille d'extrémales canoniques $\{(x(\cdot, \lambda), p(\cdot, \lambda)) \mid |\lambda - p_0| < \delta\}$ définies par les conditions initiales

$$x(t_0, \lambda) = x_0, \quad p(t_0, \lambda) = \lambda \qquad (3)$$

(comparer au premier exemple d'ensemble de Legendre dans 4.4.3). Pour un δ suffisamment petit, les extrémales de cette famille ainsi que $(\hat{x}(\cdot), \hat{p}(\cdot)) = (x(\cdot, p_0), p(\cdot, p_0))$ sont contenues dans $\hat{D}$ pour $t \in [t_0, t_1]$; les fonctions $x(\cdot, \cdot)$, $p(\cdot, \cdot)$ sont évidemment continûment différentiables (voir 2.5.7).

P r o p o s i t i o n 1. *Pour que le point* $\tau \in (t_0, t_1]$ *soit conjugué à* t_0, *il est nécessaire et suffisant d'avoir*

$$\det\left(\frac{\partial x(\tau, \lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=p_0}\right)=0. \tag{4}$$

D é m o n s t r a t i o n. A) D'après le théorème de 2.5.7, l'ensemble des dérivées des solutions du système (2) relativement aux données initiales constitue, pour $\lambda = p_0$, la matrice fondamentale des solutions du système d'équations en variations correspondant

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \hat{\mathscr{H}}_{px}\xi + \hat{\mathscr{H}}_{pp}\eta,\\ \dot{\eta} &= -\hat{\mathscr{H}}_{xx}\xi - \hat{\mathscr{H}}_{xp}\eta.\end{aligned} \tag{5}$$

Les dérivées $\partial x/\partial \lambda_i$, $\partial p/\partial \lambda_i$ qui nous intéressent, disposées en colonnes, constituent la moitié (n de $2n$) des colonnes de cette matrice et, en vertu des conditions (3), on a

$$\begin{pmatrix}\partial x/\partial \lambda_i\\ \partial p/\partial \lambda_i\end{pmatrix}\bigg|_{t=t_0}=\begin{pmatrix}0\\ e_i\end{pmatrix}. \tag{6}$$

L'égalité (4) est équivalente à l'existence d'un vecteur non nul $c \in \mathbf{R}^n$ vérifiant

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(\tau, p_0)\, c = \sum_i \frac{\partial x}{\partial \lambda_i}(\tau, p)\, c_i = 0.$$

Désignons

$$\begin{pmatrix}\bar{\xi}(t)\\ \bar{\eta}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial \lambda_i}(t, p_0)\, c_i,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial \lambda_i}(t, p_0)\, c_i\end{pmatrix}.$$

Etant une combinaison linéaire des colonnes de la matrice fondamentale, ceci nous donne également une solution du système (5) et, d'après (6), on a $\bar{\xi}(t_0) = 0$, $\bar{\eta}(t_0) = c \neq 0$. En outre, $\bar{\xi}(\tau) = 0$.

Ainsi l'égalité (4) est équivalente à l'existence d'une solution non triviale du système (5) vérifiant $\bar{\xi}(t_0) = \bar{\xi}(\tau) = 0$.

B) L e m m e. *La paire* $\{\xi(\cdot), \eta(\cdot)\}$ *est une solution du système* (5) *si et seulement si* $\xi(\cdot)$ *est une solution de l'équation de Jacobi*

$$\frac{d}{dt}[\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\xi} + \hat{L}_{\dot{x}x}\xi] = [\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{\xi} + \hat{L}_{xx}\xi] \tag{7}$$

et

$$\eta(t) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\xi}(t) + \hat{L}_{\dot{x}x}\xi(t). \tag{8}$$

D é m o n s t r a t i o n. Par définition (voir 4.4.2), l'équation (7) est l'équation d'Euler pour le problème d'extrémum secondaire à lagrangien

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\{\xi^{\mathrm{T}}\hat{L}_{xx}\xi + 2\xi^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{\xi} + \dot{\xi}^{\mathrm{T}}\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\xi}\}. \tag{9}$$

L'hamiltonien correspondant $\mathfrak{H}$ s'obtient par transformation de Legendre relativement à $\dot{\xi}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \eta^{\mathrm{T}}\dot{\xi} - \mathfrak{L}, \\ \eta &= \mathfrak{L}_{\dot{\xi}} = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\xi} + \hat{L}_{\dot{x}x}\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

Pour obtenir la deuxième de ces égalités, notons que

$$\xi^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{\xi} = \sum_{j,\,k}\frac{\partial^2\hat{L}}{\partial x_j\,\partial\dot{x}_k}\,\xi_j\dot{\xi}_k,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\xi}_i}(\xi^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{\xi}) = \sum_j\frac{\partial^2\hat{L}}{\partial x_j\,\partial\dot{x}_i}\,\xi_j = \sum_j\frac{\partial^2\hat{L}}{\partial\dot{x}_i\,\partial x_j}\,\xi_j = (\hat{L}_{\dot{x}x}\xi)_i.$$

D'une manière analogue

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\xi}_i}(\dot{\xi}^{\mathrm{T}}\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\xi}) = \frac{\partial}{\partial\dot{\xi}_i}\Big(\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2\hat{L}}{\partial\dot{x}_j\,\partial\dot{x}_k}\,\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k\Big) =$$

$$= \sum_k\frac{\partial^2\hat{L}}{\partial\dot{x}_i\,\partial\dot{x}_k}\,\dot{\xi}_k + \sum_j\frac{\partial^2\hat{L}}{\partial\dot{x}_j\,\partial\dot{x}_i}\,\dot{\xi}_j = (2\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\xi})_i.$$

Ayant exclu $\dot{\xi}$ de (10), on obtient

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\{\eta^{\mathrm{T}}\hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}\eta - 2\xi^{\mathrm{T}}\hat{L}_{x\dot{x}}\hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}\eta + \xi^{\mathrm{T}}[\hat{L}_{x\dot{x}}\hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{L}_{\dot{x}x} - \hat{L}_{xx}]\,\xi\}. \tag{11}$$

En se servant maintenant des formules (11), (12) et (8) de 4.4.3, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_x(t, x, p) &= -L_x(t, x, \Xi(t, x, p)), \\ \mathscr{H}_p(t, x, p) &= \Xi(t, x, p), \\ p &\equiv L_{\dot{x}}(t, x, \Xi(t, x, p)). \end{aligned}$$

Prenant la dérivée relativement à x et p, on tire

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}}_{xx} &= -\hat{L}_{xx} - \hat{L}_{x\dot{x}}\hat{\Xi}_x = -\hat{L}_{xx} - \hat{L}_{x\dot{x}}\hat{\mathscr{H}}_{px}, \\ \hat{\mathscr{H}}_{xp} &= -\hat{L}_{x\dot{x}}\hat{\Xi}_p = -\hat{L}_{x\dot{x}}\hat{\mathscr{H}}_{pp}, \\ E &= \frac{\partial p}{\partial x} = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{\Xi}_p = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{\mathscr{H}}_{pp}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial x} = \hat{L}_{\dot{x}x} + \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{\Xi}_x = \hat{L}_{\dot{x}x} + \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{\mathscr{H}}_{px}. \end{aligned}$$

D'où

$$\hat{\mathscr{H}}_{pp} = \hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}, \qquad \hat{\mathscr{H}}_{xp} = -\hat{L}_{x\dot{x}}\hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}},$$
$$\hat{\mathscr{H}}_{px} = -\hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{L}_{\dot{x}x}, \quad \hat{\mathscr{H}}_{xx} = -\hat{L}_{xx} + \hat{L}_{x\dot{x}}\hat{L}^{-1}_{\dot{x}\dot{x}}\hat{L}_{\dot{x}x}. \tag{12}$$

Par conséquent, (11) peut se récrire sous la forme

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\{\eta^{\mathrm{T}}\hat{\mathscr{H}}_{pp}\eta + 2\xi^{\mathrm{T}}\hat{\mathscr{H}}_{xp}\eta + \xi^{\mathrm{T}}\hat{\mathscr{H}}_{xx}\xi\}.$$

D'après la proposition 3 de 4.4.3, la paire $\{\xi(\cdot), \eta(\cdot)\}$ est une solution du système canonique

$$\dot{\xi} = \mathfrak{H}_\eta, \quad \dot{\eta} = -\mathfrak{H}_\xi, \tag{13}$$

si et seulement si $\xi(\cdot)$ est une solution de (7) et l'on a la deuxième des relations (10), qui coïncide avec (8). Il ne reste qu'à remarquer que le système (13) est identique à (5). ■

C) C o n c l u s i o n d e l a d é m o n s t r a t i o n. Dans la première partie de la démonstration, nous avons montré que (4) est équivalente à l'existence d'une solution non triviale $\{\xi(\cdot), \eta(\cdot)\}$

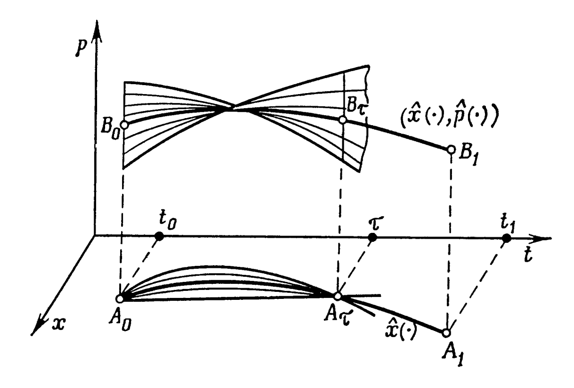


Fig. 39

du système (5) vérifiant $\xi(t_0) = \xi(\tau) = 0$. D'après le lemme, $\xi(\cdot)$ est une solution de l'équation de Jacobi et l'on a (8), d'où $\eta(\tau) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{\xi}(\tau)$. L'égalité $\eta(\tau) = 0$ est en contradiction (d'après le théorème d'unicité) avec le fait que la solution est non triviale, donc $\eta(\tau) \neq 0$. En nous rappelant la définition donnée dans 4.4.2, nous voyons que (4) est équivalente au fait que les points τ et t_0 sont conjugués. ■

L'assertion démontrée permet de donner l'interprétation géométrique suivante de la notion de point conjugué. Supposons à nouveau

que $(\hat{x}(\cdot), \hat{p}(\cdot))$ est l'extrémale canonique correspondant à l'extrémale $\hat{x}(\cdot)$ considérée. Pour un δ suffisamment petit, les extrémales canoniques définies par les conditions (3) forment une bande le long du graphique B_0B_1 (fig. 39). Pour $t = t_0$ le bord de cette bande est « vertical » et se projette sur le point $A_0 = (t_0, x_0)$. La condition (4), équivalente, comme nous l'avons vu, à l'égalité $\frac{\partial x}{\partial \lambda} c = 0$, signifie que pour $t = \tau$ la bande au point $B_\tau = (\tau, \hat{x}(\tau), \hat{p}(\tau))$ est tangente à une certaine direction « verticale » (i.e. à une direction parallèle aux plans $t = \text{Cte}$ et $x = \text{Cte}$).

Si nous projetons la bande dans l'espace (t, x), nous obtenons une famille d'extrémales issues du point A_0 (fig. 39). Auprès du point $A_\tau = (\tau, \hat{x}(\tau))$ l'application $(t, \lambda) \to (t, x(t, \lambda))$ cesse d'être bijective (« les extrémales infiniment proches de $\hat{x}(\cdot)$ et ayant la même origine se coupent au point A_τ »). Le point A_τ est également appelé point conjugué à A_0.

Exercice. Sur la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ les arcs des grands cercles sont les extrémales de la fonctionnelle de longueur. Ayant choisi un grand cercle passant par le point $A_0 \in S^2$, trouver un point sur ce cercle conjugué à A_0.

Proposition 2. *Si l'on a la condition de Legendre forte* (1) *et la condition de Jacobi forte (le semi-intervalle* $(t_0, t_1]$ *ne contient pas de points conjugués à* t_0) *sur l'extrémale* $\hat{x}(\cdot)\colon [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$, *alors cette extrémale peut être inclue dans un champ d'extrémales qui recouvre un certain voisinage* G *de son graphique* $\{(t, \hat{x}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$.

Démonstration. A) Démontrons d'abord que pour un $\delta > 0$ suffisamment petit, aucun des points de l'intervalle fermé $[t_0, t_1]$ ne sera conjugué à aucun point $t_0' \in (t_0 - \delta, t_0)$. Dans le cas contraire, il existe des $t_0^{(n)} \to t_0$, $t_1^{(n)} \in [t_0, t_1]$ et des solutions $\xi^{(n)}(\cdot)$ de l'équation de Jacobi (7) tels que

$$\xi^{(n)}(t_0^{(n)}) = \xi^{(n)}(t_1^{(n)}) = 0,$$

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1^{(n)})\, \dot{\xi}^{(n)}(t_1^{(n)}) \neq 0.$$

L'équation étant homogène, on peut poser $|\dot{\xi}^{(n)}(t_1^{(n)})| = 1$. En passant s'il le faut à une sous-suite, nous pouvons supposer que $t_1^{(n)} \to t_1' \in [t_0, t_1]$

$$\dot{\xi}^{(n)}(t_1^{(n)}) \to \eta, \qquad |\eta| = 1.$$

Lorsqu'on a la condition (1), l'équation de Jacobi se réduit au système linéaire (5) dont les coefficients sont continus sur l'intervalle

fermé $\Delta \supset [t_0, t_1]$ et le problème de Cauchy à données initiales

$$\xi(t_1') = 0,$$

$$\eta(t_1') = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1')\dot{\xi}(t_1') + \hat{L}_{\dot{x}x}(t_1')\xi(t_1') = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1')\eta$$

possède la solution $(\xi(t), \eta(t))$ définie sur Δ (voir 2.5.4). D'après le théorème sur la dépendance continue de la solution relativement aux données initiales (voir 2.5.5), on a $\xi^{(n)}(t) \to \xi(t)$ et

$$\eta^{(n)}(t) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\xi}^{(n)}(t) + \hat{L}_{\dot{x}x}(t)\xi^{(n)}(t) \to \eta(t)$$

uniformément sur Δ. Mais on a alors aussi $\dot{\xi}^{(n)}(t) \to \dot{\xi}(t)$ uniformément sur Δ.

Ensuite, nous avons $\xi(t_0) = \lim_n \xi(t_0^{(n)}) = \lim_n \xi^{(n)}(t_0^{(n)}) = 0$. Alors les points $t_0 = \lim_n t_0^{(n)}$ et $t_1' = \lim_n t_1^{(n)}$ ne peuvent coïncider, puisque dans le cas contraire $\eta = \dot{\xi}(t_1') = 0$, car

$$|\dot{\xi}(t_1')| = \left| \frac{1}{t_1^{(n)} - t_0^{(n)}} \int_{t_0^{(n)}}^{t_1^{(n)}} [\dot{\xi}^{(n)}(t) - \dot{\xi}(t_1')]\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \| \dot{\xi}^{(n)} - \dot{\xi} \|_C + \max_{[t_0, t_1']} |\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(t_1')| \to 0.$$

Puisque $\xi(t_0) = \xi(t_1') = 0$ et $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1')\dot{\xi}(t_1') \neq 0$, le point $t_1' \in (t_0, t_1]$ est conjugué à t_0, contrairement à l'hypothèse.

B) Choisissons $t_0' < t_0$ de manière qu'il n'y ait pas de point conjugué à t_0' sur $[t_0, t_1]$. Construisons la famille d'extrémales canoniques $(x(\cdot, \lambda), p(\cdot, \lambda))$ en remplaçant dans (3) t_0 par t_0'. D'après la proposition 1, on a $\det \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\tau, p_0) \neq 0$, $\forall \tau \in [t_0, t_1]$.

Définissons l'application $\varphi: C_\delta \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ du cylindre $C_\delta = [t_0 - \delta, t_1 + \delta] \times B(p_0, \delta)$ par l'égalité $\varphi(t, \lambda) = (t, x(t, \lambda))$. Aux points (τ, p_0), $\tau \in [t_0, t_1]$, son jacobien vérifie

$$\det \varphi' = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_t & x_\lambda \end{pmatrix} = \det x_\lambda \neq 0,$$

et nous pouvons choisir δ de manière à conserver cette inégalité dans tous les points de C_δ. En outre, d'après le théorème sur les applications inverses (voir 2.3.4), il existe pour chaque point (τ, p_0) un voisinage U_τ appliqué bijectivement par φ sur $W_\tau = \varphi(U_\tau)$ et $\varphi^{-1} \in C^1(W_\tau)$.

Montrons que pour δ suffisamment petit l'application φ est bijective sur C_δ tout entier. Si c'était faux, il existerait deux suites (t_n', λ_n'),

(t''_n, λ''_n) telles que

$$\lambda'_n \to p_0,\ \lambda''_n \to p_0,\ (t'_n, x(t'_n, \lambda'_n)) = \varphi(t'_n, \lambda'_n) = \\ = \varphi(t''_n, \lambda''_n) = (t''_n, x(t''_n, \lambda''_n)).$$

D'où l'on tire $t'_n = t''_n$.

En passant éventuellement à des sous-suites, nous pouvons supposer que $t'_n = t''_n \to \tau$. Pour des valeurs de n suffisamment grandes, les points (t'_n, λ'_n) et (t''_n, λ''_n) sont contenus dans U_τ et l'égalité $\varphi(t'_n, \lambda'_n) = \varphi(t''_n, \lambda''_n)$ contredit la définition de U_τ.

Montrons maintenant que $G = \varphi(\operatorname{int} C_\delta)$ est un voisinage du graphique $\hat{\Gamma} = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$. Puisque $\hat{\Gamma} = \varphi(\{(t, p_0) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}) \subset G$, nous devons démontrer que G est ouvert. Mais si $(\bar{t}, \bar{x}) = \varphi(\bar{t}, \bar{\lambda}) \in G$, $(\bar{t}, \bar{\lambda}) \in C_\delta$, on a $\det \varphi'(\bar{t}, \bar{\lambda}) \neq 0$ et, d'après le même théorème de 2.3.4, un voisinage du point $(\bar{t}, \bar{\lambda})$ est appliqué sur le voisinage du point $(\bar{t}, \bar{x})$. Par conséquent, $(\bar{t}, \bar{x})$ est un point intérieur de G et G est ouvert.

Ainsi, la famille d'extrémales $\{x(\cdot, \lambda)\}$ recouvre bijectivement G. Le fait que cette famille constitue un champ a été démontré lors de l'étude du premier exemple d'un ensemble de Legendre dans 4.4.3. ■

Le champ construit consiste d'extrémales passant par un même point (t'_0, x_0); on l'appelle *champ central.*

Revenons maintenant aux conditions suffisantes de minimum. Montrons tout d'abord comment on peut déduire du théorème général de 4.4.4 les conditions suffisantes de minimum faible. Le théorème correspondant a été déjà énoncé dans 4.4.2.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e d e J a c o b i (théorème 2 de 4.4.2). Si l'on a les conditions fortes de Legendre et de Jacobi sur une extrémale admissible $\hat{x}(\cdot)$ du problème (1), (2) de 4.4.4, alors, d'après la proposition 2, cette extrémale peut être inclue dans un champ d'extrémales qui recouvre un certain voisinage G du graphique de $\hat{x}(\cdot)$. D'après le théorème 1 (ou 1′) de 4.4.4, l'inégalité

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt > \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$$

est vérifiée pour toutes les $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ qui satisfont aux conditions aux limites $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$ et sont telles que le graphique de $x(\cdot)$ est contenu dans G, le graphique élargi étant contenu dans V. Si $\| x(\cdot) - \hat{x}(\cdot) \|_{C^1}$ est suffisamment petit, les deux dernières conditions sont satisfaites. Par conséquent $\hat{x}(\cdot)$ donne au problème (1), (2) de 4.4.4 un minimum C^1-local, i.e. faible. ■

Passons aux conditions suffisantes de minimum fort. Dans ce cas, les fonctions $x(\cdot)$ et $\hat{x}(\cdot)$ elles-mêmes peuvent toujours être supposées si proches que le graphique de $x(\cdot)$ est contenu dans G, mais $\dot{x}(\cdot)$ peut être arbitraire et le graphique élargi de $x(\cdot)$ n'est pas nécessairement contenu dans $\hat{V}$. En dehors de $\hat{V}$, la condition (1) ne garantit pas la convexité de la fonction $\xi \mapsto L(t, x, \xi)$ et l'inégalité de Young, utilisée dans la démonstration du théorème 1 de 4.4.4 (voir la formule (7) qui s'y rapporte) n'est pas nécessairement satisfaite. Par conséquent, il faudra introduire une hypothèse supplémentaire (la condition de Weierstrass) sur la non-négativité de la fonction

$$\mathscr{E}(t, x, u, \xi) = L(t, x, \xi) - L(t, x, u) - L_{\dot{x}}(t, x, u)(\xi - u)$$

dans l'énoncé du théorème.

Théorème de Weierstrass sur les conditions suffisantes d'extrémum fort. *Supposons que la fonction L est de classe C^2 dans l'ensemble ouvert $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, la fonction $\hat{x}(\cdot)$ étant contenue dans $C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$* [1]) *et son graphique élargi*

$$\bar{\Gamma} = \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

dans V.

Si:

1) *$\hat{x}(\cdot)$ vérifie l'équation d'Euler*

$$\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) = \hat{L}_{x}(t);$$

2) *$\hat{x}(\cdot)$ vérifie les conditions aux limites*

$$\hat{x}(t_0) = x_0, \quad \hat{x}(t_1) = x_1;$$

3) *on a la condition de Legendre forte* (1) *le long de $\hat{x}(\cdot)$;*

4) *on a la condition de Jacobi forte le long de $\hat{x}(\cdot)$: il n'y a pas de points conjugués à t_0 dans le semi-intervalle $(t_0, t_1]$;*

5) *il existe un voisinage $\bar{V} \supset \bar{\Gamma}$ pour lequel on a la condition de Weierstrass*

$$\mathscr{E}(t, x, u, \xi) \geqslant 0$$

---

[1]) Rappelons que si $\hat{x}(\cdot)$ donne un minimum fort, la condition (1) étant remplie, cette fonction possède une dérivée continue, quoique maintenant le problème est envisagé dans $KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ (voir la remarque après l'énoncé du théorème 1 dans 4.4.4).

pour tous les (t, x, u, ξ) *tels que* $(t, x, u) \in \overline{V}$, $(t, x, \xi) \in V$, *alors* $\hat{x}(\cdot)$ *donne un minimum fort au problème le plus simple* (1), (2) *de* 4.4.4 (*et ce minimum est strict si l'on a* $\mathscr{E} > 0$ *dans la condition de Weierstrass pour* $\xi \neq u$).

D é m o n s t r a t i o n. Définissons le voisinage $\hat{V} \supset \overline{\Gamma}$ comme au début du présent sous-paragraphe; construisons le voisinage $G \supset \hat{\Gamma} = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ et le champ d'extrémales qui recouvre G; sans perte de généralité, $\overline{V} = \hat{V}$. Désignons par $u(t, x)$ l'inclinaison du champ au point $(t, x) = (t, x(t, \lambda)) \in G$:

$$u(t, x) = \dot{x}(t, \lambda) \text{ pour } x = x(t, \lambda),$$

et soit

$$p(t, x) = L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x)).$$

D'après la proposition 2 et l'exemple 1 de 4.4.3, la fonction p: $G \to \mathbf{R}^{n*}$ possède un graphique de Legendre

$$\Sigma = \{(t, x, p(t, x)) \mid (t, x) \in G\}$$

contenu dans $\hat{D}$.

Maintenant, pour un $x(\cdot)$ admissible dont le graphique est contenu dans G, on a

$$\mathscr{I}(x(\cdot)) - \int_{\gamma} \omega = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \{p(t, x(t))\, \dot{x}(t) - \mathscr{H}(t, x(t), p(t, x(t)))\}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L_{\dot{x}}(t, x(t), u(t, x(t))\, \dot{x}(t) +$$

$$+ L_{\dot{x}}(t, x(t), u(t, x(t))\, u(t, x(t)) - L(t, x(t), u(t, x(t)))\}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t))\, dt.$$

Puisque l'extrémale $\hat{x}(\cdot)$ est contenue dans un champ, on a $\dot{\hat{x}}(t) = u(t, \hat{x}(t))$ et donc

$$\mathscr{I}(\hat{x}(\cdot)) - \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{E}(t, \hat{x}(t), u(t, \hat{x}(t)), \dot{\hat{x}}(t))\, dt = 0. \quad (14)$$

Par conséquent,

$$\mathcal{J}(x(\cdot))-\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t))\,dt \tag{15}$$

$\left(\text{comme dans le théorème 1 de 4.4.4, on a } \int_{\gamma}\omega=\int_{\hat{\gamma}}\omega\right)$.

Par construction (voir la démonstration de la proposition 2 dans 4.4.5) les points $(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)) = (t, x, u(t, x)) \in \hat{V} = \overline{V}$ pour $(t, x) = (t, x(t, \lambda)) \in G$, alors que $(t, x(t), \dot{x}(t)) \in V$ puisque $x(\cdot)$ est une fonction admissible. Ainsi on peut appliquer la condition de Weierstrass et l'on tire de (15) $\mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) \geqslant 0$. De la sorte, si $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ est admissible, vérifie les conditions aux limites et $\| x(\cdot) - \hat{x}(\cdot) \|_C$ est si petit que le graphique de $x(\cdot)$ est contenu dans G, alors $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$. Par conséquent, $\hat{x}(\cdot)$ donne un minimum fort pour le problème (1)-(4) de 4.4.4.

L'égalité $\mathcal{J}(x(\cdot)) = \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ est possible dans ce cas seulement si $\mathscr{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)) = 0$ pour tous les t, sauf éventuellement les points de discontinuité de $\dot{x}(\cdot)$. Si $u \neq \xi \Rightarrow \mathscr{E} > 0$, alors $\dot{x}(t) = u(t, x(t))$, et en particulier $\dot{x}(\cdot)$ s'avère continue. En outre, en vertu des relations (8) et (12) de 4.4.3, on a

$$p(t, x) = L_{\dot{x}}(t, x, u(t, x)) \Leftrightarrow u(t, x) =$$
$$= \Xi(t, x, p(t, x)) \Leftrightarrow u(t, x) = \mathscr{H}_p(t, x, p(t, x)) \Rightarrow \dot{x}(t) =$$
$$= \mathscr{H}_p(t, x(t), p(t, x(t))).$$

La formule obtenue coïncide avec (12) de 4.4.4 et en raisonnant comme dans ce sous-paragraphe, nous voyons que $x(t) \equiv \hat{x}(t)$. ■

R e m a r q u e. La relation (15) permet de montrer que la fonctionnelle quadratique

$$\mathcal{Q}(\xi(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}(t, \xi, \dot{\xi})\,dt$$

à lagrangien (9) peut se mettre sous forme de carré complet. En calculant la fonction de Weierstrass (et en posant $\hat{\xi}(\cdot) \equiv 0$), nous obtenons

$$\mathcal{Q}(\xi(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}|P(t)\dot{\xi}+P(t)^{-1}[\hat{L}_{x\dot{x}}(t)-\Pi(t)\,\Xi^{-1}(t)]\,\xi|^2\,dt, \tag{16}$$

où $P(t)^2 = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$, tandis que $\Xi(\cdot)$ et $\Pi(\cdot)$ sont les solutions du système matriciel

$$\dot{\Xi}(t) = \hat{\mathscr{H}}_{px}(t)\,\Xi + \hat{\mathscr{H}}_{pp}(t)\,\Pi, \qquad \dot{\Pi}(t) = -\hat{\mathscr{H}}_{xx}(t)\,\Xi - \hat{\mathscr{H}}_{xp}(t)\,\Pi \tag{17}$$

à conditions initiales

$$\Xi(t_0') = 0, \quad \Pi(t_0') = E. \tag{18}$$

4.4.6. Théorème de Nœther. Dans 1.4.1. nous avons déjà rencontré des situations où l'équation d'Euler possède une intégrale première. Par exemple, si le lagrangien ne dépend pas explicitement de t, i.e. est de la forme $L(x, \dot{x})$, alors $H = L_{\dot{x}}\dot{x} - L = \text{Cte}$ (intégrale d'énergie). Dans le présent sous-paragraphe, nous ferons connaissance avec une méthode générale pour construire les intégrales premières des systèmes d'équations différentielles qui sont des équations d'Euler d'un certain problème variationnel. Cette méthode se base sur un théorème à la fois simple et profond, démontré par la remarquable mathématicienne de notre siècle, Emmi Nœther. Le principe universel exprimé par le théorème de Nœther est souvent énoncé de la manière suivante: « Toute symétrie dans l'univers détermine une loi de conservation », ou encore : « L'invariance d'un système relativement à un groupe de transformations a pour conséquence l'existence d'une intégrale première du système ». Ainsi, par exemple, l'invariance d'un système relativement à une translation dans le temps, qui s'exprime par le fait que le temps t n'apparaît pas dans le lagrangien, nous donne l'intégrale d'énergie.

Passons aux définitions précises. Supposons donnée une famille d'applications

$$S_\alpha\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \quad |\alpha| < \varepsilon_0,$$
$$S_\alpha(t, x) = (\mathfrak{T}(t, x, \alpha), \ \mathfrak{X}(t, x, \alpha)).$$

Relativement à celle-ci nous supposerons que:

1) les fonctions $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{X}$ sont de classe C^2;

2) pour $\alpha \to 0$,

$$\mathfrak{T}(t, x, \alpha) = t + \alpha T(t, x) + o(\alpha), \qquad \mathfrak{X}(t, x, \alpha) = x + \alpha X(t, x) + o(\alpha). \tag{1}$$

Le champ de vecteurs $(T(t, x), X(t, x))$ sera appelé *champ de vecteurs tangents de la famille* $\{S_\alpha\}$. Sous l'action des transformations S_α, le point $P = (t, x)$ décrit une courbe dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et $\{T(t, x), X(t, x)\}$ est le vecteur tangent à cette courbe au point P (i.e. pour $\alpha = 0$; fig. 40).

L e m m e. *Soit*

$$x(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n).$$

Il existe alors des $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $x(\cdot, \cdot) \in C^2((t_0 - \delta, t_1 + \delta) \times \times (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbf{R}^n)$, $t_k(\cdot) \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon))$, $k=0, 1$, *tels que pour* $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

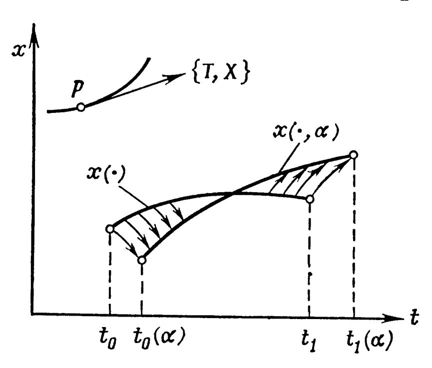


Fig. 40

l'image du graphique de la fonction $x(\cdot)$ *est le graphique de la fonction* $x(\cdot, \alpha)\colon [t_0(\alpha), t_1(\alpha)] \to \mathbf{R}^n$. *On a alors*

$$x(t, 0) \equiv x(t), \quad x_\alpha(t, 0) \equiv X(t, x(t)) - \dot{x}(t)\, T(t, x(t)), \tag{2}$$

$$t_i'(0) = T(t_i, x(t_i)). \tag{3}$$

D é m o n s t r a t i o n. L'image du graphique de $x(\cdot)$ par l'application S_α se donne par les formules paramétriques

$$\begin{aligned} t &= \tau(s, \alpha) = \mathfrak{T}(s, x(s), \alpha), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_1, \\ x &= \chi(s, \alpha) = \mathfrak{X}(s, x(s), \alpha), \quad |\alpha| \leqslant \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Les deux fonctions τ et χ, étant les composées de fonctions de classe C^2 sont elles-mêmes des fonctions de cette classe.

Conformément à (1), on a

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t}(t, x, 0) = 1, \quad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(t, x, 0) = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial \tau}{\partial s}(s, 0) = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\dot{x}(s) \equiv 1.$$

En nous servant du fait que le segment $t_0 \leqslant s \leqslant t_1$ est compact et la fonction $\partial\tau/\partial s$ continue, trouvons des nombres $\delta_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ tels que pour $|\alpha| < \varepsilon_1$ et $t_0 - \delta_1 < s < t_1 + \delta_1$ l'inégalité $\frac{\partial \tau}{\partial s}(s, \alpha) > > 1/2$ est vérifiée. Alors pour $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixe, la fonction $s \mapsto \tau(s, \alpha)$

est croissante monotone, appliquant $[t_0, t_1]$ sur

$$[t_0(\alpha), t_1(\alpha)] = [\tau(t_0, \alpha), \tau(t_1, \alpha)] = \\ = [\mathfrak{T}(t_0, x(t_0), \alpha), \mathfrak{T}(t_1, x(t_1), \alpha)]. \qquad (5)$$

Il découle de ces deux égalités que $t_i(\alpha)$, $i = 0, 1$, sont des fonctions de classe C^2, et (1) implique (3).

En vertu du fait que l'application A définie par l'égalité $A(s, \alpha) = (\tau(s, \alpha), \alpha)$ est monotone, elle applique bijectivement le rectangle

$$\Pi = (t_0 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$$

sur son image $W = A(\Pi)$. Puisque le jacobien de A vérifie

$$\det\begin{Bmatrix} \partial\tau/\partial s & \partial\tau/\partial\alpha \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial\tau}{\partial s} > \frac{1}{2},$$

on peut établir, en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 2 de 4.4.5 (voir la partie B), que W est ouvert, tandis que l'application inverse $A^{-1}: W \to \Pi$, qui est évidemment de la forme $(t, \alpha) \mapsto (\sigma(t, \alpha), \alpha)$, est continûment différentiable et l'on a $\sigma \in C^1(W)$.

On tire de (4) et (1) que $\tau(s, 0) = \mathfrak{T}(s, x(s), 0) \equiv s$. Par conséquent, A laisse sur place les points $(s, 0)$, et il en va de même pour A^{-1}, donc $\sigma(t, 0) \equiv t$.

En outre, étant une fonction implicite, $\sigma(\cdot, \cdot)$ s'obtient de l'équation $F(\sigma, t, \alpha) = \tau(\sigma, \alpha) - t = 0$, d'où l'on tire, premièrement, conformément à (4) et (1), que

$$\sigma_\alpha(t, 0) = -F_\sigma^{-1}F_\alpha = -(\tau_s(\sigma(t, 0), 0)^{-1}\tau_\alpha(\sigma(t, 0), 0) = \\ = -[\mathfrak{T}_t(t, x(t), 0) + \mathfrak{T}_x(t, x(t), 0)\dot{x}(t)]^{-1}\mathfrak{T}_\alpha(t, x(t), 0) = \\ = -T(t, x(t)), \qquad (6)$$

et, deuxièmement, la fonction F étant de classe C^2, on obtient $\sigma \in C^2(W)$ en se servant de la remarque faite dans 2.3.4.

Par ailleurs, A applique l'intervalle fermé $\{(s, 0) \mid t_0 \leqslant s \leqslant t_1\}$ en lui-même et cet intervalle est contenu dans W. Par conséquent, W contient le rectangle $(t_0 - \delta, t_1 + \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ si $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont suffisamment petits, et la fonction

$$x(t, \alpha) = \mathfrak{X}(\sigma(t, \alpha), x(\sigma(t, \alpha)), \alpha) \qquad (7)$$

est également de classe C^2 sur ce rectangle. Choisissons alors ε pour que l'inégalité $|\alpha| < \varepsilon$ implique $|t_i(\alpha) - t_i| < \delta$. Alors, en nous rappelant la définition des fonctions $\sigma(\cdot, \cdot)$ et $t_i(\cdot)$, nous voyons d'après (4) et (7) que l'image du graphique de $x(\cdot)$ par l'application S_α est le graphique de la fonction $x(\cdot, \alpha): [t_0(\alpha), t_1(\alpha)] \to \mathbf{R}^n$.

Enfin, en prenant la dérivée de (7) et en se servant de (1), (6) et de l'égalité $\sigma(t, 0) = t$, on tire

$$x_\alpha(t, 0) = [\mathfrak{X}_t(t, x(t), 0) + \mathfrak{X}_x(t, x(t), 0)\dot{x}(t)]\ \sigma_\alpha(t, 0) +$$
$$+ \mathfrak{X}_\alpha(t, x(t), 0) = \dot{x}(t)[-T(t, x(t))] + X(t, x(t)),$$

i.e. (2) est vérifiée. ■

D é f i n i t i o n. Supposons que la fonction $L: V \to \mathbf{R}$ est au moins continue dans l'ouvert $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. La fonctionnelle intégrale

$$\mathcal{J}(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{8}$$

est dite *invariante relativement à la famille d'applications* $\{S_\alpha\}$, si pour toute fonction $x(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ vérifiant $\{(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \subset V$, on a

$$\mathcal{J}(x(\cdot, \alpha), t_0(\alpha), t_1(\alpha)) \equiv \mathcal{J}(x(\cdot), t_0, t_1) \tag{9}$$

pour tous les α suffisamment petits.

(Ici $x(\cdot, \alpha)$, $t_0(\alpha)$, $t_1(\alpha)$ sont construits en se servant de $x(\cdot)$ comme dans le lemme, et l'intervalle pour lequel on a (9) peut dépendre de $x(\cdot)$.)

T h é o r è m e d e N œ t h e r. *Supposons que les fonctions* L, L_x, $L_{\dot{x}}$ *sont continues dans l'ouvert* $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *et la fonctionnelle intégrale* (8) *est invariante relativement à la famille de transformations de classe* C^2 *vérifiant la condition* (1). *Alors la fonction*

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\, X(t, x) -$$
$$- [L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\, \dot{x} - L(t, x, \dot{x})]\, T(t, x) \tag{10}$$

est continue sur chaque solution $x(\cdot)$ *de l'équation d'Euler*

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{11}$$

telle que $x(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, $\{(t, x(t), \dot{x}(t)) | t_0 \leqslant t \leqslant t_1\} \subset V$ *et* $L_{\dot{x}}(\cdot, x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{n*})$.

D é m o n s t r a t i o n. A) Supposons que $x(\cdot): [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ est la solution de l'équation (11) dont il s'agit dans l'énoncé du théorème. En nous servant du lemme, construisons la famille $(x(\cdot, \alpha)$, $t_0(\alpha)$, $t_1(\alpha))$, où $x(\cdot, \cdot)$ est une fonction de classe C^2 sur $(t_0 - \delta, t_1 + \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fixons l'intervalle fermé $\Delta = [\beta, \gamma]$ de manière

à avoir les inégalités $t_0 - \delta < \beta < t_0 < t_1 < \gamma < t_1 + \delta$ et prenons, s'il le faut, ε si petit que $|\alpha| < \varepsilon$ implique les inégalités $\beta < t_0(\alpha) < t_1(\alpha) < \gamma$.

Montrons que l'application $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \to C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^2$ pour laquelle $\alpha \mapsto \{x(\cdot, \alpha), t_0(\alpha), t_1(\alpha)\}$ est différentiable selon Fréchet au point $\alpha = 0$. Il est clair qu'il suffit de le vérifier pour la première composante $\alpha \mapsto x(\cdot, \alpha)$. Ayant fixé $\bar\varepsilon \in (0, \varepsilon)$, appliquons le théorème de la moyenne (aux applications différentiables $\alpha \mapsto x(t, \alpha)$, t étant fixe), nous obtenons pour $|\alpha| \leqslant \bar\varepsilon$

$$\sup_{t\in\Delta} \left| \frac{x(t, \alpha) - x(t, 0) - \alpha x_\alpha(t, 0)}{\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\Delta} \sup_{c\in[0, \alpha]} |x_\alpha(t, c) - x_\alpha(t, 0)| \to 0,$$

$$\sup_{t\in\Delta} \left| \frac{x_t(t, \alpha) - x_t(t, 0) - \alpha x_{t\alpha}(t, 0)}{\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\Delta} \sup_{c\in[0, \alpha]} |x_{t\alpha}(t, c) - x_{t\alpha}(t, 0)| \to 0,$$

pour $\alpha \to 0$ puisque x_α et $x_{t\alpha}$ sont uniformément continues sur le compact $\Delta \times [-\bar\varepsilon, \bar\varepsilon]$. Par conséquent, dans l'espace $C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$ on a

$$x(\cdot, \alpha) = x(\cdot, 0) + \alpha x_\alpha(\cdot, 0) + o(|\alpha|), \tag{12}$$

ce qui signifie que cette fonction est différentiable selon Fréchet. En outre, il découle de (12) que

$$\Phi'(0) = \{x_\alpha(\cdot, 0), t_0'(0), t_1'(0)\}. \tag{13}$$

B) Posons $\mathcal{J}(\alpha) = (\mathcal{J} \circ \Phi)(\alpha) = \mathcal{J}(x(\cdot, \alpha), t_0(\alpha), t_1(\alpha))$. Conformément à (9) on a $\mathcal{J}(\alpha) \equiv \mathcal{J}(0)$, donc

$$\mathcal{J}'(0) = \mathcal{J}'(x(\cdot), t_0, t_1)[\Phi'(0)] = 0.$$

En nous servant de la formule (9) de 2.4.2 pour la dérivée d'une application intégrale, nous tirons de (13)

$$0 = \mathcal{J}'(x(\cdot), t_0, t_1)[\Phi'(0)] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{L_x(t, x(t), \dot x(t))\, x_\alpha(t, 0) +$$

$$+ L_{\dot x}(t, x(t), \dot x(t))\, x_{\alpha t}(t, 0)\}\, dt +$$

$$+ L(t_i, x(t_i), \dot x(t_i))\, t_i'(0) \Big|_{i=0}^{i=1}. \tag{14}$$

Par hypothèse, $L_{\dot x}(t, x(t), \dot x(t))$ est continûment différentiable. En prenant l'intégrale dans (14) par parties (comme dans 1.4.1)

et en tenant compte de (11), (2), (3) et (10), nous obtenons

$$0=[L_{\dot{x}}(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))\, x_\alpha(t_i, 0)+$$
$$+L(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))\, t_i'(0)]_{i=0}^{i=1}=$$
$$=[L_{\dot{x}}(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))\, X(t_i, x(t_i))+(L(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))-$$
$$-L_{\dot{x}}(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i))\, \dot{x}(t_i))\, T(t_i, x(t_i))]_{i=0}^{i=1}=$$
$$=\varphi(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))-\varphi(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)).$$

Ainsi

$$\varphi(t_1, x(t_1), \dot{x}_1(t_1))=\varphi(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)).$$

En répétant ces mêmes raisonnements pour un intervalle fermé quelconque $[t_0, t]\subset[t_0, t_1]$, nous obtenons l'égalité

$$\varphi(t, x(t), \dot{x}(t))\equiv\varphi(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))\equiv \text{const.} \blacksquare$$

Corollaire. *Si dans les conditions du théorème de Nœther on a les hypothèses* a) *et* b) *de la proposition* 2 *de* 4.4.3, *alors la fonction*

$$\psi(t, x, p)=pX(t, x)-\mathscr{H}(t, x, p)\, T(t, x) \qquad (15)$$

est constante sur chaque solution $(x(t), p(t))$ *du système de Hamilton* (1) *de* 4.4.3.

La démonstration est laissée au lecteur. On voit de la formule (15) que l'intégrale première fournie par le théorème de Nœther est la valeur de la forme différentielle de Poincaré-Cartan $\omega=p\,dx-\mathscr{H}\,dt$ sur le champ de vecteurs tangents à la famille $\{S_\alpha\}$.

En guise d'exemple, montrons comment on peut obtenir les intégrales d'énergie et d'impulsion (voir 1.4.1). Si L ne dépend pas de t, alors la fonctionnelle (8) est invariante relativement aux transformations $(t, x)\mapsto(t+\alpha, x)$ (vérifiez-le !). Ici $T=1$, $X=0$, donc $\varphi=L-L_{\dot{x}}\dot{x}=-\mathscr{H}$ est constante. Si L ne dépend d'aucune des composantes du vecteur x, mettons de x_k, alors la fonctionnelle (8) est invariante relativement aux transformations $(t, x)\mapsto(t, x+\alpha e_k)$ (vérifiez !). Ici $T=0$, $X=e_k$, on a donc $\varphi=L_{\dot{x}}\, e_k=L_{\dot{x}_k}$.

D'autres exemples d'application du théorème de Nœther seront donnés dans le sous-paragraphe suivant.

4.4.7. Principe variationnel et lois de conservation en mécanique. Considérons un système de n points matériels (« particules ») de masses $m_1, \ldots, m_n$, $r_i=(x_i, y_i, z_i)$ étant le rayon vecteur du

i-ième point. Pour simplifier les notations, posons

$$r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbf{R}^{3n},\quad \frac{\partial}{\partial r}=\left(\frac{\partial}{\partial r_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial r_n}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial z_i}\right).$$

Nous supposerons que l'interaction des particules entre elles et avec le milieu externe se décrit par l'énergie potentielle $U(t, r)$, de sorte que les équations horaires sont de la forme

$$m_i\ddot{r}_i = F_i = -\partial U/\partial r_i. \tag{1}$$

L'énergie cinétique du système se détermine par l'égalité

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{r}_i|\dot{r}_i). \tag{2}$$

Théorème (principe variationnel de Lagrange). *Les équations horaires d'un système mécanique sont les équations d'Euler du problème variationnel*

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, r, \dot{r})\,dt \to \text{extr}, \tag{3}$$

$$r(t_0)=r^0,\quad r(t_1)=r^1,\quad L=K-U.$$

Démonstration. On tire de (1) et (2)

$$m_i\ddot{r}_i=\frac{d}{dt}(m_i\dot{r}_i)=\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{r}_i}=\frac{d}{dt}L_{\dot{r}_i}=L_{r_i}=-\frac{\partial U}{\partial r_i}.\ ■$$

La signification de ce théorème dépasse de loin le cadre de la situation la plus simple à laquelle nous nous sommes limités. Les physiciens et les spécialistes en mécanique décrivent très souvent les propriétés du système en donnant explicitement son lagrangien L. Alors K, U et $L = K - U$ peuvent être exprimés non seulement en coordonnées cartésiennes mais aussi en d'autres coordonnées, le lagrangien peut également contenir des termes qui décrivent des forces magnétiques ou gyroscopiques (non potentielles), etc. Dès que le lagrangien est donné, les équations d'Euler du problème variationnel (3) déterminent la loi du mouvement du système considéré.

L'approche variationnelle est commode parce qu'elle permet en particulier d'obtenir des intégrales premières (les « lois de conservation ») en se servant du théorème de Nœther. Nous donnerons des illustrations de cette méthode sur les exemples des intégrales dites classiques: d'énergie, d'impulsion et de moment d'impulsion.

a) Système conservatif. U ne dépend pas de t. Groupe de transformations: $(t, r) \mapsto (t+\alpha, r)$. La fonction $r(\cdot)\colon [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^{3n}$ est alors appliquée dans la fonction $r_\alpha(\cdot)$:

$[t_0+\alpha, t_1+\alpha] \to \mathbf{R}^{3n}$, $r_\alpha(t) = r(t-\alpha)$. La fonctionnelle (3) est invariante

$$\int_{t_0+\alpha}^{t_1+\alpha} L(r_\alpha(t), \dot{r}_\alpha(t))\,dt = \int_{t_0+\alpha}^{t_1+\alpha} L(r(t-\alpha), \dot{r}(t-\alpha))\,dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} L(r(t), \dot{r}(t))\,dt.$$

Champ vectoriel tangent: $T=1$, $R=0$. Intégrale première:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} L_{\dot{r}_i} R_i - [\sum_{i=1}^{n} L_{\dot{r}_i} \dot{r}_i - L]\,T = -\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{r}_i|\dot{r}_i) + K - U = -K - U.$$

Par conséquent, dans un système conservatif l'énergie totale

$$\mathcal{H} = K + U$$

est une intégrale première (« loi de conservation de l'énergie »).

b) P a r t i c u l e l i b r e: U ne dépend pas du rayon vecteur r_k d'une des particules. Groupe de transformations:

$$(t, r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_n) \mapsto (t, r_1, \ldots, r_k + \alpha l, \ldots, r_n),$$

où $l \in \mathbf{R}^3$ est arbitraire. L'invariance de la fonctionnelle (3) est évidente. Champ de vecteurs tangents:

$$T = 0,\ R = (R_1, \ldots, R_k, \ldots, R_n) = (0, \ldots, l, \ldots, 0).$$

Intégrale première:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} L_{\dot{r}_i} R_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{r}_k}\,l = m_k(\dot{r}_k|l).$$

l étant arbitraire, $p_k = m_k\dot{r}_k$ doit être constante. Ainsi, si la k-ième particule n'interagit pas avec le reste du système (ne contribue pas à l'énergie potentielle), son impulsion $p_k = m_k\dot{r}_k$ est conservée.

c) A b s e n c e d e f o r c e s e x t e r n e s. Cela signifie que U dépend seulement des différences $r_i - r_j$ et L ne change pas si le système, comme corps rigide, est déplacé dans l'espace, i.e. si l'on effectue la transformation

$$(t, r_1, \ldots, r_n) \mapsto (t, r_1 + \alpha l, \ldots, r_n + \alpha l),$$

où l est un vecteur quelconque. Ici $T=0$, $R=(l, \ldots, l)$ et la quantité invariante est $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\Big| l\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i | l\right)$. l étant arbitraire, on a

$$P = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i = \text{const.}$$

Ainsi, si les forces sont toutes internes, on a la « loi de conservation de l'impulsion totale du système ».

d) Symétrie de rotation: U dépend seulement des distances entre les couples $|r_i - r_j|$. Le lagrangien ne varie pas si l'on effectue une transformation orthogonale $\mathcal{O}$, puisque

$$L(\mathcal{O}r_i, \mathcal{O}\dot{r}_i) = K - U =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathcal{O}\dot{r}_i | \mathcal{O}\dot{r}_i) - U(|\mathcal{O}r_i - \mathcal{O}r_j|) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{r}_i | \dot{r}_i) - U(|r_i - r_j|)$$

(toute transformation orthogonale laisse invariants les produits scalaires et les longueurs). Fixons le vecteur ω et considérons le groupe de transformations qui correspond à une rotation uniforme du système autour de l'origine à vitesse angulaire ω. Champ de vecteurs tangents: $T = 0$, $R = (\omega \times r_1, \ldots, \omega \times r_n)$. Intégrale première:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} R_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{r}_i | \omega \times r_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i \times \dot{r}_i | \omega).$$

ω étant arbitraire, le vecteur moment d'impulsion

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \times \dot{r}_i$$

est invariant, on a donc la « loi de conservation du moment d'impulsion ».

PROBLÈMES

Nous avons réuni ici 100 problèmes. Ils ne sont pas disposés en ordre croissant de difficulté, mais en groupes thématiques. Au début nous considérons des problèmes à contenu géométrique (nos 1 à 14, 22, 23) inspirés par les problèmes d'Euclide, Kepler, Steiner, Apollonios.

Il y a toute une littérature consacrée aux relations extrémales en géométrie. Le lecteur pourra trouver beaucoup de problèmes intéressants dans le livre de Chkliarski, Tchentsov, Iaglom *Inégalités géométriques et problèmes de maximum et minimum*, Moscou, « Naouka », 1970. Pour la majorité d'entre eux la solution standard (pour une formalisation appropriée) n'est pas plus difficile que la solution « géométrique ».

Les problèmes nos 15 à 21 se rapportent au thème *Inégalités.* Ici aussi le lecteur pourra augmenter la liste des problèmes en s'adressant cette fois au livre de Hardy, Littlewood, Polya *Inequalities*, Cambridge, 1934.

Les problèmes nos 24 à 30 se rapportent à deux thèmes de la théorie des approximations: *Polynômes les plus proches de zéro* et *Inégalités pour les dérivées.* Dans la théorie des approximations les problèmes d'extrémum occupent une place de choix, et la majorité les problèmes résolus possèdent également la solution standard. Une série de problèmes de la théorie des approximations est étudiée dans le livre de Tikhomirov [111].

Les problèmes nos 31 à 100 ont été choisis parmi ceux que nous proposons dans les séminaires accompagnant le cours de *Commande optimale* à la faculté mécanico-mathématique de l'Université de Moscou. Les problèmes plus difficiles sont marqués d'un astérisque.

Nous voulons faire remarquer au lecteur que l'idéologie de la commande optimale permet d'étudier très simplement et de manière complète la majorité des problèmes du calcul des variations classique (voir, par exemple, la solution du problème de Didon no 55, le problème sur l'oscillateur harmonique no 47, etc.).

Tous les problèmes sont munis de réponses (ou de renvois bibliographiques où la solution peut être trouvée), nous avons donné des indications pour la résolution de nombreux problèmes. Les solutions des problèmes clés sont complètes.

1. Trouver un point de l'espace euclidien de dimension n tel que la somme pondérée des carrés des distances (à poids positifs) de ce point à un certain nombre de points fixes soit minimale.

2. Résoudre le problème 1 lorsque le point cherché est situé sur la sphère unité.

3. Résoudre le problème 1 lorsque le point cherché appartient à la boule unité.

4. Trouver un point du plan tel que la somme pondérée des distances (à poids positifs) de ce point à trois points distincts soit minimale (*problème de Steiner généralisé*, comparer à ce problème dans 1.1.2).

5. Trouver un point du plan tel que la somme des distances de ce point à quatre points distincts soit minimale.

6. Inscrire dans un cercle unité un triangle dont la somme des carrés des côtés soit maximale.

7. Inscrire dans un cercle unité un triangle dont la somme pondérée (à poids positifs) des carrés des côtés soit maximale.

8. Inscrire dans une sphère de rayon unité de l'espace euclidien de dimension n un cylindre de volume maximal (*problème de Kepler généralisé*, comparer au problème de Kepler dans 1.1.2).

9. Inscrire dans une sphère de rayon unité de l'espace euclidien de dimension n un cône de volume maximal.

10. Inscrire dans une sphère de rayon unité de l'espace euclidien de dimension n un parallélépipède rectangle de volume maximal.

11. Parmi tous les simplexes dont un sommet est situé au centre de la sphère unité, tandis que les autres sont contenus dans cette sphère, trouver celui dont le volume est maximal.

12. Inscrire dans une sphère de rayon unité de l'espace euclidien de dimension n un simplexe de volume maximal.

13. Inscrire dans un triangle donné un triangle dont la somme des carrés des côtés serait minimale.

14. Trouver la plus courte distance d'un point situé en dehors d'un ellipsoïde de l'espace de Hilbert [1] à cet ellipsoïde (*problème d'Apollonios généralisé*, comparer au problème d'Apollonios de 1.1.2).

15. $$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \rightarrow \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sigma, \ x_i \geqslant 0, \ \alpha_i \geqslant 1, \ i=1, \ldots, n,$$

où les α_i sont des nombres fixes.

Déduire de la solution de ce problème l'*inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique*.

16. $$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \rightarrow \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = 1,$$

$p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ étant des nombres fixes.

Déduire de la solution du problème l'*inégalité pour les moyennes exponentielles* [2].

17. $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \rightarrow \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

où les a_i sont des nombres fixes.

18. $$(a \mid x) \rightarrow \sup; \quad (x \mid x) = 1,$$

H étant un espace de Hilbert, a, un élément fixe de H.

Déduire de la solution des problèmes 17 et 18 les *inégalités de Cauchy-Bouniakovski* dans $\mathbf{R}^n$ et dans un espace de Hilbert.

19. $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \rightarrow \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1,$$

où p est un nombre fixe, $p \geqslant 1$.

---

[1]) On appelle ellipsoïde de l'espace de Hilbert H l'image de la boule unité par l'application linéaire continue Λ de l'espace en lui-même telle que $\operatorname{Im} \Lambda = H$.

[2]) On appelle moyenne exponentielle à exposant $p \neq 0$ des nombres non négatifs $a_1, \ldots, a_n$ l'expression $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p/n\right)^{1/p}$.

Déduire l'*inégalité de Hölder* de la solution du problème.

20. Parmi toutes les variables aléatoires discrètes qui prennent n valeurs, trouver celle qui a la plus grande entropie [1]).

21. Parmi toutes les distributions de probabilités absolument continues sur la droite **R** à espérance mathématique et à variance données, trouver la variable aléatoire à entropie différentielle maximale [1]).

22. Trouver la distance d'un point donné ξ dans $\mathbf{R}^n$ à l'hyperplan $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$.

23. Trouver la distance du point ξ de $\mathbf{R}^n$ à la droite qui passe par le point η de vecteur directeur ξ.

24. Parmi les polynômes de la forme $t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$ trouver celui qui diffère le moins de zéro dans l'espace $\mathscr{L}_2$ ([—1, 1]).

25. Parmi les polynômes de la forme $t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ trouver celui qui diffère le moins de zéro dans l'espace $\mathscr{L}_2$ ([—1, 1]).

26. Parmi les polynômes de la forme $t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ trouver celui qui diffère le moins de zéro dans l'espace C ([—1, 1]).

27. Parmi tous les polynômes trigonométriques non négatifs de la forme $x(t) = 1 + 2\rho_1 \cos t + \ldots + 2\rho_n \cos nt$ trouver celui pour lequel le coefficient ρ_1 est maximal.

28. $$x(0) \to \sup; \quad \int_0^\infty (x^2 + (x^{(n)})^2)\, dt \leqslant 1.$$

29. $$\int_0^\infty \dot{x}^2\, dt \to \sup; \quad \int_0^\infty (x^2 + \ddot{x}^2)\, dt \leqslant 1.$$

30*. $$\int_{-\pi}^{\pi} (x^{(k)})^2\, dt \to \sup; \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dt \leqslant \gamma_1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^{(n)})^2\, dt \leqslant \gamma_2, \quad x^{(j)}(-\pi) = x^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \gamma_1 < \gamma_2.$$

1. [2]) $$\int_{(0,\,0)}^{(T_0,\,0)} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \inf.$$

---

[1]) On appelle entropie d'un ensemble de nombres positifs $p_1, \ldots, p_n$, dont la somme est égale à un, le nombre $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \operatorname{Log} 1/p_i$. D'une manière analogue, on appelle entropie différentielle d'une fonction positive $p(\cdot)$, dont l'intégrale est égale à un, le nombre $-\int_{\mathbf{R}} p(x) \operatorname{Log} p(x)\, dx$.

[2]) Les conditions aux limites sont indiquées par les limites d'intégration $x(0) = 0$, $x(T_0) = 0$. Dans le problème suivant (nº 32), $x(T_0)$ est libre. Nous écrivons T_0 lorsque le temps est fixe, et T, lorsqu'il est libre (voir, par exemple, les nºs 71, 76, etc.).

32. $\int_{(0,0)}^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \inf.$

33. $\int_{(0,0)}^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \inf; \quad |\dot{x}| \leqslant 1.$

34. $\int_{(0,0)}^{(T_0,0)} (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \inf; \quad |\dot{x}| \leqslant 1.$

35. $\int_{(1,3)}^{(2,1)} t^2 \dot{x}^2\, dt \to \inf.$

36. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} t^2 \dot{x}^2\, dt \to \inf$ (exemple de Weierstrass).

37. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} t^{2/3} \dot{x}^2\, dt \to \inf$ (exemple de Hilbert).

38*. $\int_{(0,0)}^{(1,\xi)} \frac{t^\alpha |\dot{x}|^\beta}{\beta}\, dt \to \inf,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ (exemple de Hilbert-Weierstrass généralisé).

39. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \inf.$

40. $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (t\dot{x}^2 - x)\, dt \to \inf.$

41. $\int_{(0,1)}^{(1,4)} (\dot{x}^2 + x\dot{x} + 12tx)\, dt \to \inf.$

42. $\int_{(0,0)}^{(T_0,\xi)} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \inf.$

43. $\int_{(0,0)}^{(T_0,\xi)} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \inf; \quad |\dot{x}| \leqslant 1.$

44. $\int\limits_{0}^{(1,\,\xi)} \left(\frac{\dot{x}^2+x^2}{2} + |\dot{x}| \right) dt \to \inf.$

45. $\int\limits_{(-1,\,\xi)}^{(1,\,\xi)} ((|\dot{x}|-1)_+^2 + x^2)\, dt \to \inf.$

46*. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2\, dt \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \; x(0)=1.$

47. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(T_0,\,\xi)} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \inf.$

48. $\int\limits_{(0,\,0)}^{T} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \inf.$

49*. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(T_0,\,0)} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \inf; \quad |\dot{x}| \leqslant 1.$

50*. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(T_0,\,0)} ((|\dot{x}|-1)_+^2 - x^2)\, dt \to \inf.$

51. $\int\limits_{(t_0,\,x_0)}^{(t_1,\,x_1)} \frac{x\, dt}{\dot{x}^2} \to \inf; \quad x \geqslant 0.$

52. $\int\limits_{0}^{T_0} \dot{x}^2\, dt - \alpha x^2(T_0) \to \inf; \quad x(0)=0.$

53. $\int\limits_{0}^{1} \dot{x}^2\, dt \to \inf; \quad \int\limits_{0}^{1} x\, dt = 3, \quad x(0)=1, \quad x(1)=6.$

54. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(T_0,\,0)} \dot{x}^2\, dt \to \inf; \quad \int\limits_{0}^{T_0} x^2\, dt \leqslant 1.$

55. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\, dt \to \inf; \quad \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt \leqslant l, \; x(-T_0)=x(T_0)=0$ (problème de Didon).

56. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(\pi,\,0)} \dot{x}^2\, dt \to \inf; \quad \int\limits_{0}^{\pi} x \sin t\, dt = 1.$

57. $\int\limits_{(0,\,2)}^{(1,\,-14)} \dot{x}^2\, dt \to \inf; \quad \int\limits_{0}^{1} x\, dt = -1{,}5, \quad \int\limits_{0}^{1} tx\, dt = -2.$

58. $\int_{(0,-4)}^{(1,4)} \dot{x}^2\, dt \to \inf; \quad \int_0^1 tx\, dt = 0.$

59. $\int_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \inf; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

60. $\int_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \inf; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

61. $\int_0^2 x\, dt \to \inf; \quad -4 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(2) = -2.$

62. $\int_0^{T_0} x\, dt \to \inf; \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = x(T_0) = 0.$

63. $\int_0^{T_0} x\, dt \to \inf; \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = 0.$

64. $\int_0^{T_0} x\, dt \to \inf; \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(T_0) = \dot{x}(T_0).$

65*. $\int_{-1}^1 x\, dt \to \inf; \ |x^{(n)}| \leqslant 1, \ x^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

66. $\int_0^1 x\, dt \to \inf; \quad \int_0^1 \ddot{x}^2\, dt = 144/5, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -4.$

67. $x(2) \to \sup; \quad |\dot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = 0, \quad \int_0^2 \dot{x}^2\, dt = 2.$

68. $T \to \inf; \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \quad x(T) = -1.$

69. $T \to \inf; \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad \dot{x}(0) = \xi_2, \quad x(T) = 0.$

70. $T \to \inf; \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad \dot{x}(0) = \xi_2, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0$ (problème élémentaire de temps minimum).

71. $T \to \inf; \quad \int_0^T \ddot{x}^2\, dt = 4, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(T) = -1.$

72. $T \to \inf; \ |\ddot{x}| \leqslant 2, \ x(-1) = -1, \ \dot{x}(-1) = 0, \ x(T) = 1, \ \dot{x}(T) = 0.$

73. $T \to \inf$; $\ddot{x} + x = u$, $|u| \leqslant 1$, $x(0) = \xi_1$, $\dot{x}(0) = \xi_2$,
$x(T) = \dot{x}(T) = 0$.

74*. $T \to \inf$; $\ddot{x} + x = u$, $|u| \leqslant 1$, $x(0) = \xi_1$, $\dot{x}(0) = \xi_2$,
$x^2(T) + \dot{x}^2(T) = \mathbf{R}^2$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 > \mathbf{R}^2$.

75*. $T \to \inf$; $\ddot{x} + (1 - \varepsilon u)x = 0$, $x(0) = \xi_1$, $\dot{x}(0) = \xi_2$,
$x^2(T) + \dot{x}^2(T) = 1$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 < \varepsilon < 1$.

76. [1] $\int_0^T \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}$; $x(0) = 0$, $T + x(T) + 1 = 0$.

77. $\int_0^1 x^2\, dt \to \sup$; $|\dot{x}| \leqslant 1$, $x(0) = 0$ (trouver toutes les extrémales).

78. $\int_0^{T_0} (\ddot{x}^2 + x^2)\, dt \to \inf$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(T_0) = \xi_1$, $\dot{x}(T_0) = \xi_2$.

79. $\int_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \inf$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(T_0) = 0$, $\dot{x}(T_0) = 0$.

80. $\int_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \inf$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(T_0) = \xi_1$, $\dot{x}(T_0) = \xi_2$.

81. $\int_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \inf$; $|\ddot{x}| \leqslant 1$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(1) = -{}^{11}/_{24}$.

82. $\int_0^2 \ddot{x}^2\, dt \to \inf$; $\ddot{x} \geqslant 6$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(2) = 17$.

83. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)\, dt \to \inf$; $x(0) = x(1) = 0$.

84. $\int_0^{T_0} \ddot{x}^2\, dt \to \inf$; $\int_0^{T_0} x^2\, dt = 1$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

85. $\int_0^2 u^2\, dt + x^2(0) \to \inf$; $\ddot{x} - x = u$, $\dot{x}(2) = 1$.

---

[1] Ici T est libre, voir la note au nº 31.

86. $\int_0^2 u^2\,dt + x^2(0) \to \inf;\quad \ddot{x} - x = u,\quad \dot{x}(2) = 1,\quad x(2) = 0.$

87. $\int_0^2 u^2\,dt + 4x^2(2) \to \inf;\quad x(0) = 1,\quad \ddot{x} + 4x = u.$

88. $\int_0^2 u^2\,dt + 4x^2(2) \to \inf;\quad x(0) = 1,\quad \dot{x}(0) = 0,\quad \ddot{x} + 4x = u.$

89. $\int_0^{T_0} \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2}{2} + x_1 x_2\right) dt \to \inf;\quad x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = 0,$

$$x_2(1) = 2 \sin 1 \operatorname{sh} 1.$$

90. $\int_0^1 (x_1 + x_2)\,dt \to \operatorname{extr};\quad \int_0^1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 = 0,\quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$

$$x_1(1) = 1,\quad x_2(1) = -3.$$

91. $\| u \|_{2p([0,\,1])} \to \inf;\quad \ddot{x} = u,\quad x(0) = 9,\quad \dot{x}(0) = 0,$

$$x(1) = \xi_1,\quad \dot{x}(1) = \xi_2.$$

92*. $\int_0^{T_0} |\ddot{x} - g|\,dt \to \inf;\quad x(0) = x_0,\quad \dot{x}(0) = v_0,$

$x(T_0) = x_1,\quad \dot{x}(T_0) = v_1,\quad [x \in \mathbf{R}^n$ (problème de Goddard).

93. $\int_{(t_0,\,x_0)}^{(t_1,\,x_1)} x^\alpha \sqrt{1 + \dot{x}^2}\,dt \to \inf;\quad \alpha < 0.$

94. $\int_{(t_0,\,\xi)}^{(t_1,\,\xi)} x \sqrt{1 + \dot{x}^2}\,dt \to \inf.$

95. $\int_0^T \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x}\,dt \to \inf;\quad x(0) = 1,\quad T - x(T) = 1.$

96*. $\int_0^T (1 + \varepsilon\,|\ddot{x}|)\,dt \to \inf;\quad x(0) = \xi_1,\quad \dot{x}(0) = \xi_2,$

$$x(T) = \dot{x}(T) = 0,\quad |\ddot{x}| \leqslant 1.$$

97*. $\int_0^1 |u|^p\,dt \to \inf; \quad \ddot{x}+ux=0, \quad x(0)=x(1)=0, \quad \dot{x}(1)=1, \quad p>1.$

98*. $\int_0^1 |u|\,dt \to \inf; \quad \ddot{x}+ux=0, \quad x(0)=x(1)=0, \quad \dot{x}(0)=1.$

99*. $\int_0^T \left(\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}+\sqrt{(\dot{x}_1+\sin t)^2+(x_2+\cos t)^2}\right) dt \to \inf;$

$x_1(0)=x_2(0)=0, \quad x_1(T_0)=\xi_1, \quad x_2(T_0)=\xi_2$ (problème d'Ulam).

100*. $\int_0^{T_0} \left(\frac{ct\,x}{xg+\gamma t^2}+\frac{xt}{xg+\gamma t^2}\right) dt \to \sup; \quad x(0)=x_0, \quad x(T_0)=1,$

c, g, γ étant des constantes positives (problème de montée maximale d'une fusée).

INDICATIONS, SOLUTIONS ET RÉPONSES

Convenons de certaines abréviations: SP — solution du problème, I — indication, F — formalisation. Par $\hat{x}$ $(\hat{y}, \hat{z})$, etc., nous désignons la solution du problème, par S, sa valeur. Si le problème dépend de certains paramètres, on écrit la fonction S comme une fonction des paramètres correspondants; T_0 signifie que le temps est fixe, si l'on écrit T dans l'énoncé du problème, cela signifie que le temps est variable, $\hat{T}$ est le temps optimal.

1. F: $\sum m_i |x-x_i|^2 \to \inf$, x, $x_i \in \mathbf{R}^n$ est le problème différentiable élémentaire; $\hat{x}=\bar{x}=\sum m_i x_i / \sum m_i$ est le centre des masses.

2. F: $\sum m_i |x-x_i|^2 \to \inf$, $|x|=1$, x, $x_i \in \mathbf{R}^n$, $\hat{x}=\bar{x}/|\bar{x}|$ si $\bar{x}\neq 0$, et $\hat{x}$, $|\hat{x}|=1$, est quelconque si $\bar{x}=0$; $\bar{x}$ est le centre des masses.

3. $\hat{x}=\bar{x}$ si $|\bar{x}|\leqslant 1$, $\hat{x}=\bar{x}/|\bar{x}|$ si $|\bar{x}|>1$; $\bar{x}$ est le centre des masses.

4. F: $f(x)=\sum_{i=1}^{3} m_i |x-x_i| \to \inf$, x, $x_i \in \mathbf{R}^2$, $i=1, 2, 3$, est le problème convexe élémentaire. SP: $\hat{x}$ existe $\Rightarrow 0 \in \partial f(\hat{x})$. Si $\hat{x} \notin \{x_1, x_2, x_3\}$, alors $\partial f(\hat{x})=\left\{\sum m_i (\hat{x}-\hat{x}_i)/|\hat{x}-x_i|\right\}=\{0\}$, et cela signifie que l'on peut construire un triangle dont les longueurs de côtés sont m_1, m_2 et m_3. Soit α_{ij} l'angle de ce triangle formé par les côtés de longueurs m_i et m_j. Alors $\hat{x}$ est l'intersection des trois cercles soutendus par les cordes $[x_i, x_j]$ d'angles $\pi-\alpha_{ij}$. Si le triangle à longueurs de côtés m_1, m_2 et m_3 n'existe pas ou si la construction décrite est impossible, alors la solution $\hat{x}$ coïncide avec un des sommets du triangle.

5. Indiquons la réponse dans le cas principal, lorsqu'aucun triplet de points de l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ n'est situé sur une même droite. Alors $\hat{x}$ est l'intersection des diagonales, si le quadrilatère à sommets x_i est convexe; c'est le sommet intérieur de l'enveloppe convexe dans le cas contraire.

6. F: $|x_1-x_2|^2+|x_1-e|^2+|x_2-e|^2 \to \sup$, $|x_1|^2+|x_2|^2=1$, $e=(1, 0)$, $x_i \in \mathbf{R}^2$, $i=1, 2$. Le problème possède six points stationnaires; $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, e)$ constitue un triangle équilatéral. Pour une résolution détaillée, voir le livre [69], p. 443.

7. F: $m_0|x_1-x_2|^2+m_1|x_1-e|^2+m_2|x_2-e|^2 \to \sup$; $|x_1|^2 = |x_2|^2=1$. S'il est possible de construire un triangle de côtés m_1m_2, m_0m_1 et m_0m_2, et α_1, α_2 sont les angles entre les côtés de longueurs $|m_0m_1|$, $|m_1m_2|$ et $|m_1m_2|$, $|m_0m_2|$ respectivement, alors l'angle entre $\hat{x}$ et e est égal à $\pi-\alpha_1$,

tandis que l'angle entre $\hat{x}_2$ et e est égal à $\pi - \alpha_2$. Si la construction est impossible, alors $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = -e$ ou $\hat{x}_1 = -e$, $\hat{x}_2 = e$.

Dans les problèmes 8 et 9, diverses formalisations sont possibles, selon la manière dont on comprend les termes « cylindre » et « cône ». Ici, par la suite, un cylindre dans $\mathbf{R}^n$ est le produit d'une boule de dimension $n - 1$ par un segment orthogonal, le cône dans $\mathbf{R}^n$ est l'enveloppe convexe d'une boule de dimension $n - 1$ et du segment (issu de son centre) qui lui est orthogonal.

8. $\hat{x}$ est la moitié de la hauteur du cylindre, égale à $n^{-1/2}$.

9. $\hat{x}$ est la différence entre la hauteur du cône et le rayon de la boule, égale à n^{-1}.

10. $\hat{x}$ est le cube de dimension n.

11. $\hat{x}$ est le simplexe dont n côtés forment une base orthogonale et dont les longueurs sont égales au rayon de la boule. De la solution de ce problème et de l'homogénéité, on déduit l'*inégalité d'Hadamard*:

$$[\det (a_{ij})]^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big).$$

Pour plus de détails, voir [69], p. 444.

12. $\hat{x}$ est le simplexe régulier.

13. F: $|x - y|^2 + |y - z|^2 + |z - x|^2 \to \inf$; $(x \mid a) \leqslant 0$, $(y \mid b) \leqslant 0$, $(z \mid c) + \alpha \leqslant 0$, $\alpha > 0$, $a + b + c = 0$; $a, b, c, x, y, z \in \mathbf{R}^2$. (L'origine des coordonnées coïncide avec le sommet C; a, b et c sont des vecteurs normaux à $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement; $\hat{x}$ est l'intersection des droites $(x \mid a) = 0$ et $(x \mid b) = \beta (b - a \mid b)$; $\hat{y}$, celle des droites $(y \mid b) = 0$ et $(y \mid a) = -\beta (b - a \mid a)$; $z = (\hat{x} + \hat{y})/2 + 3\beta (a + b)/2$; $\beta = 2\alpha/(3 \mid a + b \mid^2 + \mid b - a \mid^2$.)

14. F: $\| x_0 - \xi \| \to \inf$, $\xi = \Lambda y$, $\| y \| \leqslant 1$, $\hat{\xi} = \Lambda \hat{y}$, où $\hat{y} = (\Lambda^*\Lambda + \hat{\lambda} I)^{-1} \Lambda^* x_0$, tandis que $\hat{\lambda}$ est l'unique solution positive de l'équation $\|(\Lambda^*\Lambda + \lambda I) \Lambda^* x_0\| = 1$.

15. $\hat{x}_1 = \ldots = \hat{x}_n = \sigma / \sum \alpha_i$. De la solution du problème et de l'homogénéité on déduit l'inégalité

$$\Pi\, x_i^{\alpha_i} \leqslant \Big(\sum \alpha_i x_i / \sum \alpha_i\Big)^{\sum \alpha_i} \qquad (x_i \geqslant 0, \quad \alpha_i \geqslant 1).$$

Pour $\alpha_i = 1/n$, on obtient l'*inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique*:

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{1/n} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big/ n, \qquad x_i \geqslant 0.$$

16. $\hat{x} = \pm e_i$, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base standard dans $\mathbf{R}^n$ lorsque $q < p$; $\hat{x} = (\pm n^{1/q}, \ldots, \pm n^{-1/q})$ si $q > p$; le cas $p = q$ est trivial. De la solution de ce problème et de l'homogénéité, on tire l'*inégalité des moyennes exponentielles*

$$q \geqslant p \Rightarrow \sigma_p(x) \leqslant \sigma_q(x), \qquad \sigma_p(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p / n\Big)^{1/p}, \qquad x_i \geqslant 0.$$

17. $\hat{x}_i = \Big(a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2}$. De la solution de ce problème et de l'homo-

généité, on tire *l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski* :

$$\left|\sum a_i x_i\right| \leqslant \left(\sum a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum x_i^2\right)^{1/2}.$$

18. $\hat{x} = a/|a|$. De la solution de ce problème et de l'homogénéité, on tire *l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.*

19. Pour $p > 1$: $\hat{x}_i = a_i^{p'-1}\Big/\left(\sum |a_i|^{p'}\right)^{1/p}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. De la solution de ce problème et de l'homogénéité, on tire l'inégalité de Hölder

$$\left|\sum a_i x_i\right| \leqslant \left(\sum |a_i|^{p'}\right)^{1/p'}\left(\sum |x_i|^{p}\right)^{1/p}, \quad 1/p+1/p'=1.$$

Pour $p=1$,

$$\hat{x}_i = \begin{cases} \operatorname{sign} a_i & \text{si } |a_i| = \|a\| = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}, \\ 0 & \text{si } |a_i| < \|a\|. \end{cases}$$

20. F : $\sum_{i=1}^{n} p_i \operatorname{Log} p_i \to \inf$, $\sum p_i = 1$, $p_i \geqslant 0$. $\hat{p}_i = 1/n$ est la distribution uniforme.

21. F : $\int_{\mathbf{R}} p(x) \operatorname{Log} p(x)\, dx \to \inf$, $\int_{\mathbf{R}} p(x)\, dx = 1$,

$$\int_{\mathbf{R}} xp(x)\, dx = a, \quad \int_{\mathbf{R}} (x-a)^2 p(x)\, dx = \sigma^2, \quad p(x) \geqslant 0,$$

c'est le problème de Liapounov.

SP : $\mathscr{L} = \int_{\mathbf{R}} [\lambda_0 p(x) \operatorname{Log} p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 x p(x) + \lambda_3 (x-a)^2 p(x)]\, dx.$

Condition d'extrémum pour $\hat{p}(\cdot)$:

$$\hat{\lambda}_0 p \operatorname{Log} p + \hat{\lambda}_1 p + \hat{\lambda}_2 x p + \hat{\lambda}_3 (x-a)^2 p \geqslant$$
$$\geqslant \hat{\lambda}_0 \hat{p}(x) \operatorname{Log} \hat{p}(x) + \hat{\lambda}_1 \hat{p}(x) + \hat{\lambda}_2 x \hat{p}(x) + \hat{\lambda}_3 (x-a)^2 \hat{p}(x).$$

On en tire que $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ et $\hat{p}(x) = e^{-(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)}$, où a_1, b_1 et c_1 sont choisis conformément aux contraintes, d'où l'on obtient

$$\hat{p}(x) = (2\pi\sigma)^{-1/2}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma}},$$

c'est la distribution de Gauss.

22. $S = \left|\sum a_i \xi_i - b\right| \left(\sum a_i^2\right)^{-1/2}$.

23. $S = (|\xi-\eta|^2 - (\xi-\eta|\xi/|\xi|)^2)^{1/2}$.

24. $\hat{x}(t) = t^2 - 1/3$. I : aux problèmes 22 à 24 : de tels problèmes ont été étudiés dans 3.5.3 (le problème 24 peut être traité comme celui de la plus courte distance de la fonction t^2 au sous-espace lin $\{1, t\}$).

25. F : $\int_{-1}^{1} x^2\, dt \to \inf$, $x^{(n)} = n!$

$$\text{SP} : \mathscr{L} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{\lambda_0 x^2}{2} + p\,(x^{(n)} - n!)\right) dt.$$

Equation d'Euler-Poisson $\hat{p}^{(n)}(t)+(-1)^n\hat{\lambda}_0\hat{x}=0$; conditions de transversalité: $\hat{p}^{(k)}(\pm 1)=0,\quad k=0, 1, \ldots, n-1,\quad \hat{\lambda}_0=0 \Rightarrow \hat{p}(\cdot)\equiv 0$,

$$\hat{\lambda}_0=1 \Rightarrow \hat{p}^{(2n)}=(-1)^{n+1}x^{(n)}=(-1)^{n+1}n!,\quad \hat{p}^{(k)}(\pm 1)=0 \Rightarrow \hat{p}(t)=C(t^2-1)^n,$$

$$\hat{x}(t)=(-1)^{n+1}\hat{p}^{(n)}(t)=t^n+\ldots=(n!/(2n)!)\,(d/dt)^n\,(t^2-1)^n.$$

Lorsqu'on démontre la suffisance, on peut se servir du fait que le problème est convexe.

26. F : $f(x)=\max\{f(t, x)\}\to \inf$,

$$f(t, x)=\left|t^n+\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right|$$

est le problème convexe élémentaire, qui possède une solution. La fonction $\hat{x}(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k t^{k-1}$ atteint son maximum en valeur absolue en $s \leqslant n+1$ points, car si $s > n+1$, alors $\dot{\hat{x}}(\cdot)$ possède au moins n zéros dans l'intervalle ouvert $(-1, 1)$, ce qui est impossible vu que $\deg \dot{\hat{x}}(\cdot) = n-1$. Désignons ces points par $\tau_1, \ldots, \tau_s$; $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_s$. Si $\hat{x}(\cdot)$ est la solution, alors $0 \in \partial f(\hat{x}) \overset{2.6.4}{=\!=\!=} \operatorname{conv}(\partial f(\tau_1, \hat{x}), \ldots, \partial f(\tau_s, \hat{x})) \Leftrightarrow \exists\, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_s;\quad \hat{\alpha}_i \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^{s} \hat{\alpha}_i=1,\qquad \sum_{i=1}^{s} \hat{\alpha}_i \operatorname{sgn}\hat{x}(\tau_i)\,\tau_i^k=0,\qquad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

On déduit de la dernière relation que $s=n+1$, i.e. $\hat{x}(\cdot)$ atteint sa valeur maximum et minimum en $n+1$ points. Alors parmi ces points on doit avoir les deux points ± 1 (car autrement $\dot{\hat{x}}(\cdot)$ aurait à nouveau au moins n zéros dans $(-1, 1)$). Mais alors $(1-t^2)\dot{\hat{x}}^2(t)$ et $f^2(\hat{x})-\hat{x}^2(t)$ sont des polynômes de degré $2n$, qui possèdent des zéros d'ordre un aux points $\tau_1=-1$, $\tau_{n+1}=1$ et des zéros d'ordre deux aux points $\hat{\tau}_2, \ldots, \hat{\tau}_n$. Ainsi (en égalisant les coefficients des termes en t^{2n}), nous obtenons l'équation $(1-t^2)\dot{\hat{x}}^2 = n^2(f^2(\hat{x}) - \hat{x}^2(t))$ dont la solution sera $\hat{x}(t) = 2^{-(n-1)}\cos(n \arccos t)$.

Maintenant on calcule facilement $\hat{\alpha}_k$ (ce qui nous servira par la suite):

$$\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_{n+1}=(2n)^{-1},\qquad \hat{\alpha}_i=1/n,\qquad i=1, \ldots, n-1.$$

On déduit de ce que nous avons démontré l'importante égalité

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}\hat{x}(t)\,t^k\,dt=0,\qquad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

27. $\hat{\rho}_1 = \cos \pi/(n+2)$. I : d'après le théorème bien connu de Riesz, le polynôme non négatif trigonométrique $x(\cdot)$ a la représentation

$$x(t)=1+2\rho_1\cos t+\ldots+2\rho_n\cos nt=\left|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt}\right|^2,$$

où les x_k sont des nombres réels. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^2=1,\qquad \sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1}=\rho_1.$$

Il faut ensuite appliquer la règle des multiplicateurs de Lagrange. Pour plus de détails, voir [111], pp. 113-114.

28. $$\hat{x}(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j e^{k_j t}}{\left(\sum_{s=1}^{n} k_s\right) p'(k_j)},$$

où les k_j sont les racines de l'équation $x^{(2n)}+(-1)^n x=0$ situées dans le demi-plan négatif, tandis que $p(z)=(z-k_1)\cdot\ldots\cdot(z-k_n)$. Pour plus de détails, voir le livre [111], pp. 121-123.

29. $\hat{x}(t)=Ae^{-t/2}\sin(t\sin\pi/3-\pi/3)$, où A est choisi de la condition isopérimétrique. Pour la solution du problème, voir le livre de Hardy, Littlewood et Polya cité plus haut. La solution du problème général à inégalités pour les dérivées s'obtient par une application directe du principe de Lagrange ; voir l'article de Bouslaïev [1]).

30. $S=\gamma_1 p_1+\gamma_2 p_2$, où p_1, p_2 vérifient le système

$$p_1+s^{2n}p_2=s^{2k},\qquad p_1+(s+1)^{2n}p_2=(s+1)^{2k},$$

avec $s=[(\gamma_2/\gamma_1)^{1/2(n-1)}]$, [ ] étant la partie entière. I: Il faut développer la fonction $x(\cdot)$ en série de Fourier et réduire le problème à un problème de programmation linéaire. Pour plus de détails, voir l'article de Din Zung et Tikhomirov [2]).

Indication aux problèmes 31 à 100. Dans la majorité des problèmes qui suivent, la démonstration du fait que la solution $\hat{x}(\cdot)$ trouvée est un abs min peut être obtenue soit par une analyse directe des valeurs de la fonctionnelle aux points $\hat{x}(\cdot)$ et $\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)$ (dans ce cas nous écrivons « se vérifie directement »), soit par une démonstration indépendante de l'existence de la solution. Dans le deuxième cas, on peut se servir du théorème d'existence suivant pour le problème le plus simple du calcul des variations classique à contraintes sur la dérivée; ce théorème se déduit des résultats généraux exposés dans [46] [3]).

Supposons que dans le problème

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt\to\inf,\qquad x(t_0)=x_0,\qquad x(t_1)=x_1,\qquad |\dot{x}|\leqslant A \qquad (*)$$

l'intégrante L est une fonction continue sur $[t_0,t_1]\times\mathbf{R}\times[-A,A]$, la fonction $\xi\to L(t,x,\xi)$ étant convexe; alors il existe une fonction absolument continue $\hat{x}(\cdot)$ qui donne un minimum au problème $(*)$.

L'introduction de la contrainte « forcée » $|\dot{x}|\leqslant A$ (qui donne la possibilité de garantir l'existence de la solution), suivie d'un passage à la limite quand $A\to\infty$, sera appelée « méthode de contrainte forcée ».

31. $\hat{x}(t)=(t^2-T_0t)/4$ est un abs min.

32. $\hat{x}(t)=(t^2-2T_0t)/4$ est un abs min.

[1]) Bouslaïev A. P., *Sur un problème d'extrémum lié aux inégalités concernant les dérivées*. Vestnik MGU, ser. matem., 1978, nº 3, pp. 67-77 (en russe).

[2]) Din Zung, Tikhomirov V. M., *Sur les inégalités pour les dérivées dans la métrique de $\mathcal{L}_2$*. Vestnik MGU, ser. matem., 1979, nº 5, pp. 7-11 (en russe).

[3]) Voir également Fleming W., Rishel R., *Deterministic and stochastic optimal control*. Heidelberg, 1975.

33. $\hat{x}(t) = (t^2 - 2T_0t)/4$ si $T_0 \leqslant 2$;

$$\text{si } T_0 > 2, \quad \hat{x}(t) = \begin{cases} -t & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0 - 2, \\ \dfrac{t(t-2T_0)}{4} + \dfrac{(T_0-2)^2}{4} & \text{pour} \quad T_0 - 2 \leqslant t \leqslant T_0. \end{cases}$$

Dans tous les cas $\hat{x}(\cdot)$ est un abs min.

34. $\hat{x}(t) = (t^2 - T_0t)/4$ si $T_0 \leqslant 4$;

$$\text{si } T_0 > 4, \quad \hat{x}(t) = \begin{cases} -t & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T_0-4}{2}, \\ \dfrac{t(t-T_0)}{4} + \dfrac{(T_0-4)^2}{16} & \text{pour} \quad \dfrac{T_0-4}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{T_0+4}{2}, \\ t - T_0 & \text{pour} \quad \dfrac{T_0+4}{2} \leqslant t \leqslant T_0. \end{cases}$$

Dans tous les cas $\hat{x}(\cdot)$ est un abs min.

Indication aux problèmes 31 à 34. Il faut appliquer le principe de Lagrange et trouver l'unique extrémale $\hat{x}(\cdot)$. Le fait qu'elle est un abs min se vérifie directement, or on peut faire appel au théorème d'existence énoncé ci-dessus.

35. $\hat{x}(t) = \dfrac{4}{t} - 1$.

36. $S = 0$, il n'y a pas de solution. I: envisager la suite minimisante $x_n(t) = nt$ si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}$, $x_n(t) = 1$ si $1/n \leqslant t \leqslant 1$. Cet exemple avait été avancé par Weierstrass en guise d'argument contre la démonstration de Riemann du principe de Dirichlet.

37. $\hat{x}(t) = t^{1/3}$ (l'exemple a été considéré dans 1.4.3, la solution existe mais elle n'est pas de classe C^1).

38. Dans ce problème on peut montrer l'application des méthodes duales.

$$F: \int_0^1 \frac{t^\alpha |u|^\beta}{\beta}\, dt \to \inf, \qquad \int_0^1 u\, dt = \xi, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

c'est un problème de Liapounov. Fonction adjointe:

$$S^*(\eta) = \sup_\xi \left[\eta\xi - \inf \left\{ \int_0^1 t^\alpha \frac{|u|^\beta}{\beta}\, dt \,\middle|\, \int_0^1 u\, dt = \xi \right\} \right] =$$

$$= \sup_{u(\cdot)} \int_0^1 \left(u(t)\,\eta - \frac{t^\alpha |u(t)|^\beta}{\beta} \right) dt =$$

$$= \begin{cases} \delta\{0\}, & \beta < 1 \quad \text{ou} \quad \beta \geqslant 1, \quad \beta \leqslant \alpha + 1, \\ \delta\{[-1, 1]\}, & \beta = 1, \quad \alpha \leqslant 0, \\ \dfrac{\beta-1}{\beta-\alpha-1} \dfrac{|\eta|^{\beta'}}{\beta'}, & \beta > 1, \quad \beta > \alpha + 1, \quad \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\beta'} = 1. \end{cases}$$

Valeur du problème:

$$S(\xi, \alpha, \beta)=\begin{cases} (i) & 0, \quad \beta<1 \quad \text{ou} \quad \beta\geqslant 1, \quad \beta\leqslant\alpha+1,\\ (ii) & |\xi|\,\beta=1, \quad \alpha\leqslant 0,\\ (iii) & \left(\dfrac{\beta-\alpha-1}{\beta-1}\right)^{\beta-1}\dfrac{|\xi|^{\beta}}{\beta}, \quad \beta>1, \quad \beta>\alpha+1.\end{cases}$$

Pour $\beta < 1$ il n y a pas de solution, car l'intégrante est non convexe (voir le théorème de Bogolioubov dans 1.4.3), pour (i) $\beta \geqslant 1$ on a la solution généralisée « discontinuité en saut au point 0 », pour (ii) $\alpha = 0$ il y a beaucoup de solutions: toute fonction monotone, pour (ii) $\alpha < 0$ on a la solution généralisée « discontinuité en saut au point 1 », pour (iii) $\hat{x}(t)=\xi t^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}}$ la solution appartient à $C^1([0, 1])$ lorsque $\alpha + 1 \leqslant 0$.

39. $\hat{x}(t) = -t^2/4 + st/4$ est un abs min.

40. $\hat{x}(t) = -t/2 + (3/2 \operatorname{Log} 2) \operatorname{Log} t + 1/2$ est un abs min.

41. $\hat{x}(t) = t^3 + 2t + 1$ est un abs min.

Indication aux problèmes 39 à 41: résoudre les équations d'Euler correspondantes.

42. $\hat{x}(t, \xi) = \xi \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T_0$ est un abs min.

43. $\hat{x}(t, \xi) = \xi \operatorname{sh} t/\operatorname{sh} T_0$ si $|\xi| \operatorname{ch} T_0 \leqslant 1$; lorsque $|\xi| \operatorname{ch} T_0 > 1$, alors $\hat{x}(t, \xi) = \pm\operatorname{sh} t/\operatorname{ch} \tau$ si $0 \leqslant t \leqslant \tau$ et $\hat{x}(t, \xi) = \pm(\operatorname{th} \tau + (t - \tau))$, $\tau \leqslant t \leqslant T_0$, où τ est la solution de l'équation $T_0 - \xi = \tau - \operatorname{th} \tau$. Dans tous les cas $\hat{x}(\cdot)$ est un abs min.

44. $\hat{x}(t,\xi)=\xi$ si $|\xi|\leqslant 1$; lorsque $|\xi|>1$, alors $\hat{x}(t,\xi)=\eta$ si $0\leqslant t\leqslant|\eta|^{-1}$ et $\hat{x}(t, \xi)=\eta \operatorname{ch}(t-|\eta|^{-1})$ si $|\eta|^{-1}\leqslant t\leqslant 1$, où η est la solution de l'équation $\eta \operatorname{ch}(1-|\eta|^{-1})=\xi$. Dans tous les cas $\hat{x}(\cdot)$ est un abs min.

45. $\hat{x}(t, \xi)=e^{|t|}+\dfrac{(\xi-e)\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 1}$. (Ce problème avait été discuté dans 1.4.3.)

46. I: Supposons que $x(\cdot)$ est la solution du problème. Alors, en vertu du principe du maximum de Pontriaguine, il existe une fonction $p(\cdot)$ telle que la paire $(x(\cdot), p(\cdot))$ vérifie les conditions suivantes

$$\ddot{x} = \operatorname{sign} p, \quad -\ddot{p} = x, \quad x(0) = 1, \quad x(\infty) = p(\infty) = p(0) = 0. \qquad (1)$$

Si τ est le premier zéro positif de $p(\cdot)$ et $x(\tau) = a \neq 0$, alors on vérifie aisément que la paire $(x_1(\cdot), p_1(\cdot))$, où

$$x_1(t)=a^{-1}x(\sqrt{|a|}\,t+\tau), \quad p_1(t)=a^{-2} \operatorname{sign} a\, p(\sqrt{|a|}\,t+\tau)$$

vérifie également (1). D'après la convexité stricte de la fonctionnelle minimisante, la solution du problème est unique et donc

$$x(t)=a^{-1}(\sqrt{|a|}\,t+\tau), \qquad p(t)=a^{-2} \operatorname{sign} a\, p(\sqrt{|a|}\,t+\tau).$$

On en tire facilement que $x(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont des fonctions finies obtenues en « collant » une quantité dénombrable de polynômes de degrés deux et quatre respectivement et se déterminent complètement à l'aide de trois paramètres: $\dot{x}(0)=-\alpha$, $\dot{p}(0)=\beta$ et τ. Dans ce cas β et τ s'expriment explicitement en termes de α, tandis que α lui-même (dans l'hypothèse que $\alpha \in (\sqrt{2}, 2)$) vérifie l'équation

$$\int_0^{\varphi(\alpha)} (t^2/2-\alpha t+1)(\psi(\alpha)-t)\,dt=0, \qquad (2)$$

où

$$\varphi(\alpha)=\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha^2-2}{\alpha^2+2}}+1\right), \quad \psi(\alpha)=\varphi(\alpha)\left[\left(\frac{\alpha^2+2}{\alpha^2-2}\right)^{3/2}+1\right]^{-1}.$$

On peut montrer que (2) possède effectivement la solution $\hat{\alpha}$ sur $(\sqrt{2}, 2)$ et que si $\hat{\beta}$ et $\hat{\tau}$ sont les valeurs des paramètres β et τ qui correspondent à $\hat{\alpha}$, on peut facilement exhiber une paire $(\hat{x}(\cdot), \hat{p}(\cdot))$ qui vérifie (1). Cela signifie que $\hat{x}(\cdot)$ est la solution du problème donné.

La fonction $\hat{p}(\cdot)$ est aussi la solution d'un certain problème dual, qui est en fait équivalent au problème étudié dans l'article de Berkovitz et Pollard [1]). La solution des deux problèmes, dans une situation un peu plus générale, est contenue dans l'article de Magaril-Iliaev [2]).

47. $$S(T_0, \xi)=\begin{cases} -\infty, & T_0>\pi \text{ ou } T_0=\pi, \ \xi\neq 0, \\ 0, & T_0=\pi, \ \xi=0, \\ \xi^2 \operatorname{ctg} T_0, & 0<T_0<\pi, \end{cases}$$

$$\hat{x}(t;\, T_0, \xi)=(\xi \sin t)/\sin T \text{ est un abs min}, \quad T_0<\pi,$$

$$\hat{x}(t;\, \pi, 0)=A\sin t \text{ est un abs min.}$$

48. $$S(T_0)=\begin{cases} -\infty, & T_0>\pi/2, \\ 0, & 0<T_0\leqslant\pi/2, \end{cases}$$

$$\hat{x}(t;\, T_0)\equiv 0, \quad 0<T_0<\pi/2, \text{ est un abs min},$$

$$\hat{x}(t;\, \pi/2)=A\sin t \text{ est un abs min.}$$

49. $$\hat{x}(t, T_0)=\begin{cases} 0, & T_0<\pi, \\ A\sin t, & |A|\leqslant 1, \ T_0=\pi, \\ \begin{cases} t, & 0\leqslant t_0\leqslant T_0/2-\theta, \\ \sqrt{1+(T_0/2-\theta)^2}\cos(T_0/2-t), & |T_0/2-t|\leqslant\theta, \\ T_0-t, & T_0/2+\theta\leqslant t\leqslant T_0, \end{cases} \end{cases}$$

où $\theta=\theta(T_0)$ est la solution positive minimale de l'équation $\operatorname{ctg} z = T_0/2 - z$.

Indication aux problèmes 47 à 49. Dans le problème 49, la minimale existe. Ensuite il faut appliquer le principe du maximum et montrer qu'il existe toujours un nombre fini d'extrémales. On vérifie facilement que l'extrémale écrite donne la plus petite valeur à la fonctionnelle. Les problèmes 47 et 48 peuvent être complètement résolus par la méthode de la contrainte forcée $|\dot{x}|\leqslant A$. Puis il faut résoudre des problèmes semblables au problème 49 et passer à la limite pour $A\to\infty$.

50. $$S(T_0)=\begin{cases} 0, & T_0<\pi, \\ -\infty, & T_0>\pi. \end{cases}$$

---

[1]) Berkovitz L. O., Pollard H., *A non-classical variational problem arising from optimal filter problem*. J. Arch. Rat. Mech. Analysis, 26 (1967), pp. 281-304, voir également [46].

[2]) Magaril-Iliaev G. G., *Sur les inégalités de Kolmogoroff sur la demi-droite*, Vestnik MGU, 5 (1976), pp. 33-41 (en russe).

Pour $T_0 < \pi$ il y a une quantité dénombrable d'extrémales brisées; la première cassure a lieu sur la courbe $(\tau, \operatorname{tg} \tau)$, $0 \leqslant \tau < \pi/2$. La courbe (avec une seule cassure) est de la forme

$$x_1(t) = \begin{cases} \sin t/\cos(T_0/2), & 0 \leqslant t \leqslant T_0/2, \\ \sin(T_0 - t)/\cos(T_0/2), & T_0/2 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}$$

les autres se construisent d'une manière analogue.

51. $S = 0$, I: Appliquer le théorème de Bogolioubov (1.4.3).

52. $\hat{x}(t) \equiv 0$ est un abs min, $\alpha \leqslant T_0^{-1}$, $S = -\infty$, $\alpha > T_0^{-1}$.

53. $\hat{x}(t) = 3t^2 + 2t + 1$.

54. Les points stationnaires du problème sont

$$x_k(t) = (2/T_0)^{-1/2} \sin k(\pi/T_0)\, t, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

la solution $\hat{x}(t) = x_1(t) = (2/T_0)^{-1/2} \sin(\pi/T_0)\, t$ est un abs min. La solution de ce problème est une bonne illustration du théorème de Hilbert de 3.5.4.

55. La solution du problème n'existe pas toujours. Appliquons la méthode de contrainte forcée: $|\dot{x}| \leqslant 1$.

$$\mathscr{L} = \int_{-T_0}^{T_0} (-\lambda_0 x + \lambda_1 \sqrt{1+u^2} + p(\dot{x} - u))\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{p}} = -\hat{\lambda}_0, \quad \hat{p} = \lambda_1 \frac{\hat{u}}{\sqrt{1+\hat{u}^2}},$$

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \hat{u}(t) \equiv \text{Cte} \Rightarrow \hat{u}(t) \equiv 0$$

(à cause des conditions aux limites) $\Rightarrow l = 2T_0$. Si $l > 2T_0$, $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, i.e. on peut supposer que $\hat{\lambda}_0 = 1$. Alors $\hat{p}(t) = -t$. En prenant l'intégrale du problème, on voit que $\hat{x}(\cdot)$ est soit un arc de cercle, soit la courbe constituée des segments de droite $A(t + T_0)$ et $A(T_0 - t)$ joints par un arc de cercle, ou bien la ligne polygonale

$$A(t + T_0), \quad -T_0 \leqslant t \leqslant 0, \quad A(T_0 - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0.$$

En passant à la limite, on obtient la solution suivante du problème: pour $2T_0 \leqslant l \leqslant \pi T_0$, $\hat{x}(\cdot)$ est un arc de cercle de centre sur la droite $t = 0$, pour $l > \pi T_0$, $\hat{x}(\cdot)$ est le demi-cercle « soulevé » à la hauteur $(l - \pi T_0)/2$.

56. $\hat{x}(t) = (2 \sin t)/\pi$.

57. $\hat{x}(t) = -10t^3 - 12t^2 + 6t + 2$.

58. $\hat{x}(t) = 5t^3 + 3t - 4$.

59. $\hat{x}(t) = (3t^2 - t^3)/2$.

Indication aux problèmes 56 à 59: $\hat{x}(\cdot)$ est partout un abs min, ce qui se vérifie directement.

60. $\hat{x}(t) \equiv 1$ (ce que l'on peut remarquer immédiatement sans calcul, mais on peut évidemment résoudre le problème de la manière standard).

61. $\hat{x}(t) = -2t^2 + 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $\hat{x}(t) = t^2 - 6t + 4$, $1 \leqslant t \leqslant 2$.

62. $\hat{x}(t) = t(t - T_0)/2$.

63. $$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t^2/2, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant (1 - 2^{-1/2})\, T_0, \\ t^2/2 + (\sqrt{2} - 2)\, T_0 t + (\sqrt{2} - 3/2)\, T_0^2, & \text{si } (1 - 2^{-1/2})\, T_0 \leqslant t \leqslant T_0. \end{cases}$$

64. $$\hat{x}(t)=\int_0^t (t-\tau)\,\hat{u}(\tau)\,d\tau, \qquad \hat{u}(t)=-\operatorname{sgn}\cos(2\pi t)/T_0.$$

Indication aux problèmes 61 à 64. Il faut démontrer l'existence de la solution et appliquer le principe du maximum. Le point stationnaire s'avère unique et c'est lui qui donne le abs min.

L'existence de la solution découle ici de la compacité (dans l'espace C) de l'ensemble des fonctions à dérivée seconde bornée (pour les conditions aux limites données par l'énoncé du problème) et de la continuité de la fonctionnelle

$$f(x(\cdot))=\int_0^{T_0} x\,d\tau.$$

65. $$\hat{x}(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{-1}^{1}(t-\tau)^{n-1}\,u(\tau)\,d\tau,$$

$$\hat{u}(t)=\pm\operatorname{sgn}\cos[(n+1)\arccos t],$$

où le signe est choisi de manière à avoir $\hat{x}(t)\leqslant 0$, $t\in[-1, 1]$.

I: Le principe du maximum donne ici les relations:

$$\hat{p}^{(n)}(t)+(-1)^{n+1}=0, \qquad \hat{x}^{(n)}(t)=\hat{u}(t)=\operatorname{sgn}\hat{p}(t),$$

i.e. $\hat{p}(\cdot)$ est un polynôme de degré $(n+1)$ et

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{-1}^{t}(t-\tau)^{n-1}\operatorname{sgn}\hat{p}(\tau)\,d\tau.$$

Si $\hat{p}(\cdot)$ est le $(n+1)$-ième polynôme de Tchébycheff, alors il découle de la solution du problème 26 que

$$\int_{-1}^{1}(1-\tau)^{n-k-1}\operatorname{sgn}\hat{p}(\tau)\,d\tau=0, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

i.e. $\hat{x}^{(k)}(\pm 1)=0$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Par] conséquent, $\hat{x}(\cdot)$ est un point stationnaire, et c'est une solution, le problème étant convexe.

66. $\hat{x}(t)=-t^4-4t^3-2t^2-4t+1$ est un abs min.

67. $\hat{x}(t)=t$ est un abs min.

I: Le fait que c'est un abs min découle des inégalités

$$x(2)=\int_0^2 \dot{x}\,dt\leqslant\sqrt{2}\sqrt{\int_0^2 \dot{x}^2\,dt}=2.$$

Dans les problèmes qui suivent, nous indiquons, en règle générale, seulement les points stationnaires. Pour répondre à la question si ces points donnent effectivement une solution du problème, il faut un travail supplémentaire qui est laissé au lecteur.

68. $$\hat{x}(t)=\begin{cases}-t^2/2+1 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant\sqrt{3},\\ 3(t-4/\sqrt{3})^2/2-1 & \text{si } \sqrt{3}\leqslant t\leqslant 4/\sqrt{3};\end{cases}$$

$$\hat{T}=4/\sqrt{3}.$$

69. $\hat{u}(t) \equiv +1$ ou -1.

70. Voir la solution dans 1.6.3.

71. $\hat{T} = 1$; $\hat{x}(t) = t - t^2$.

72. $\hat{T} = 1$; $\hat{x}(t) = (t+1)^2 - 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$; $\hat{x}(t) = 1 - (t-1)^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

73, 74. Voir [14], pages 34 et 63; pour la solution du problème 75, voir [69], pages 435-439.

76. $\hat{x}_1(t) = -2t$, $\hat{x}_2(t) \equiv 0$.

77. Les extrémales sont

$$x_k(t) = \int_0^t \operatorname{sgn} \sin (2k+1) \frac{\pi\tau}{2}\, d\tau, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots; \qquad \hat{x}(t) = \pm t.$$

78. $$\hat{x}(t) = \hat{C}_1 \operatorname{sh} \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} + C_2 \left(\operatorname{ch} \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh} \frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right);$$

C_1, C_2 se déterminent des conditions $\hat{x}(T_0) = \xi_1$, $\dot{\hat{x}}(T_0) = \xi_2$.

79. $\hat{x}(t) \equiv 0$, $T_0 \leqslant \hat{T}$, où $\hat{T}$ est le premier zéro de l'équation $(\cos T) \operatorname{ch} T = 1$; $S \equiv -\infty$, $T_0 > \hat{T}$.

80. $\hat{x}(t) = \hat{C}_1 (\operatorname{ch} t - \cos t) + \hat{C}_2 (\operatorname{sh} t - \sin t)$ pour $T_0 < \hat{T}$; $\hat{T}$ est défini dans le problème 79; $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ s'obtiennent des relations $\hat{x}(T_0) = \xi_1$, $\dot{\hat{x}}(T_0) = \xi_2$; $S = 0$ pour $T_0 = \hat{T}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$; $S = -\infty$ pour $T_0 > \hat{T}$.

81. $\hat{x}(t) = -t^2/2$ si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$,
$\hat{x}(t) = t^3/3 - t^2 + t/4 - 1/24$ si $1/2 \leqslant t \leqslant 1$.

82. $\hat{x}(t) = -t^3 + 6t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,
$\hat{x}(t) = 3t^2 + 3t - 1$, $1 \leqslant t \leqslant 2$.

83. $\hat{x}(t) = t^4 - 2t^3 + t$.

84. La borne inférieure égale à ω^4 est donnée par la fonction

$$\hat{x}(t) = \hat{C}\,[(\operatorname{sh} \omega t - \sin \omega t)(\operatorname{ch} \omega T_0 - \cos \omega T_0) - (\operatorname{ch} \omega t - \cos \omega t)(\operatorname{sh} \omega T_0 + \sin \omega T_0)],$$

où $\omega > 0$ est la racine minimale de l'équation $\operatorname{ch} \omega T_0 \cos \omega T_0 = -1$, tandis que C s'obtient de la condition $\int_0^{T_0} \hat{x}^2\, dt = 1$.

85. $\hat{x}(t) = \operatorname{sh} t / \operatorname{ch} 2$.

86. $\hat{x}(t) = (t-2) \operatorname{ch} t / \operatorname{sh} 2$.

87. $\hat{x}(t) = -\sin 2(t-2)/\sin 4$.

88. $\hat{x}(t) = (2t \cos 2(t-2) - \sin 2(t-2))/\sin 4$.

89. $\hat{x}_1(t) = \sin 1 \operatorname{sh} t - \operatorname{sh} 1 \sin t$,
$\hat{x}_2(t) = \operatorname{sh} 1 \sin t + \sin 1 \operatorname{sh} t$,

90. $\begin{cases} \hat{x}_1(t)=3t^2-2t, \\ \hat{x}_2(t)=3t^2-6t, \end{cases}$ $\begin{cases} \hat{x}_1(t)=4t-3t^2, \\ \hat{x}_2(t)=-3t^2. \end{cases}$

91. Pour $p>1$, $\hat{x}(t)=\frac{1}{a^2p^{1/(p-1)}}|at+b|^{(2p-1)/(p-1)}\operatorname{sgn}(at+b)+\lambda_1t+\lambda_2$, où $a=\alpha\operatorname{sign}\alpha$,

$$\alpha=\frac{\xi_1^{p-1}\,p}{(|\xi_2/\xi_1|^{p/(p-1)}-|\xi_2/\xi_1-1|^{p/(p-1)})},\quad b=a\,\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_1},$$

$$\lambda_1=-\frac{b^{p/(p-1)}}{ap^{1/(p-1)}},\quad \lambda_2=-\frac{|b|^{(2p-1)/(p-1)}}{a^2p^{1/(p-1)}}.$$

I: Appliquer le principe de Lagrange. Pour le cas $p=1$, voir le problème 92.

92. Notons $\eta=v_0-v_1-gT_0$, $\xi=x_0+v_0T_0-x_1-v_1+v_0+gT_0$. Alors $S=S(\eta,\xi)=|\xi/T_0|+|\eta-\xi/T_0|$. I: Poser $u=\ddot{x}-g$, on obtient le problème de Liapounov

$$\int_0^{T_0}|u|\,dt\to\inf,\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=u+g\Longleftrightarrow\int_0^{T_0}|u|\,dt\to\inf,$$

$$\int_0^{T_0}u\,dt=\eta,\quad \int_0^{T_0}tu(t)\,dt=\xi.$$

Ensuite il faut se servir des résultats du § 4.3.

93. Les extrémales de ce problème ont été trouvées dans 1.6.5. Pour $\alpha<0$, l'extrémale qui joint les points (t_0, x_0), (t_1, x_1) est unique si $x_i>0$; on peut facilement l'inclure dans une famille d'extrémales qui recouvrent tout le plan. Elle donne donc un minimum absolu au problème (voir § 4.4).

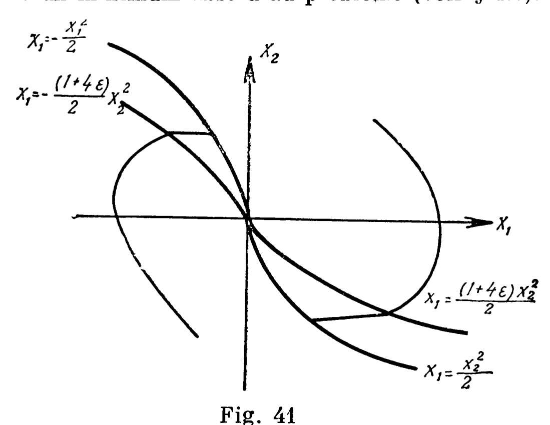


Fig. 41

94. C'est le problème de la surface de révolution minimale. Les extrémales ont été trouvées dans 1.6.5. Pour l'étude complète du problème voir le livre [69], p. 427.

95. $\hat{x}(t)=\sqrt{2-(t-1)^2}$. I: Déduisez du principe de Lagrange que, pour les problèmes d'optique géométrique (dans le cas où l'intégrante est de la

forme $\sqrt{1-\dot{x}^2/v(t,x)}$, la condition de transversalité coïncide avec celle d'orthogonalité.

96. Faisons une esquisse de la trajectoire de phase du problème (voir fig. 41; comparer à la figure 28).

97. SP: Amenons le problème à la forme standard

$$\int_0^1 |u|^p\,dt \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ux_1, \quad x_1(0)=x_1(1)=0, \quad x_2(0)=1.$$

Dans ce problème on peut démontrer l'existence de la solution. Le lagrangien du problème est

$$L = \lambda_0 \mid u \mid^p + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 + ux_1).$$

Montrez que $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. Alors l'équation d'Euler relativement à x et les conditions de transversalité prennent la forme

$$-\dot{p}_1 + up_2 = 0, \quad -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \quad p_2(1) = 0 \Longleftrightarrow \ddot{p}_2 + up_2 = 0, \quad p_2(1) = 0.$$

Ainsi $x_1(\cdot)$ et $p_2(\cdot)$ vérifient la même équation linéaire de deuxième ordre et les deux fonctions s'annulent en un même point: $t = 1$. Par conséquent, $x_1(\cdot)$ et $p_2(\cdot)$ sont proportionnelles: $Cx_1(\cdot) = p_2(\cdot)$. Il découle de l'équation d'Euler relativement à u $(L_u = 0)$ que

$$p_2(t)\,x_1(t) = -p \mid u(t) \mid^{p-1} \operatorname{sgn} u(t) \Rightarrow C_1x_1^2(t) = -p \mid u(t) \mid^{p-1} \operatorname{sgn} u(t).$$

Ainsi la fonction optimale $\hat{u}(\cdot)$ ne change pas de signe. On voit aisément que $u \geqslant 0$. Alors $C < 0$, donc

$$\hat{u}(t) = C_1(\hat{x}_1(t))^{2/(p-1)}, \qquad C_1 > 0,$$

i.e. $\hat{x}(\cdot)$ vérifie l'équation $\ddot{x} + C_1x^{(p+1)/(p-1)} = 0$. Ayant désigné $(p+1)/(p-1) = q$, on obtient de l'équation relativement à x l'intégrale $\dot{x}^2/2 + (C_1/(q+1))\,x^{q+1} = D$. Des conditions $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ on tire $D = 1/2$ et $t = \int_0^x dz/\sqrt{1-(2C_1/(q+1)\,z^{q+1}}$. La constante C_1 s'obtient des relations

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\left(\frac{(q+1)}{2C_1}\right)^{1/(q+1)}} \frac{dz}{\sqrt{1-(2C_1/(q+1))\,z^{q+1}}} =$$

$$= \left(\frac{(q+1)}{2C_1}\right)^{\frac{1}{(q+1)}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^{q+1}}} = C^{\frac{-1}{(q+1)}}\Gamma_q,$$

où Γ_q est un nombre connu. Ainsi l'extrémale $\hat{x}(\cdot)$ est une fonction symétrique relativement à la droite $t = 1/2$; sur le segment $[0, 1/2]$ elle est la fonction inverse à la fonction $t = \int_0^x dz/\sqrt{1-kz^{(q+1)}}$, où k est une constante connue.

98. $$\hat{x}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 1-t, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

I : Il faut appliquer la méthode de contrainte supplémentaire $|u| \leqslant A$, faire appel au principe du maximum, se servir de la relation $Cx_1(\cdot)=p_2(\cdot)$ analogue à celle obtenue dans la solution du problème 97 et passer à la limite pour $A \to \infty$.

Les problèmes 97 et 98 se rapportent à la théorie de la stabilité [1]).

99. I : Le problème 99 est une des formalisations du problème bien connu d'Ulam sur la superposition des segments. A la page 95 de son livre [2]) Ulam écrit : « Supposons que deux segments de longueur 1 sont donnés dans le plan. Il faut déplacer continûment le premier segment sans changer sa longueur pour qu'il coïncide avec le deuxième et pour que la somme des longueurs des courbes parcourues par les extrémités du segment mobile soit minimale ».

En guise de paramètre t pour la formalisation du problème nous avons choisi l'angle formé par le segment mobile avec sa position initiale.

On peut réduire le problème à un problème de Liapounov (car l'intégrante ne dépend pas de x_1 et de x_2) et l'étudier par les méthodes duales du § 4.3 [3]). Mais il est plus simple d'appliquer le principe du maximum. Donnons la forme de la solution optimale pour les segments situés sur une même droite (ici nous avons stipulé que le point x_1 doit arriver au point x_1', le point x_2 au point x_2').

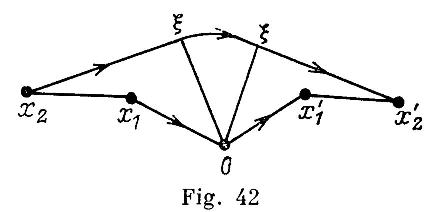


Fig. 42

Les flèches indiquent les trajectoires des points mobiles x_1 et x_2. Le point O se détermine uniquement de la condition de symétrie, du fait que Ox_1' est parallèle à $x_2\xi$, x_1O à $\xi' x_2'$ et du fait que $O\xi$ est perpendiculaire à $x_2\xi$, $O\xi'$ à $x_2\xi$.

100. I : Le problème 100 est la formalisation d'un des problèmes sur la montée maximale d'une fusée [4]). Le problème se réduit facilement à un problème élémentaire de commande optimale (du fait que le lagrangien dépend linéairement de $\dot{x}$):

$$\hat{x}(t)=\begin{cases} x_0, & 0\leqslant t\leqslant t_1, \\ (\gamma/cg)\,t^3+(\gamma/g)\,t^2, & t_1\leqslant t\leqslant t_2, \\ 1, & t>t_2, \end{cases}$$

où t_1 est la racine positive de l'équation $(\gamma/cg)\,t^3+(\gamma/g)\,t^2=x_0$ et t_2, la racine positive de l'équation $(\gamma/cg)\,t^2+(\gamma/g)\,t^2=1$ [5]).

---

[1]) Voir : Borg G., *Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen*, Arch. matem. astr. fysik, Bd 31A, 41 (1944), 460-482.

Levin A. Yu., *Sur une zone de stabilité*, Doklady Acad. Scien. U.R.S.S., 145, 6 (1962), pp. 1021-1023.

Levin A. Yu., *Sur un critère de stabilité*. Uspehi Mat. Nauk, 17, 3 (1962), pp. 211-212 (en russe).

[2]) Ulam S., *Unsolved mathematical problems*.

[3]) Voir également : Rvatchev M. A., *Sur le problème d'Ulam sur la coïncidence des segments*. Trudy sem. « Géométrie combinatoire et disposition optimale », Kiev, 1973, pp. 42-52 (en russe).

[4]) Kosmodemianski A. A., *Konstantin Edouardovitch Tsiolkovski*, Moscou, « Nauka », 1976, pp. 263-265.

[5]) Plus en détail, voir Alexandrov Yu. L., *Problème sur la montée maximale d'une fusée dans une atmosphère et un champ de gravitation homogènes*. Vestnik MGU (en préparation) (en russe).

COMMENTAIRES ET INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

La littérature qui se rapporte à la théorie des problèmes d'extrémum est immense. Sans prétendre à être complets, nous ne mentionnerons ici que quelques travaux de base originaux et quelques principaux manuels, monographies et articles de revue.

Chapitre I. § 1.1. L'histoire de l'apparition des premiers problèmes de maximum et de minimum est exposée dans [119] ainsi que dans le livre de Van der Waerden déjà cité ; une description de la première étape du développement du calcul des variations classique est donnée par [110] et [120]. Les propriétés extrémales du cercle et de la sphère sont exposées dans la monographie [21]. Le problème de transport fut déjà étudié dans l'article de Kantorovitch [11], premier travail en programmation linéaire. Les premiers problèmes de contrôle automatique furent étudiés par Bushaw [32]. Le problème de temps minimal et toute une série d'autres problèmes furent considérés dans la monographie fondamentale de Pontriaguine, Boltianski, Gamkrélidzé et Michtchenko [14] et dans de nombreux autres livres sur la commande optimale ([24], [30], etc.).

§§ 1.2 à 1.5. L'article [41] est consacré à l'histoire du principe de Lagrange. Ce même thème, mais dans le cadre du calcul des variations classique, est abordé dans les travaux [39], [40].

Indiquons encore quelques livres et articles qui se rapportent aux thèmes mentionnés dans ces paragraphes et sont accessibles à un public assez large: [90], [96], [98], [101], [102]. Les fondements du calcul des variations classique sont exposés dans les manuels [1], [7], [10].

Chapitre II. § 2.1. En plus des manuels d'analyse fonctionnelle déjà mentionnés, indiquons les livres [18], [66] écrits spécialement pour « servir » la théorie des problèmes d'extrémum.

§ 2.2. Le calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés est exposé (en plus de [KF]) dans les manuels [3], [72], [88] et les monographies [69], [77], [112].

§ 2.3. Les manuels [3], [72], [88] traitent du théorème des fonctions implicites en dimension infinie.

Le théorème de 2.3.1 est suffisamment commode pour construire la théorie générale, car il contient le théorème classique des fonctions implicites et le théorème de Lusternik sur l'espace tangent et donne également une estimation de la différence avec le noyau de l'application. La construction employée dans la démonstration était en fait déjà contenue dans l'article original [87] (voir également [89]). Pour d'autres démonstrations et modifications voir [69], [84].

§ 2.4. Pour la différentiabilité d'autres fonctionnelles explicites importantes, voir [77], [112].

§ 2.6. Les fondements de l'analyse convexe de dimension finie furent posés par Minkowski [92], [93] et Fenchel [48], [49]. L'analyse convexe dans les espaces de dimension infinie fut conçue dans les années 60 dans les travaux de Brøndsted [31], Doubovitski et Milioutine [42], Moreau, Rockafellar et d'autres. La

revue la plus complète de la théorie en dimension finie est contenue dans la monographie de Rockafellar [106], ainsi que (pour la partie qui concerne seulement les ensembles convexes) dans la monographie de Bonnesen et Fenchel [29]. La théorie en dimension infinie est exposée dans [17], [67], [69], [81], [104], [111].

Dans la période actuelle, on effectue des essais pour créer un calcul synthétique « convexe-différentiable », voir à ce sujet [35], [89], [107].

Chapitre III. § 3.2. Il est difficile de dire qui fut le premier à démontrer la règle des multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes différentiables à égalités et à inégalités en dimension finie. Certains travaux américains citent l'article de Valentine [114] et la thèse de Karush [75]. La règle des multiplicateurs pour le cas d'un nombre infini d'inégalités fut démontrée par John [70]. Un rôle important dans cette direction fut joué par l'article de Kuhn et Tucker [80]. Des variantes de dimension infinie de la règle des multiplicateurs sont exposées dans [42], [58], [60], [69], [104], [111].

§ 3.3. La programmation convexe et linéaire est très largement représentée dans les manuels et monographies [37], [47], [59], [61], [73], [74], [86], [100], [101], [106], [115], [117].

§ 3.4. Un des premiers travaux consacrés aux conditions nécessaires pour les problèmes à contraintes du type d'inégalités fut [36]. On trouve une excellente exposition de la théorie en dimension finie dans le manuel de Hestenes [65], voir également [50], [118]. Récemment, Lévitine, Milioutine et Osmolovski ont développé une théorie complète des conditions de deuxième ordre pour les problèmes à contraintes [83], [84]. Le dernier des travaux cités possède une bibliographie détaillée. Nous nous sommes servis de certaines constructions de cet article dans notre exposé. Voir également [64], [99].

Chapitre IV. §§ 4.1 et 4.4. Il y a beaucoup de manuels et de monographies consacrés au calcul des variations classique. En plus de ceux mentionnés précédemment, voir [22], [28], [33], [62], [82], [116]. De la manière la plus complète la théorie des conditions nécessaires et suffisantes d'extrémum dans le problème de Lagrange est développée dans la monographie de Bliss [22] où l'on trouve également l'historique de cette question. Pour les relations entre le calcul des variations et la mécanique classique, voir [2].

§ 4.2. L'ébauche originale de la théorie de la commande optimale fut décrite dans [27] et dans l'aperçu de Pontriaguine [103], ensuite cette théorie constitua l'essence de la monographie de Pontriaguine, Boltianski, Gamkrélidzé et Michtchenko [14], ouvrage qui donna une impulsion au développement de tout ce qui concerne les recherches liées au problème d'extrémum. La démonstration du principe du maximum, exposée dans le § 4.2, est une variante de la première démonstration, due à Boltianski, quoiqu'elle se passe de toute méthode en dehors du cadre de l'analyse classique. La méthode des systèmes centrés avait été employée dans les travaux de Doubovitski et Milioutine. Il y a maintenant beaucoup de démonstrations du principe du maximum, voir par exemple [25], [42] à [45], [52], [63], [69], [91].

La théorie de commande optimale est exposée dans les manuels [24], [52], [56], ainsi que dans les monographies [26], [30], [53], [79], [85], [95] et dans beaucoup d'autres. Les monographies citées consacrent beaucoup de place à la solution de divers problèmes appliqués concrets.

§ 4.3. Le principe du maximum pour les systèmes linéaires fut pour la première fois démontré par Gamkrélidzé [57]. Une théorie accomplie des systèmes linéaires fut élaborée par Krassovski [78]. Une revue des problèmes liés aux problèmes de Liapounov est donnée dans l'article [78], qui contient des généralisations des résultats de ce paragraphe, ainsi qu'une bibliographie détaillée.

Le développement de la théorie des problèmes de Liapounov a engendré l'étude des fonctionnelles intégrales convexes; voir les travaux [34], [69], [108], etc.

Pour conclure, notons quelques monographies où le lecteur pourra se familiariser avec certaines questions de principe de la théorie des problèmes d'extrémum, auxquelles nous n'avons pas touché dans le présent ouvrage.

Calcul des variations à plusieurs dimensions: [76], [97].

Théorèmes d'existence: [56], [69], [97].

Conditions suffisantes pour les problèmes de commande optimale: [23], [24], [79].

Extensions des problèmes d'extrémum: [46], [66].

Méthodes duales dans la théorie des problèmes d'extrémum: [46], [67].

Méthodes numériques: [38], [94], [105], [109], [113].

Régimes de glissement: [55].

Programmation dynamique: [19], [20].

Contraintes de phase et contraintes mixtes: [43], [44], [54].

Voir également l'aperçu [51].

BIBLIOGRAPHIE

Principaux manuels cités dans le texte

[KF] Kolmogorov A., Fomine S., Eléments de la théorie des fonctions et analyse fonctionnelle. Moscou, « Mir », 1977.

1. Ahiezer N., Cours de calcul des variations. Moscou, Gostehizdat, 1955 (en russe).
2. Arnold V., Méthodes mathématiques de la mécanique classique. Moscou, « Mir », 1976.
3. Cartan H., Calcul différentiel. Formes différentielles. Hermann, Paris, 1967.
4. Coddington E., Levinson N., The theory of ordinary differential equations. New York, 1955.
5. Danford N., Schwartz J. Linear operators (general theory). New York, 1958.
6. Fihtengolz G., Cours de calcul différentiel et intégral, vv. 1, 2. Moscou, « Nauka », 1969.
7. Guelfand I., Fomine S., Calcul des variations. Moscou, Fizmatgiz, 1961 (en russe).
8. Hartman Ph., Ordinary Differential Equations. New York, 1964.
9. Kurosh A., Cours d'algèbre supérieure, Moscou, « Mir », 1980.
10. Lavrentiev M., Lusternik L., Cours de calcul des variations. Moscou-Léningrad, Gostehizdat, 1950 (en russe).
11. Nicolski S., Cours d'analyse mathématique, vv. 1, 2. Moscou, « Nauka », 1975.
12. Petrovski I., Leçons de la théorie des équations différentielles ordinaires. Moscou-Léningrad, Gostehizdat, 1952 (en russe).
13. Pontriaguine L., Equations différentielles ordinaires. Moscou, « Mir », 1974.
14. Pontriaguine L., Boltianski V., Gamkrélidzé R., Michtchenko E., Théorie mathématique des processus optimaux. Moscou, « Mir », 1978.
15. Privalov I., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Moscou, « Nauka », 1977 (en russe).

Bibliographie supplémentaire

16. Arkine V., Lévine V., Convexité des valeurs des intégrales vectorielles, théorèmes de choix mesurable et problèmes variationnels. Uspehi Mat. Nauk 27, vyp. 3, 1972, pp. 21-77 (en russe).
17. Akilov G., Kutateladzé S., Espaces vectoriels ordonnés. Novossibirsk, « Nauka », 1978 (en russe).
18. Balakrishnan A. V., Applied Functional Analysis. N.Y.: Springer, 1976.

19. Bellman R., Dynamic programming. New Jersey, Princeton Univ. Press, 1957.
20. Bellman R., Kalaba R., Dynamic programming and modern control theory. Acad. Press. N.Y. and London.
21. Blashke W., Kreis und Kugel.
22. Bliss J., Lectures on the calculus of variations. University of Chicago Press, 1961.
23. Boltianski V., Condition nécessaire d'optimalité et fondement de la méthode de programmation dynamique. Izvestia Acad. Sci. U.R.S.S., ser. mat., 28, nº 3, 1964, pp. 481-514 (en russe).
24. Boltianski V., Méthodes mathématiques de contrôle optimal. Moscou, « Mir », 1972.
25. Boltianski V., Méthode des tentes dans la théorie des problèmes d'extrémum. Uspehi Mat. Nauk 30, vyp. 3, 1975, pp. 3-55 (en russe).
26. Boltianski V., Contrôle optimal des systèmes discrets. Moscou, « Mir », 1976.
27. Boltianski V., Gamkrélidzé R., Pontriaguine L., Sur la théorie des processus optimaux. Doklady Acad. Sci. U.R.S.S., 110, nº 1, 1956, pp. 7-10.
28. Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig, 1949.
29. Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper. B., Springer, 1934.
30. Bryson A., Jr., Ho Yu-Chi, Applied Optimal Control. London, 1969.
31. Brøndsted A., Conjugate convex functions in topological vector spaces. Mat. Fys. Medd. Dansk. Vid. Selsk. 34, 2, 1964, p. 1-26.
32. Bushaw D. W., Differential equations with a discontinuous forcing term. Princeton, Dept. of Math. Princeton Univ., 1952.
33. Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig-Berlin, Teubner, 1935.
34. Castaing C., Valadier M., Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Mathematics, N 580. B., Springer, 1977.
35. Clarke F. H., Generalized gradients and applications. Trans. Amer. Math. Soc. 205, 1975, p. 247-262.
36. Cox M. J., On necessary conditions for relative minima. Amer. J. Math. 66, N 2, 1944, p. 170-198.
37. Danzig J., Linear programming, its generalizations and applications.
38. Démianov V., Rubinov A., Méthodes d'approximation des solutions des problèmes d'extrémum. Léningrad, Editions LGU, 1968 (en russe).
39. Doroféeva A., Le calcul des variations dans la deuxième partie du XIXe siècle. Etudes d'histoire des mathématiques XV, 1963, pp. 99-128 (en russe).
40. Doroféeva A., Développement du calcul variationnel comme calcul de variations. Etudes d'histoire des mathématiques XIV, 1961, pp. 101-180 (en russe).
41. Doroféeva A., Tikhomirov V., De la règle des multiplicateurs de Lagrange au principe du maximum de Pontriaguine. Etudes d'histoire des mathématiques XXV, 1979 (en cours de publication).
42. Dubovitski A., Milioutine A., Problèmes d'extrémum en présence de contraintes. J. Vysch. Mat. i Mat. Fiz. 5, nº 3, 1965, pp. 395-453 (en russe).
43. Dubovitski A., Milioutine A., Conditions nécessaires de minimum faible dans le problème général de contrôle optimal. Moscou, « Nauka», 1971 (en russe).
44. Dubovitski A., Milioutine A., Conditions nécessaires d'extrémum dans les problèmes de commande optimale à contraintes mixtes.

du type d'inégalités. J. Vysch. Mat. i Mat. Fiz. 8, nº 4, 1968, pp. 725-770 (en russe).
45. Dubovitski A., Milioutine A., Translation des équations d'Euler. J. Vysch. Mat. i. Mat. Fiz. 9, nº 6, 1969, pp. 1263-1284.
46. Ekland I., Temam R., Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam, 1979.
47. Arrow K., Nurwicz L., Uzawa H., Studies in non-linear programming Stanford, Stanford Univ. Press, 1958.
48. Fenchel W., Convex Cones, Sets and Functions. Princeton, Princeton Univ., 1951.
49. Fenchel W., On conjugate convex functions. Canadian J. Math., 1, 1949, p. 73-77.
50. Fiacco A., MacKormick G., Non-linear programming. New York, 1968.
51. Gabassov R., Kirillova F., Méthodes de commande optimale. Bilans des sciences et des techniques. Problème des mathématiques contemporaines, v. 6, Moscou, 1976, pp. 133-206.
52. Gabassov R., Kirillova F., Méthodes d'optimisation. Minsk, Editions BGU, 1975 (en russe).
53. Gabassov R., Kirillova F., Commandes optimales singulières. Moscou, « Nauka », 1973 (en russe).
54. Gamkrélidzé R., Processus de commande optimale pour coordonnées de phase bornées. Izv. Acad. Sci. U.R.S.S., ser. matem. 24, nº 3, 1960, pp. 315-356 (en russe).
55. Gamkrélidzé R., Sur les régimes optimaux glissants. Doklady Acad. Sci. U.R.S.S., 143, nº 6, 1962, pp. 1243-1245 (en russe).
56. Gamkrélidzé R., Fondements de la commande optimale. Tbilissi, Ed. TGU, 1977 (en russe).
57. Gamkrélidzé R., Théorie des processus en temps optimal pour les systèmes linéaires. Izv. Acad. Sci. U.R.S.S., ser. matem. 22, nº 4, 1958, pp. 449-474 (en russe).
58. Gamkrélidzé R., Haratichvili G., Conditions nécessaires de premier ordre dans les problèmes d'extrémum (Dans le livre: Congrès international des mathématiciens à Nice, Moscou, « Nauka », 1972).
59. Gass S., Linear programming. Methods and applications. New York, Mc Graw Hill, 1958.
60. Guirsanov I., Leçons de la théorie mathématique des problèmes d'extrémum. Moscou, Ed. MGU, 1970 (en russe).
61. Goldstein E., Théorie de dualité en programmation mathématique. Moscou, « Nauka », 1971 (en russe).
62. Hadamard J., Calcul des variations. Paris, Hermann, 1910.
63. Halkin H., On necessary conditions for optimal control of non-linear systems. J. Analyse Math. 12, 1964, p. 1-82.
64. Hestenes M. R., Calculus of Variations and Optimal Control Theory. N. Y., Wiley, 1966.
65. Hestenes M. R., Optimization theory. The finite dimensional case. N. Y., Wiley, 1975.
66. Holmes R. B., Geometric functional analysis and its applications. N. Y., Springer, 1975.
67. Ioffe A., Tikhomirov V., Dualité des fonctions convexes et problèmes d'extrémum. Uspehi Mat. Nauk 23, vyp. 6, 1968, pp. 51-116 (en russe).
68. Ioffe A., Tikhomirov V., Extension des problèmes variationnels, Trudy MMO 18, 1968, pp. 187-246 (en russe).
69. Ioffe A., Tikhomirov V., Théorie des problèmes d'extrémum, Moscou, « Nauka », 1974 (en russe).

70. John F., Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions./In: Studies and Essays. Courant Anniversary Volume. N. Y., Interscience, 1948, p. 187-204.
71. Kantorovitch L., Méthodes mathématiques d'organisation et de planification de la production. Léningrad, Editions LGU, 1939 (en russe).
72. Kantorovitch L., Akilov G., Analyse fonctionnelle. Moscou, « Mir », 1981.
73. Karlin S., Mathematical Methods in the Theory of Games, Programming and Economics, London, 1959.
74. Karmanov V., Programmation mathématique. Moscou, « Nauka », 1975 (en russe).
75. Karush W. E., Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. Chicago: Univ. of Chicago, 1939.
76. Klötzler R., Mehrdimensionale Variationsrechnung. B., VEB Deutscher Verlag, 1971.
77. Krasnoselski M., Zabreiko P., Pustylnik E., Sobolevski P., Opérateurs d'intégration dans les espaces de fonctions sommables. Moscou, « Nauka », 1966 (en russe).
78. Krassovski N., Théorie de contrôle du mouvement. Systèmes linéaires. Moscou, « Nauka », 1968 (en russe).
79. Krotov V., Gurmane V., Méthodes et problèmes de commande optimale. Moscou, « Nauka », 1973 (en russe).
80. Kuhn H. W., Tucker A. W., Non-linear programming./In: Proc. of Second Berkeley Symp. Berkeley, Univ. of California Press, 1951, p. 481-492.
81. Kutatéladzé S., Rubinov A., Dualité de Minkowski et ses applications. Novossibirsk, « Nauka », 1976 (en russe).
82. Lavrentiev M., Lusternik L., Fondements du calcul des variations. Moscou-Léningrad: ONTI, 1935, vv. I, II (en russe).
83. Lévitine E., Milioutine A., Osmolovski N., Sur les conditions de minimum local dans les problèmes à contraintes (Dans le livre: Economie mathématique et analyse fonctionnelle). Moscou, « Nauka », 1974, pp. 139-202 (en russe).
84. Lévitine E., Milioutine A., Osmolovski N., Conditions d'ordres supérieurs d'un minimum local dans les problèmes à contraintes. Uspehi Mat. Nauk 33, vyp. 6, 1978, pp. 85-148 (en russe).
85. Li E., Marcus L., Fondements de la théorie de commande optimale. Moscou, « Nauka », 1972 (en russe).
86. Linear inequalities and related systems. Ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, 1956.
87. Lusternik L., Sur les extrémums liés des fonctionnelles. Matem. Sbornik 41, n° 3, 1934, pp. 390-401 (en russe).
88. Lusternik L., Sobolev N., Eléments d'analyse fonctionnelle. Moscou, « Nauka », 1965.
89. Magaril-Iliaev G., Théorème des fonctions implicites pour les applications satisfaisant à la condition de Lipschitz. Uspehi Mat. Nauk 33, vyp. 1, 1978, pp. 221-222.
90. Mathématique à l'usage de l'ingénieur. (Edité par N. Rozov). Moscou, « Znanié », 1973.
91. Michel P., Une démonstration élémentaire du principe du maximum de Pontriaguine. Bull. Math. économiques. 14, 1977.
92. Minkowski H., Geometrie der Zahlen. Leipzig, Teubner, 1910.
93. Minkowski H., Theorie der konvexen Körper./In: Gesammelte Abhandlungen, Bd. II., Leipzig-Berlin, Teubner, 1911.
94. Moisseev N., Méthodes numériques dans la théorie des systèmes optimaux. Moscou, « Nauka », 1971 (en russe).

95. Moisseev N., Eléments de la théorie des systèmes optimaux. Moscou, « Nauka », 1975.
96. Moisseyev N. N., Tihomirov V. M., Optimisation./In: Mathematics Applied to Physics. N. Y., Springer, 1970.
97. Morrey Ch. B., Multiple integrals in the calculus of variations. N. Y., Springer, 1966.
98. Mychkis A., Mathématiques: cours spécial pour les établissements techniques. Moscou, « Nauka », 1971 (en russe).
99. Neustadt L. W., Optimization. A theory of necessary conditions. Princeton, Princeton Univ. Press, 1976.
100. Nikaido H., Convex structures and mathematical economics. Moscou, « Mir », 1972.
101. Nïte I., Programmation linéaire (avec discussion de certains problèmes non linéaires). Moscou, Ed. MGU, 1978 (en russe).
102. Commande optimale, Moscou, « Znanié », 1978 (en russe).
103. Pontriaguine L., Processus optimaux de régulation. Uspehi Mat. Nauk 14, vyp. 1, 1959, pp. 3-20 (en russe).
104. Pchenitchnyi B., Conditions nécessaires d'extrémum. Moscou, « Nauka », 1969 (en russe).
105. Pchenitchnyi B., Daniline Yu., Méthodes numériques dans les problèmes d'extrémum. Moscou, « Nauka », 1975 (en russe).
106. Rockafellar R., Convex Analysis. Princeton, 1970.
107. Rockafellar R. T., The theory of subgradients and its applications to problems of optimization. Lecture Notes Univer. of Montreal, 1978.
108. Rockafellar R. T., Convex-Integral functionals and duality./In: Contributions to Nonlinear Functional Analysis. N. Y., Acad. Press, 1971, p. 215-236.
109. Romanovski I., Algorithmes pour la solution des problèmes d'extrémum. Moscou, « Nauka », 1977 (en russe).
110. Rybnikov K., Premières étapes du calcul des variations (Dans le livre: Etudes d'histoire des mathématiques, vyp. 2. Moscou-Léningrad, GITTL, 1949) (en russe).
111. Tikhomirov V., Certaines questions de la théorie des approximations. Moscou, Ed. MGU, 1976 (en russe).
112. Vainberg M., Méthode variationnelle et méthode des opérateurs monotones dans la théorie des équations non linéaires. Moscou, « Nauka », 1972 (en russe).
113. Vassiliev F., Cours sur les méthodes de résolution des problèmes d'extrémum. Moscou, Ed. MGU, 1974 (en russe).
114. Valentine F. A., The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions./In: Contributions to Calculus of Variations. Chicago, Univ. of Chicago Press, 1933-1937.
115. Yeremine I., Astafiev N., Introduction à la théorie de programmation linéaire et convexe. Moscou, « Nauka », 1976 (en russe).
116. Young L., Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W. B. Saunders, Philadelphia, London, Toronto, 1969.
117. Yudine D., Goldstein E., Programmation linéaire (théorie, méthodes, applications). Moscou, « Nauka », 1969 (en russe).
118. Zangwill W., Nonlinear programming. A unified approach.
119. Zeiten G., Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et au Moyen Age. Moscou-Léningrad, ONTI, 1938 (en russe).
120. Zeiten G., Histoire des mathématiques aux XVIe et XVIIe siècles. Moscou-Léningrad, ONTI, 1938 (en russe).

LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS

$\forall$	quantificateur universel: « pour tous les »
$\exists$	quantificateur existentiel: « il existe »
$\Rightarrow$	implication: « si ..., alors ... »
$\Leftrightarrow$	équivalence
$\overset{\text{def}}{=}$	égal par définition
$\overset{(4)}{=}$	égal en vertu de (4)
$x \in A$	l'élément x appartient à l'ensemble A
$x \notin A$	l'élément x n'appartient pas à l'ensemble A
$\varnothing$	ensemble vide
$A \cup B$	réunion des ensembles A et B
$A \cap B$	intersection des ensembles A et B
$A \setminus B$	différence des ensembles A et B
$A \subset B$	l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B
$A \times B$	produit cartésien des ensembles A et B
$A + B$	somme arithmétique des ensembles A et B
$\{x \mid P(x)\}$	ensemble d'éléments x possédant la propriété $P(\cdot)$
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	ensemble constitué des éléments $x_1, \ldots, x_n$
$F: X \to Y$	l'application F de l'ensemble X dans l'ensemble Y; fonction F à domaine de définition X et à valeurs dans l'ensemble Y
$x \mapsto F(x)$	l'application (la fonction) F applique l'élément x dans l'élément $F(x)$; notation pour l'application (la fonction) F dans le cas où il est nécessaire d'indiquer la lettre qui désigne son argument
$F(\cdot)$	notation qui souligne le fait que F est une application (une fonction)
$F(A)$	image de l'ensemble A par l'application F
$\operatorname{im} F = \{y \mid y = F(x), x \in X\}$	image de l'application $F: X \to Y$
$F^{-1}(A) = \{x \mid F(x) \in A\}$	image inverse de l'ensemble A par l'application F
$F \mid A$	restriction de l'application F à l'ensemble A
$F \circ G$	composée des applications G et F: $(F \circ G)(x) = F(G(x))$
$\mathbf{N} = \{n \mid n \geqslant 1\}$	ensemble des entiers positifs
$\mathbf{R}$	ensemble des nombres réels; droite numérique
$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	droite numérique augmentée
$\inf A$ $(\sup A)$	borne exacte inférieure (supérieure) des nombres contenus dans l'ensemble $A \subset \mathbf{R}$

$\mathbf{R}^n$	espace arithmétique à n dimensions muni de la structure euclidienne usuelle; les éléments de $\mathbf{R}^n$ doivent être considérés comme des vecteurs colonnes même s'ils sont écrits sous forme de vecteurs lignes
$\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geqslant 0\}$	octant non négatif dans $\mathbf{R}^n$
$e_1, \ldots, e_n$	vecteurs de la base orthonormée standard dans $\mathbf{R}^n : e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)$
$\mathbf{R}^{n*}$	espace arithmétique à n dimensions, dual de $\mathbf{R}^n$; les éléments de $\mathbf{R}^{n*}$ doivent être considérés comme des vecteurs lignes
$px = \langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$	pour tous $x \in \mathbf{R}^n$ et $p \in \mathbf{R}^{n*}$
x^{T}	vecteur ligne, transposé du vecteur colonne x
$\mid x \mid$	norme euclidienne dans $\mathbf{R}^n$
$\mid x \mid^2 = (x \mid x) = x^{\mathrm{T}}x$	
$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^{\mathrm{T}}y$	produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$
$\Vert x \Vert$	norme de l'élément x dans un espace normé
$\rho(x, y)$	distance de l'élément x à l'élément y
$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$	distance de l'élément x à l'ensemble A
$B(x, r) = \{y \mid \rho(y, x) \leqslant r\}$	boule fermée de centre x et de rayon r
$\dot{B}(x, r) = \{y \mid \rho(y, x) < r\}$	boule ouverte de centre x et de rayon r
$\bar{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\mathrm{int}\, A$	intérieur de l'ensemble A
$T_x M$ $(T_x^+ M)$	ensemble des vecteurs tangents (unilatères) à l'ensemble A au point x
$\mathscr{L}_a f = \{x \mid f(x) \leqslant a\}$	ensemble de Lebesgue de la fonction f de niveau a
X^*	espace dual de X
x^*	élément de l'espace dual X^*
$\langle x^*, x\rangle$	valeur de la fonctionnelle linéaire $x^* \in X^*$ sur l'élément $x \in X$
$(x \mid y)$	produit scalaire des éléments x et y dans un espace de Hilbert
$A^\perp = \{x^* \mid \langle x^*, x\rangle = 0, x \in A\}$	annulateur de l'ensemble A
$\dim L$	dimension de l'espace L
X/L	espace quotient de l'espace X par le sous-espace L
$\mathscr{L}(X, Y)$	espace des applications linéaires continues de l'espace X dans l'espace Y; les applications de l'espace $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ peuvent s'identifier avec leurs matrices relativement aux bases standards de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$
$\mathscr{L}^n(X, Y)$	espace des applications polylinéaires continues de l'espace $X^n = X \times \ldots \times X$ dans l'espace Y
I	opérateur d'identité; E et E_n est la matrice de l'opérateur d'identité de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, i.e. la matrice unité d'ordre n
Λ^*	opérateur adjoint à l'opérateur Λ; $\langle \Lambda^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \Lambda x\rangle$

$\operatorname{Ker} \Lambda = \{x \mid \Lambda x = 0\}$	noyau d'un opérateur linéaire
$\operatorname{Im} \Lambda = \{y \mid y = \Lambda x\}$	image d'un opérateur linéaire
$x^{\mathrm{T}} A x \ (y^{\mathrm{T}} A x)$	notation pour la forme quadratique (bilinéaire) à matrice A : $y^{\mathrm{T}} A x = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_i x_j$
$A > 0$	la matrice A est définie positive
$A \geqslant 0$	la matrice A est définie non négative
$C(K, Y)$	espace des applications continues de K dans Y; lorsque Y est normé, on a pour $x(\cdot) \in C(K, Y)$ $\Vert x(\cdot) \Vert = \Vert x(\cdot) \Vert_0 = \sup_{t \in K} \Vert x(t) \Vert$
$C(K) = C(K, Y)$	s'il est clair de quel Y il s'agit, ou lorsque $Y = \mathbf{R}$
$C([t_0, t_1])$	espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[t_0, t_1]$
$C^r(U)$	ensemble des applications qui possèdent dans U des dérivées continues d'ordre inférieur ou égal à r; généralement employé dans les expressions: « la fonction f est de classe $C^r(U)$ » ou « l'application F appartient à $C^r(U)$ »
$C^r(\Delta, Y)$	espace des applications du segment $\Delta \subset \mathbf{R}$ dans l'espace Y (en général $Y = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^{n*}$) possédant des dérivées continues d'ordre inférieur ou égal à r; pour $x(\cdot) \in C^r(\Delta, Y)$ $\Vert x(\cdot) \Vert = \Vert x(\cdot) \Vert_r = \max\{\Vert x(\cdot) \Vert_0, \Vert \dot{x}(\cdot) \Vert_0, \ldots, \Vert x^{(r)}(\cdot) \Vert_0\}$ $C^0(\Delta, Y) \overset{\text{def}}{=} C(\Delta, Y)$
$KC^1(\Delta, Y)$	espace des applications du segment $\Delta \subset \mathbf{R}$ dans l'espace Y (généralement $Y = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^{n*}$) possédant une dérivée continue par morceaux. Muni de la norme induite de l'espace $C(\Delta, Y)$
$W_\infty^1(\Delta, Y)$	espace des applications du segment $\Delta \subset \mathbf{R}$ dans l'espace Y (généralement $Y = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^{n*}$) qui vérifient la condition de Lipschitz, chacune avec sa propre constante. Muni de la norme induite de l'espace $C(\Delta, Y)$
$F'(x; h)$	dérivée de la fonction F au point x dans la direction du vecteur h
$\delta_+ F(x; \cdot)$	première variation de l'application F au point x
$\delta F(x; \cdot)$	première variation selon Lagrange de l'application F au point x
$\delta^n F(x; \cdot)$	n-ième variation selon Lagrange de l'application F au point x
$F'_{\mathrm{G}}(x)$	dérivée de l'application F au point x selon Gâteaux
$F'(x)$	dérivée de l'application F au point x selon Fréchet
$F'(x)[h]$ ou $F'(x)h$	valeur de la dérivée de l'application F au point x pour le vecteur h
$F \in D^1(x)$	l'application F est différentiable selon Fréchet au point x

$F \in SD^1(x)$	l'application F est strictement différentiable au point x
$F''(x)$	dérivée seconde de l'application F au point x selon Fréchet
$F''(x)[h_1, h_2]$	valeur de la dérivée seconde (envisagée comme forme bilinéaire) sur le couple de vecteurs h_1 et h_2
$h \mapsto d^2F(x; h) = F''(x)[h, h]$	différentielle seconde de l'application F au point x
$F_{x_1}(x_1, x_2)$ $(F_{x_2}(x_1, x_2))$	dérivée partielle relativement à x_1 (à x_2) de l'application F, i.e. dérivée de l'application $x_1 \mapsto F(x_1, x_2)$ $(x_2 \mapsto F(x_1, x_2))$
$[x_1, x_2] = \{x \mid x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$	segment joignant les points x_1, x_2
$\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$	domaine effectif de la fonction $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$
$\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R} \mid f(x) \leqslant \alpha, x \in \operatorname{dom} f\}$	épigraphe de la fonction $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$
δA	indicatrice de l'ensemble A
sA	fonction d'appui de l'ensemble A
μA	fonction de Minkowski de l'ensemble A
$\operatorname{lin} A$	enveloppe linéaire de l'ensemble A
$\operatorname{aff} A$	enveloppe affine de l'ensemble A
$\operatorname{cone} A$	enveloppe conique de l'ensemble A
$\operatorname{conv} A$	enveloppe convexe de l'ensemble A
$\overline{\operatorname{conv}}\, A$	adhérence convexe; coïncide avec l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble A
$\partial f(x)$	subdifférentielle de la fonction f au point x
$f^*(\cdot)$	fonction conjuguée à la fonction $f(\cdot)$; transformée de Young-Fenchel de la fonction f
$f(x) \to \inf (\sup, \operatorname{extr}), x \in C$	notation pour un problème d'extrémum
$\hat{x}$	solution d'un problème d'extrémum
abs min (abs max, abs extr)	minimum (maximum, extrémum) absolu
$\hat{x} \in$ abs min $(\mathfrak{z})$ (abs max $(\mathfrak{z})$, abs extr $(\mathfrak{z})$)	$\hat{x}$ donne un minimum (maximum, extrémum) absolu au problème $(\mathfrak{z})$
loc min (loc max, loc extr)	minimum (maximum, extrémum) local
$\hat{x} \in$ loc min $(\mathfrak{z})$ (loc max $(\mathfrak{z})$, loc extr $(\mathfrak{z})$)	$\hat{x}$ donne un minimum (maximum, extrémum) au problème $(\mathfrak{z})$
$\mathcal{J}, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{P}$	fonctionnelles dans les problèmes du calcul des variations et de commande optimale
$\mathcal{Q}$	fonctionnelle quadratique du problème secondaire du calcul des variations
$L = L(t, x, \dot{x})$ ou $L = L(t, x, \dot{x}, u)$	lagrangien
$\mathcal{L}$	fonction de Lagrange
$\mathcal{H}$	hamiltonien
H	fonction de Pontriaguine
$\mathcal{E}$	fonction de Weierstrass

INDEX TERMINOLOGIQUE